山东大学学报(理学版)2025 年 12 月 第 60 卷 第 12 期
Journal of Shandong University (*Natural Science*), Vol.60, No.12, 2025   http://lxbwk.njournal.sdu.edu.cn

文章编号: 1671-9352(2025)12-0161-06   DOI:10.6040/j.issn.1671-9352.0.2023.385

联图 $C_m \vee C_n$ 的邻和可区别边染色

白羽,强会英*,何静

(兰州交通大学数理学院, 甘肃 兰州 730070)

摘要: 图 G 的邻和可区别 k-边染色是指图 G 的一个正常边染色中，满足相邻顶点关联边的色数之和不相等。图 G 的一个邻和可区别 k-边染色所用到的最小颜色数 k 称为图 G 的邻和可区别边色数。本文研究了联图 $C_m \vee C_n$ 的邻和可区别边染色问题，得到了联图 $C_m \vee C_n (n \neq m)$ 的邻和可区别边色数及 $C_n \vee C_n$ 的邻和可区别边色数的上界，并将该结果推广到一般图的联图。

关键词: 圈;联图;邻和可区别边染色;邻和可区别边色数

中图分类号: O157   **文献标志码:** A

引用格式: 白羽,强会英,何静. 联图 $C_m \vee C_n$ 的邻和可区别边染色[J]. 山东大学学报(理学版),2025,60(12):161-166.

Neighbor sum distinguishing edge coloring of join graphs $C_m \vee C_n$

BAI Yu, QIANG Huiying*, HE Jing

(School of Mathematics, Lanzhou Jiaotong University, Lanzhou 730070, Gansu, China)

Abstract: The neighbor sum distinguishing k-edge coloring of graph G is the coloring of a proper edge coloring of graph G, where the chromatic sum of adjacent vertex associated edge are not equal. The minimum number of colors k used for coloring is called the neighbor sum distinguishing edge chromatic numbers of graph G. This paper studies the neighbor sum distinguishing edge coloring problem of the join graph $C_m \vee C_n$, obtaining the neighbor sum distinguishing edgechromatic numbers of the join graph $C_m \vee C_n (n \neq m)$ and the upper bounds of $C_n \vee C_n$, and extending this result to join graphs of general graphs.

Key words: cycle; join graphs; neighbor sum distinguishing edge coloring; neighbor sum distinguishing edge chromatic number

1 引言和预备知识

图染色问题是图论中重要的研究内容,来源于著名的“四色问题”,应用范围十分广泛。张忠辅等[1]提出了图的邻点可区别边染色的概念,并得到了路、圈、完全图等简单图的邻点可区别边色数。Flandrin 等[2]提出图的邻和可区别边染色的概念,并得到了一些特殊图的邻和可区别边色数。图 G 的一个 k-正常边染色,是图 G 的一个映射 $\varphi: E(G) \to \{1, 2, \cdots, k\}$,且对 $\forall uw, vw \in E(G)$,都有 $\varphi(uw) \neq \varphi(vw)$。若同时满足对 $\forall uv \in E(G)$,有 $S(u) \neq S(v)$,其中 $S(u) = \sum\limits_{uv \in E(G)} \varphi(uv)$,则称 φ 为图 G 的邻和可区别 k-边染色。染色中用到的最小颜色数 k 称为 G 的邻和可区别边色数,记为 $\chi'_{\Sigma}(G)$。文献[3-10]研究了一些图的和可区别边(全)染色问题。

G 和 H 为点边互不相交的连通的简单图,图 G 和 H 的联图记为 $G \vee H$,如图 1,$E(G)$,$E(H)$ 在图中并未表示。联图中 $V(G \vee H) = V(G) \cup V(H)$, $E(G \vee H) = E(G) \cup E(H) \cup \{uv \mid u \in V(G), v \in V(H)\}$。本文研究了联图 $C_m \vee C_n$ 的邻和可

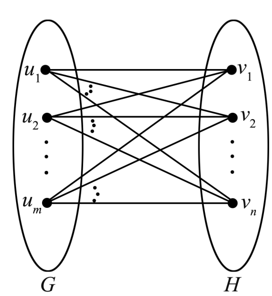

图 1 $G \vee H$
Fig.1 $G \vee H$

收稿日期: 2023-09-05; **网络出版时间:** 2024-12-19 11:02:15

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(61962035)

第一作者: 白羽(1998—),女,硕士研究生,研究方向为图论及其应用. E-mail:2453825105@qq.com

*通信作者: 强会英(1968—),女,教授,研究方向为图论及其应用. E-mail:qhy2005ww@126.com

区别边染色问题,并得到了相应的邻和可区别边色数。田双亮等[6]研究并得到了结论 $n=m\geqslant 3$ 时,$P_m\vee P_n$ 的邻和可区别边色数不超过 $n+4$,本文对该定理作了部分优化,证明了当 $3\leqslant n=m\leqslant 6$ 时,$\chi'_\Sigma(P_m\vee P_n)=n+3$,并讨论了联图 $C_m\vee C_n$ 的邻和可区别边染色问题,得到了相应的邻和可区别边色数。

文中出现的 $V(G)$,$E(G)$ 分别是图 G 的点集,边集,$\varphi(G)$ 表示边染色的一个关联函数,$d(u)$ 表示点 u 的度,$d(u,v)$ 表示 u,v 两点之间的距离,$C(u)$ 表示点 u 的色集合,$S(u)$ 表示与点 u 关联的边的颜色之和,$\overline{C}(u)$ 表示点 u 的缺色集合,$\overline{S}(u)$ 表示点 u 所缺颜色数之和,即缺色集合中所有元素之和,$\{S(u_1),S(u_2),\cdots,S(u_n)\}\to\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$ 表示点 u_i 的色数和序列,其中 $S(u_i)$ 与 a_i 一一对应。

猜想 1[2]　若 G 是阶至少为 3 的连通图,且 $G\neq C_5$,则 $\chi'_\Sigma(G)\leqslant\Delta(G)+2$。

引理 1[2]　对 n 阶完全图 $K_n(n\geqslant 3)$,有 $\chi'_\Sigma(K_n)=\begin{cases}n, & n\text{ 为奇数;}\\ n+1, & n\text{ 为偶数。}\end{cases}$

引理 2[6]　对 $n(n\geqslant 3)$ 阶简单图 G,若图 G 有相邻的最大度点,则 $\chi'_\Sigma(G)\geqslant\Delta(G)+1$。

2　主要结论

定理 1　对圈 $C_m(m\geqslant 3)$ 和 $C_n(n\geqslant 3)$ 的联图 $C_m\vee C_n(n\neq m)$ 时,有 $\chi'_\Sigma(C_m\vee C_n)=\Delta+1$。

证明　记 $C_m=u_1u_2\cdots u_mu_1$, $C_n=v_1v_2\cdots v_nv_1$。

联图 $C_m\vee C_n$ 中,m 和 n 对称,当 $n\neq m$ 时,不妨假设 $m>n$,则 $\Delta(C_m\vee C_n)=m+2$,存在两个相邻的最大度点,由引理 2 得,$\chi'_\Sigma(C_m\vee C_n)\geqslant\Delta+1=m+3$。从色集合 $\{1,2,\cdots,m+3\}$ 中选取 $m+2$ 个颜色,$\binom{m+3}{m+2}=m+3$,$m+3$种颜色的和值数范围为$\frac{(m+2)(m+3)}{2}\leqslant S(u)\leqslant\frac{(m+2)(m+5)}{2}$,包含的不同和值数有 $m+3$ 种,下面分 3 种情形给出联图 $C_m\vee C_n$ 的$(\Delta+1)$-邻和可区别边染色方法如下。

情形 1　当 $n\equiv 0(\bmod 3)$时,$C_m\vee C_n$ 的一个$(\Delta+1)$-色染法 φ 为:用颜色 1,2,3 循环染边 v_jv_{j+1}, $(1\leqslant j\leqslant n-1)$, $\varphi(v_1v_n)=3$,用颜色 1,2 循环染边 $u_iu_{i+1}(1\leqslant i\leqslant m-1)$。边 $u_iv_j(1\leqslant i\leqslant m,\ 1\leqslant j\leqslant n)$的染色从色集合 $\{4,\cdots,m+3\}$ 中选取,

$$\varphi(u_iv_j)=\begin{cases}(i+j+2)(\bmod(m+4)), & i+j+2<m+4;\\ (i+j+2)(\bmod(m+4))+4, & i+j+2\geqslant m+4。\end{cases}$$

其中,当 $m=n+1$ 时,

$$\varphi(u_1u_m)=\begin{cases}2, & m\equiv 0(\bmod 2);\\ 3, & m\equiv 1(\bmod 2)。\end{cases}$$

当 $m>n+1$ 时,$\varphi(u_1u_m)=2$,并调整边 $u_{m-1}u_m$ 的染色为

$$\varphi(u_{m-1}u_m)=\begin{cases}1, & m\equiv 0(\bmod 2);\\ 3, & m\equiv 1(\bmod 2)。\end{cases}$$

按上述染法,点 $v_1,\cdots,v_n$ 的缺色集合按$\{2\}$,$\{3\}$,$\{1\}$的次序循环;点 $u_i(1\leqslant i\leqslant m)$的缺色集合如下。

(1) 当 $m=n+1$ 时,

$$\overline{C}(u_1)=\begin{cases}\{2,m+3\}, & m\equiv 1(\bmod 2);\\ \{3,m+3\}, & m\equiv 0(\bmod 2)。\end{cases}$$

$$\overline{C}(u_i)=\{3,j+2\},\ (2\leqslant i\leqslant m-1);$$

$$\overline{C}(u_m)=\begin{cases}\{1,m+2\}, & m\equiv 1(\bmod 2);\\ \{3,m+2\}, & m\equiv 0(\bmod 2)。\end{cases}$$

此时有:$\overline{S}(v_j)<\overline{S}(u_i)$, $(1\leqslant i\leqslant m,\ 1\leqslant j\leqslant n)$; $\overline{S}(v_j)\neq\overline{S}(v_{j+1})$, $(1\leqslant j\leqslant n-1)$; $\overline{S}(v_1)\neq\overline{S}(v_n)$; $\overline{S}(u_2)<\overline{S}(u_3)<\cdots<\overline{S}(u_{m-1})$; $\overline{S}(u_2)<\overline{S}(u_m)<\overline{S}(u_1)$。$m\equiv 0(\bmod 2)$时,$\overline{S}(u_{m-1})<\overline{S}(u_m)$; $m\equiv 1(\bmod 2)$时,$\overline{S}(u_{m-1})>\overline{S}(u_m)$。

(2) 当 $m>n+1$ 时,C_m 中各点色集合为

$$C(u_i)=\begin{cases}\{1,2,i+3,i+4,\cdots,i+n+2\}, & 1\leqslant i\leqslant m-n+1;\\ \{1,2,4,5,\cdots,i+2-m+n,i+3,\cdots,m+3\}, & m-n+2\leqslant i\leqslant m-2。\end{cases}$$

$$C(u_{m-1})=\begin{cases}\{1,2,4,5,\cdots,n+1,m+2,m+3\}, & m\equiv 0(\bmod 2);\\ \{1,3,4,5,\cdots,n+1,m+2,m+3\}, & m\equiv 1(\bmod 2)。\end{cases}$$

$$C(u_m)=\begin{cases}\{1,2,4,5,\cdots,n+2,m+3\}, & m\equiv 0(\bmod 2);\\ \{2,3,4,5,\cdots,n+2,m+3\}, & m\equiv 1(\bmod 2)。\end{cases}$$

此时有:$S(v_j)>S(u_i)$,$(1\leqslant i\leqslant m,\ 1\leqslant j\leqslant n)$;$S(v_j)\neq S(v_{j+1})$,$(1\leqslant j\leqslant n-1)$;$S(v_1)\neq S(v_n)$;$S(u_1)<S(u_2)<\cdots<S(u_{m-n+1})$;$S(u_{m-n+1})>S(u_{m-n+2})>\cdots>S(u_m)>S(u_1)$。各点均邻和可区别。

情形 2　当 $n\equiv 1(\bmod 3)$ 时,$C_m\vee C_n$ 的一个 $(\Delta+1)$-色染法 φ 为用颜色 1,2 循环染边 u_iu_{i+1},$(1\leqslant i\leqslant m-n+1)$ 或 $(m-n+3\leqslant i\leqslant m-1)$;$i=m-n+2$ 时,$\varphi(u_{m-n+2}u_{m-n+3})=m+3$,$\varphi(u_1u_m)=m+3$。用颜色 $1,m+3,2$ 循环染边 v_jv_{j+1},$(1\leqslant j\leqslant n-2)$,$\varphi(v_{n-1}v_n)=1$,$\varphi(v_1v_n)=m+3$。

边 $u_iv_j(1\leqslant j\leqslant n,\ 1\leqslant i\leqslant m)$ 的染法为 $\varphi(v_1u_i)=i+1$,$(1\leqslant i\leqslant m)$,边 $u_iv_j(2\leqslant j\leqslant n,\ 1\leqslant i\leqslant m)$ 的染色从色集合 $\{3,\cdots,m+2\}$ 中选取,$\varphi(u_{m-n+3}v_{n-1})=2$,其余边按如下染法染色。

$$\varphi(u_iv_j)=\begin{cases}(i+j)(\bmod(m+3)), & i+j<m+3;\\ (i+j)(\bmod(m+3))+3, & i+j\geqslant m+3。\end{cases}$$

按上述染法,圈 C_n 中各点的缺色集合为 $\overline{C}(v_1)=\overline{C}(v_{n-1})=\{m+2\}$;$\overline{C}(v_n)=\{2\}$,$v_2,\cdots,v_{n-2}$ 各点的缺色集合按 $\{2\},\{1\},\{m+3\}$ 的次序循环,圈 C_m 中各点的色集合为

$$C(u_1)=\{1,2,\cdots,n+1,m+3\},$$

$$C(u_i)=\begin{cases}\{1,2,i+1,i+2,\cdots,i+n\}, & 2\leqslant i\leqslant m-n+1;\\ \{1,2,\cdots,i-m+n,i+1,\cdots,m+2\}, & m-n+4\leqslant i\leqslant m-1。\end{cases}$$

$$C(u_{m-n+2})=\begin{cases}\{1,m-n+3,\cdots,m+3\}, & m-n+2\equiv 0(\bmod 2);\\ \{2,m-n+3,\cdots,m+3\}, & m-n+2\equiv 1(\bmod 2)。\end{cases}$$

$$C(u_{m-n+3})=\{1,2,3,m-n+4,\cdots,m+1,m+3\},$$

$$C(u_m)=\begin{cases}\{1,3,4,\cdots,n,m+1,m+2,m+3\}, & d(u_{m-n+3},u_m)\equiv 1(\bmod 2);\\ \{2,3,4,\cdots,n,m+1,m+2,m+3\}, & d(u_{m-n+3},u_m)\equiv 0(\bmod 2)。\end{cases}$$

此时有:$S(v_j)\neq S(v_{j+1})$,$(1\leqslant j\leqslant n-1)$;$S(v_1)\neq S(v_n)$;$S(u_1)>S(u_2)$;$S(u_2)<\cdots<S(u_{m-n+2})$;$S(u_{m-n+2})>S(u_{m-n+3})>S(u_{m-n+4})>\cdots>S(u_{m-1})$;$S(u_1)<S(u_{m-1})<S(u_m)$;$S(u_i)>S(v_j)$,$(i\neq m-n+2,\ 1\leqslant j\leqslant n)$。

当 $\overline{S}(u_{m-n+2})=m+2$ 或 $\overline{S}(u_{m-n+2})=m+3$ 时,会出现 $S(v_1)=S(u_{m-n+2})$ 或 $S(v_j)=S(u_{m-n+2})$,$(j\equiv 1(\bmod 3)$,$2\leqslant j\leqslant n-2)$ 的情况,此时调整边 $u_{m-n+2}u_{m-n+3}$ 的染色为 $\varphi(u_{m-n+2}u_{m-n+3})=m-n+2$,其余边染色不变,即有 $S(v_1)>S(u_{m-n+2})$ 或 $S(v_j)>S(u_{m-n+2})$,$S(u_{m-n+2})>S(u_{m-n+1})$,$S(u_{m-n+2})>S(u_{m-n+3})$,$S(u_{m-n+3})<S(u_{m-n+4})$,$S(u_i)>S(v_j)$,$(1\leqslant i\leqslant m,\ 1\leqslant j\leqslant n)$,易见 $\Delta+1$ 色可做到邻和可区别。

情形 3　当 $n\equiv 2(\bmod 3)$ 时,$C_m\vee C_n$ 的一个 $(\Delta+1)$-色染法 φ 为 $\varphi(v_1u_i)=i+1$,$(1\leqslant i\leqslant m)$,用颜色 $1,m+3,2$ 循环染边 v_jv_{j+1},$(1\leqslant j\leqslant n-1)$,$\varphi(v_1v_n)=m+3$,用颜色 1,2 循环染边 u_iu_{i+1},$(1\leqslant i\leqslant m-1)$。边 $u_iv_j(2\leqslant j\leqslant n,\ 1\leqslant i\leqslant m)$ 的染色从色集合 $\{3,\cdots,m+2\}$ 中选取,$\varphi(u_1u_m)=m+3$。

$$\varphi(u_iv_j)=\begin{cases}(i+j)(\bmod(m+3)), & i+j<m+3;\\ (i+j)(\bmod(m+3))+3, & i+j\geqslant m+3。\end{cases}$$

按上述染法,圈 C_n 中各点的缺色集合为 $\overline{C}(v_1)=\{m+2\}$;$v_2,\cdots,v_n$ 各点的缺色集合按 $\{2\},\{1\},\{m+3\}$ 的次序循环。圈 C_m 中各点的色集合为 $C(u_1)=\{1,2,\cdots,n+1,m+3\}$;

$$C(u_i)=\begin{cases}\{1,2,i+1,i+2,\cdots,i+n\}, & 2\leqslant i\leqslant m-n+2;\\ \{1,2,\cdots,i-m+n,i+1,\cdots,m+2\}, & m-n+3\leqslant i\leqslant m-1。\end{cases}$$

$$C(u_m)=\begin{cases}\{1,3,4,\cdots,n,m+1,m+2,m+3\}, & m\equiv 0(\bmod 2);\\ \{2,3,4,\cdots,n,m+1,m+2,m+3\}, & m\equiv 1(\bmod 2)。\end{cases}$$

此时有:$S(v_j)\neq S(v_{j+1})$,$(1\leqslant j\leqslant n-1)$;$S(v_1)\neq S(v_n)$;$S(u_1)>S(u_2)$;$S(u_2)<S(u_3)<\cdots<S(u_{m-n+2})$;

$S(u_{m-n+2})>S(u_{m-n+3})>\cdots>S(u_{m-1})$；$S(u_{m-1})<S(u_m)$；$S(u_1)<S(u_m)$；$S(u_i)>S(v_j)$，$(1\leqslant i\leqslant m-1,\ 1\leqslant j\leqslant n)$。

当 $S(v_1)=S(u_m)$ 时,调整边 v_1v_n,v_nu_3 的染色为：$\varphi(v_1v_n)=m+2$，$\varphi(v_nu_3)=m+3$,其余染色不变,有 $S(v_1)+1=S(u_m)$，$S(u_3)>S(v_j)$，$(1\leqslant j\leqslant n)$，$S(v_1)\neq S(v_n)$,其余不等式均成立,且 $S(u_i)>S(v_j)$，$(1\leqslant i\leqslant m,\ 1\leqslant j\leqslant n)$。易见各点邻和可区别。故 $\chi'_\Sigma(C_m\vee C_n)=\Delta+1$。

综上所述,结论成立。

定理 2 当 $n=m\geqslant 3$ 时,有 $\chi'_\Sigma(C_n\vee C_n)=\Delta+2$。

证明 $\Delta(C_n\vee C_n)=n+2$,图中所有点均为最大度点,有相邻的最大度点,由引理 2 得,$\chi'_\Sigma(C_n\vee C_n)\geqslant\Delta+1=n+3$。从色集合 $\{1,2,\cdots,n+3\}$ 中选取 $n+2$ 个颜色,$\binom{n+3}{n+2}=n+3$，$n+3$ 种颜色的和值数范围为 $\frac{(n+2)(n+3)}{2}\leqslant S(u)\leqslant\frac{(n+2)(n+5)}{2}$,包含的不同和值数有 $n+3$ 种。

(1) 当 $n\equiv 0(\mathrm{mod}\ 2)$ 时,若图 G 存在$(\Delta+1)$-邻和可区别染色,从色集合中任取一色 i,表现色 i 的点有偶数个,点 u_i 中至少缺两色可使得 u_i 邻和可区别,若点 u_i 缺 2 色,以图 $C_6\vee C_6$ 为例,两色各缺 3 次,与表现色 i 的点有偶数个的原理相矛盾。若点 u_i 缺 3 色,以图 $C_4\vee C_4$ 为例,必有 2 色只缺一次,矛盾,因此当 $n\equiv 0(\mathrm{mod}\ 2)$ 时,联图 $C_n\vee C_n$ 中所缺色的总数为 n 个,点 u_i,v_j 各缺$\frac{n}{2}$种颜色。若图 $C_4\vee C_4$ 存在 7 色染法,不妨设 $\bar{C}(u_1)=\bar{C}(u_3)=1$，$\bar{C}(u_2)=\bar{C}(u_4)=2$,则边 u_1v_j 及 u_3v_j 中必有一条边染 2 色,u_2v_j 与 u_4v_j 同理,必有一条边染 1 色,要使得点 v_j 不缺$\{1,2\}$色,令点 v_1,v_2 与点 u_i 中染 2 色,且 $\varphi(v_1v_2)=1$，$\varphi(v_3v_4)=2$,在染色过程中 u_i 各点满足邻和可区别条件,点 v_j 会出现 $S(v_1)=S(v_2)$，$S(v_3)=S(v_4)$ 或 $S(v_1)=S(v_4)$，$S(v_2)=S(v_3)$,因此 $\Delta+1$ 色不可染。

(2) 当 $n\equiv 1(\mathrm{mod}\ 2)$ 时,若图 G 存在$(\Delta+1)$-邻和可区别染色,则点 u_i 所缺颜色数至少为 3,若点 u_i 缺 3 色,以图 $C_9\vee C_9$ 为例,3 色各缺 3 次,矛盾。若点 u_i 缺 4 色,以图 $C_7\vee C_7$ 为例,必有一色只缺一次,矛盾。因此 $\Delta+1$ 色不可染。下面给出联图 $C_n\vee C_n$ 的 $\Delta+2$ 色染法,根据 n 的值分 2 种情形讨论。

情形 1 特殊地,当 $n=m=3$ 时。$C_3\vee C_3\cong K_6$，$\Delta(C_3\vee C_3)=5$,由引理 1 得 $\chi'_\Sigma(K_6)=\Delta+2=7$。

情形 2 当 $n=m\geqslant 4$ 时。联图 $C_n\vee C_n$ 是$(n+2)$-正则图,$\Delta(C_n\vee C_n)=n+2$,由引理 2 得 $\chi'_\Sigma(C_n\vee C_n)\geqslant\Delta+1=n+3$。为证 $\chi'_\Sigma(C_n\vee C_n)\leqslant\Delta+2=n+4$。给出 $C_n\vee C_n$ 的一种$(\Delta+2)$-色染法。从色集合$\{1,2,\cdots,n+4\}$中选取 $n+2$ 个元素,可选集合共有$\binom{n+4}{n+2}$个,和值数范围为$\frac{(n+2)(n+3)}{2}\leqslant S(u)\leqslant\frac{(n+2)(n+7)}{2}$,所包含的不同和值数为 $2n+5$ 个,$C_n\vee C_n$ 的$(\Delta+2)$-邻和可区别染色方法 φ 为

$$\varphi(u_iv_1)=i+1,\ (1\leqslant i\leqslant n);$$

$$\varphi(u_iv_j)=\begin{cases}(i+j+1)(\mathrm{mod}(n+3)), & i+j+1<n+3,\\ (i+j+1)(\mathrm{mod}(n+3))+1, & i+j+1\geqslant n+3,\end{cases}\quad(2\leqslant j\leqslant n);$$

$$\varphi(u_iu_{i+1})=\varphi(v_jv_{j+1})=\begin{cases}n+4, & i\equiv 1(\mathrm{mod}\ 2),\\ n+3, & i\equiv 0(\mathrm{mod}\ 2),\end{cases}\quad(1\leqslant i,\ j\leqslant n-1)。$$

其余边的染法及色数和的讨论分下面 2 种情形：

情形 2.1 $n\equiv 0(\mathrm{mod}\ 2)$时。$\varphi(u_1u_n)=\varphi(v_1v_n)=n+3$。

按上述染法,各点的缺色集合为：$\bar{C}(u_i)=\{i,i+2\}$，$(1\leqslant i\leqslant n)$；$\bar{C}(v_1)=\{1,n+2\}$；$\bar{C}(v_j)=\{j,j+1\}$，$(2\leqslant j\leqslant n)$。此时,各点所缺颜色数的和为：$\bar{S}(u_i)$都为偶数,$\bar{S}(v_j)$都为奇数,且 $\bar{S}(u_i)<\bar{S}(u_j)$，$(1\leqslant i<j\leqslant n)$；$\bar{S}(v_i)<\bar{S}(v_j)$，$(2\leqslant i<j\leqslant n)$；$\bar{S}(v_n)>\bar{S}(v_1)>\bar{S}(v_2)$。满足邻和可区别的条件。

情形 2.2 $n\equiv 1(\mathrm{mod}\ 2)$时。$\varphi(u_1u_n)=n+3$，$\varphi(v_1v_n)=n+1$。为避免相邻点色数和相等的情况,调整上述染法中 3 条边的染色如下：$\varphi(u_nv_n)=n$，$\varphi(u_nv_1)=n+2$，$\varphi(u_{n-1}u_n)=n-1$。

作上述调整后,各点的缺色集合为：$\bar{C}(u_i)=\{i,i+2\}$，$(1\leqslant i\leqslant n-2)$；$\bar{C}(u_{n-1})=\{n+1,n+3\}$；$\bar{C}(u_n)=\{n+1,n+4\}$；$\bar{C}(v_1)=\{1,n+3\}$；$\bar{C}(v_j)=\{j,j+1\}$，$(2\leqslant j\leqslant n-1)$；$\bar{C}(v_n)=\{n-1,\ n+4\}$。此时,各点所缺颜色数的和为：$\bar{S}(u_i)(1\leqslant i\leqslant n-1)$都为偶数,$\bar{S}(v_j)$都为奇数,$\bar{S}(u_n)$为奇数,$\bar{S}(u_n)>\bar{S}(v_j)$，$(1\leqslant j\leqslant n)$；

$\bar{S}(u_i) < \bar{S}(u_j)$,$(1 \leqslant i < j \leqslant n)$;$\bar{S}(v_i) < \bar{S}(v_j)$,$(2 \leqslant i < j \leqslant n)$;$\bar{S}(v_n) > \bar{S}(v_1) > \bar{S}(v_2)$。满足邻和可区别的条件。故 $\chi'_{\Sigma}(C_n \vee C_n) \leqslant \Delta+2$。

综上所述,结论成立。

定理 3　设连通图 G 和 H 的联图为 $G \vee H$,则 $\chi'_{\Sigma}(G \vee H) \leqslant \Delta+2$。

证明　记 $V(G)=\{u_1,\cdots,u_m\}$,$V(H)=\{v_1,\cdots,v_n\}$,$(n \geqslant m \geqslant 1)$,$\Delta(G \vee H)=\Delta$,根据联图中最大度点的分布情况,分为以下 2 种情形。

情形 1　若联图仅有一个最大度点,$\Delta(G \vee H)=\max\{\Delta(G)+|V(H)|,\ \Delta(H)+|V(G)|\} \leqslant n+m-1$,构造一个色集合 $\{1,2,\cdots,\Delta\}$,设最大度点为 ω,$d(\omega)=\Delta$,若其余 $n+m-1$ 个点的度都相等且等于 $\Delta-1$,由于 $\binom{\Delta}{\Delta-1}=\Delta$,各点和值 $S(u)$ 的范围是:$\frac{\Delta(\Delta-1)}{2} \leqslant S(u) \leqslant \frac{(\Delta-1)(\Delta+2)}{2}$,有 Δ 种不同的和值数,给这 $n+m-1$ 个点赋予不同的和值数,则使用 Δ 个色可使联图中相邻点的和值不同。若这 $n+m-1$ 个点的度不相等,记其中点最大的度为 k,$k \leqslant \Delta-1$,$\binom{\Delta}{k}=\frac{\Delta(\Delta-1)\cdots(\Delta-k+1)}{k!}$,$\binom{\Delta}{k}>k$ 恒成立,至少存在一种染色方案使得联图中任意相邻点邻和可区别,故 $\chi'_{\Sigma}(G \vee H)=\Delta$。

情形 2　若联图至少存在两个相邻的最大度点。由引理 2 知,$\chi'_{\Sigma}(G \vee H) \geqslant \Delta+1$。

情形 2.1　若联图中 $n=m>1$ 时,使用 $\Delta+2$ 色对图进行染色,$\binom{\Delta+2}{\Delta}=\frac{(\Delta+1)(\Delta+2)}{2}$,$n<\Delta \leqslant 2n-1$,各点和值 $S(u)$ 的范围是:$\frac{\Delta(\Delta+1)}{2} \leqslant S(u) \leqslant \frac{\Delta(\Delta+5)}{2}$,有 $2\Delta+1$ 种不同的和值数,$2\Delta+1>2n$ 恒成立,至少存在一种染色方案使得联图中任意两点邻和可区别,故 $\chi'_{\Sigma}(G \vee H) \leqslant \Delta+2$。

情形 2.2　若联图中 $n \neq m$ 时,(1) $m=1$ 时,若图 H 是一个完全图,$\Delta(G \vee H)=n$,由引理 1 得

$$\chi'_{\Sigma}(G \vee H)=\chi'_{\Sigma}(\{u_1\} \vee K_n)=\begin{cases}\Delta+1=n+1, & n\ \text{为偶数;}\\ \Delta+2=n+2, & n\ \text{为奇数。}\end{cases}$$

(2) $m \neq 1$ 时,若图 G 与图 H 均为完全图,$\Delta(G \vee H)=n+m-1$,由引理 1 得

$$\chi'_{\Sigma}(G \vee H)=\chi'_{\Sigma}(K_m \vee K_n)=\begin{cases}\Delta+1=n+m, & n+m\ \text{为奇数;}\\ \Delta+2=n+m+1, & n+m\ \text{为偶数。}\end{cases}$$

(3) 图 G 与图 H 中至少有一个不是完全图,则联图 $G \vee H$ 中最大度点的个数不超过 $n+m-1$ 个,使用 $\Delta+2$色对图进行染色,则可通过染色使得相邻的最大度点缺不同色,相邻的度相同的点色和不同,最大度点与其他小于 Δ 的相邻点易做到邻和可区别,$\Delta+2$ 色可染。故 $\chi'_{\Sigma}(G \vee H) \leqslant \Delta+2$。

综上所述,联图的邻和可区别边色数满足猜想,结论成立。

在联图 $C_m \vee C_n$ 染色过程中,对文献[6]中联图 $P_n \vee P_n$ 的邻和可区别边色数做进一步的改进如下。

定理 4　对 $n(n \geqslant 3)$ 阶路 P_n,当 $3 \leqslant n \leqslant 6$ 时,有 $\chi'_{\Sigma}(P_n \vee P_n)=\Delta+1$。

证明　将联图 $C_n \vee C_n$ 中去掉边 u_1u_m,v_1v_n,即为联图 $P_n \vee P_n$,$P_n \vee P_n$ 的$(\Delta+1)$-邻和可区别染法分别如图 2。

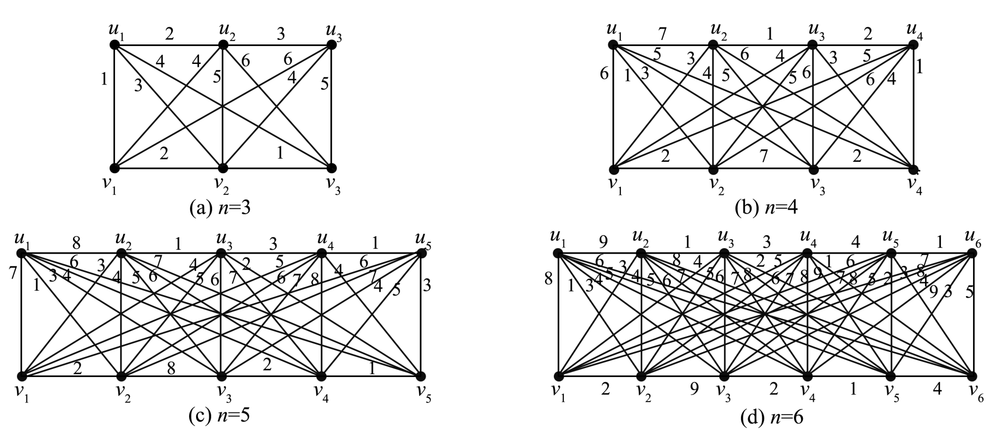

图 2　$P_n \vee P_n$

Fig.2　$P_n \vee P_n$

（1）当 $n=3$ 时，染法如图 2（a），各点色和序列依次为 $\{S(u_1),S(u_2),S(u_3);S(v_1),S(v_2),S(v_3)\}\to\{10,20,18;13,15,16\}$。

（2）当 $n=4$ 时，染法如图 2（b），各点色和序列依次为 $\{S(u_1),\cdots,S(u_4);S(v_1),\cdots,S(v_4)\}\to\{22,26,21,18;20,25,27,17\}$。

（3）当 $n=5$ 时，染法如图 2（c），各点色和序列依次为 $\{S(u_1),\cdots,S(u_5);S(v_1),\cdots,S(v_5)\}\to\{29,34,28,34,26;27,33,35,33,23\}$。

（4）当 $n=6$ 时，染法如图 2（d），各点色和序列依次为 $\{S(u_1),\cdots,S(u_6);S(v_1),\cdots,S(v_6)\}\to\{36,43,36,43,36,37;35,42,44,42,39,29\}$。

从图中易见，4 种图的染法都是 $(\Delta+1)$-邻和可区别染色，结论成立。

参考文献：

[1] ZHANG Zhongfu, LIU Linzhong, WANG Jianfang. Adjacent strong edge coloring of graphs[J]. Applied Mathematics Letters, 2002, 15(5):623-626.

[2] FLANDRIN E, MARCZYK A, PRZYBYLO J, et al. Neighbor sum distinguishing index[J]. Graphs and Combinatorics, 2013, 29(5):1329-1336.

[3] 高荣双. 图的邻和可区别边染色和邻和可区别全染色[D]. 徐州：中国矿业大学，2017.
GAO Rongshuang. Neighbor sum distinguishing edge colorings and total colorings of graphs[D]. Xuzhou: China University of Mining and Technology, 2017.

[4] 潘文华，徐常青. 无 K_4-图子式的图的邻和可区别边染色[J]. 数学进展，2017，46(6)：41-49.
PAN Wenhua, XU Changqing. Neighbor sum distinguishing edge colorings of K_4-minor free graphs[J]. Advances in Mathematics, 2017, 46(6):41-49.

[5] 姚丽，强会英，杨笑蕊. 两类笛卡尔积图的邻和可区别全染色[J]. 兰州交通大学学报，2020，39(3)：125-129.
YAO Li, QIANG Huiying, YANG Xiaorui. The neighbor sum distinguishing total coloring of two types cartesian graph[J]. Journal of Lanzhou Jiaotong University, 2020, 39(3):125-129.

[6] 田双亮，杨环，杨青，等. 路的联的邻和可区别边染色[J]. 山东大学学报（理学版），2020，55(9)：29-35.
TIAN Shuangliang, YANG Huan, YANG Qing, et al. Neighbor sum distinguishing edge coloring of the join of paths[J]. Journal of Shandong University (Natural Science), 2020, 55(9):29-35.

[7] 谭钧铭，强会英，刘欢，等.双圈图的邻和可区别边染色[J]. 西南大学学报（自然科学版），2022，44(6)：1-8.
TAN Junming, QIANG Huiying, LIU huan, et al. Neighbor sum distinguishing edge coloring of bicyclic graphs[J]. Journal of Southwest University (Natural Science), 2022, 44(6):1-8.

[8] 刘欢，强会英，王洪申. 单圈图的 $D(2)$-点和可区别边染色[J]. 南开大学学报（自然科学版），2024(1)：91-97.
LIU huan, QIANG Huiying, WANG Hongshen. $D(2)$-Vertex sum distinguishing edge coloring of unicyclic graphs[J]. Journal of Nankai University (Natural Science), 2024(1):91-97.

[9] 姚京京，邵泽玲，徐常青. $\Delta=3$ 的图的邻和可区别全可选性（英文）[J]. 数学进展，2016，45(3)：343-348.
YAO Jingjing, SHAO Zeling, XU Changqing. Neighbor sum distinguishing total choosability of graphs with $\Delta=3$[J]. Advances in Mathematics, 2016, 45(3):343-348.

[10] 王芹，杨超，殷志祥，等. 三类联图的 2-距离和可区别边染色[J]. 华中师范大学学报（自然科学版），2024，58(2)：178-183.
WANG Qin, YANG Chao, YIN Zhixiang, et al. 2-distance sum distinguishing edge colorings of three types of join graphs[J]. Journal of Central China Normal University (Natural Sciences), 2024, 58(2):178-183.

（编辑：祁业卿）