山东大学学报(理学版)2025年12月 第60卷 第12期
*Journal of Shandong University*(*Natural Science*), Vol.60, No.12, 2025 http://lxbwk.njournal.sdu.edu.cn

**文章编号**:1671-9352(2025)12-0094-09 DOI:10.6040/j.issn.1671-9352.0.2024.009

# $\mathbf{R}^n$ 中凸体的平均曲率积分不等式

兰雨,冉启伟,曾春娜*
(重庆师范大学数学科学学院, 重庆 401331)

**摘要**:通过运用凸函数的积分不等式获得了凸体的第 $i$ 阶平均曲率积分任意次幂的估计,进而获得 Chen 不等式和 Ros 不等式的加强形式,并对 Willmore 不等式及 Ros 不等式进行了推广并获得了曲率熵不等式的上界估计。

**关键词**:平均曲率积分不等式;Ros 不等式;概率空间;Willmore 不等式
**中图分类号**:O186 **文献标志码**:A
**引用格式**:兰雨,冉启伟,曾春娜. $\mathbf{R}^n$ 中凸体的平均曲率积分不等式[J]. 山东大学学报(理学版),2025,60(12):94-102.

# On integral inequalities of mean curvature for convex bodies in $\mathbf{R}^n$

LAN Yu, RAN Qiwei, ZENG Chunna*
(School of Mathematical Sciences, Chongqing Normal University, Chongqing 401331, China)

**Abstract**: By applying integral inequalities for convex functions we obtain an estimate of the $i$-th order mean curvature integral powers of a convex body, thereby a strengthened form of Chen and Ros inequalities are given. Further more, by means of these obtained conclusions, we obtain the strengther form of Willmore inequality and Ross inequality, and an upper bound estimate for the curvature entropy inequality.

**Key words**: mean curvature integral inequality; Ros inequality; probability space; Willmore inequality

## 1 引言与预备知识

设 $\mathbf{R}^n$ 为 $n$ 维欧氏空间,标准内积记为$\langle \cdot \rangle$。记$\mathscr{H}^k$为 $\mathbf{R}^n$ 中 $k$ 维 Hausdorff 测度。若 $M$ 为 $k$ 维平面或 $k$ 维球面 $S^k$ 的子集,则 $M$ 在 $\mathbf{R}^n$ 中的 $k$ 维 Lebesgue 测度与在 $k$ 维球面 $S^k$ 的 Lebesgue 测度一致,记作 $\mathscr{H}^k(M)$。

Gage[1]在研究 $\mathbf{R}^2$ 中闭凸曲线在单位速度外法向流的演化问题时,获得了一个涉及曲率平方的积分不等式,即为著名的 Gage 等周不等式,具体描述如下:设 $K$ 为 $\mathbf{R}^2$ 中边界光滑的紧致闭凸集,其曲率为 $\kappa$,面积及周长分别为 $A$、$L$,则

$$\int_{\partial K}\kappa^2\mathrm{d}s\geqslant\frac{\pi L}{A},\tag{1}$$

其中 $\kappa$ 为 $K$ 的边界曲线$\partial K$ 的曲率,等号成立当且仅当$\partial K$ 为圆周。

Green 等[2]在文献[1]的基础上得到了 Gage 等周不等式的更一般形式,具体表达式为

$$\int_{\partial K}\kappa^n\mathrm{d}s\geqslant f(L,A),\tag{2}$$

即曲率幂积分的下界可以由涉及曲线的长度及所围面积的函数来估计。特别地,当 $n=2$ 时,式(2)即为著名的 Gage 等周不等式。当 $n=3,4$ 时,其表达式分别为

**收稿日期**:2024-01-05; **网络出版时间**:2024-12-19 10:59:41
**基金项目**:重庆英才青年拔尖计划(CQYC2021059145);重庆市教育委员会科学技术研究项目(KJZD-K202200509);重庆市自然科学基金面上项目(CSTB2024NSCQ-MSX0937)
**第一作者**:兰雨(2001— ),女,硕士研究生,研究方向为积分几何与凸几何分析. E-mail:2548201157@qq.com
*通信作者:曾春娜(1983— ),女,教授,硕士生导师,研究方向为积分几何与凸几何分析. E-mail:zengchn@163.com

$$\int_{\partial K}\kappa^3\mathrm{d}s\geqslant\frac{\pi L^2-2\pi^2A}{A^2};$$

$$\int_{\partial K}\kappa^4\mathrm{d}s\geqslant\frac{\pi L^3-3\pi^2AL}{A^3},$$

此类不等式称为 Green-Osher 不等式,证明及推广参见文献[2-6]。

在 $\mathbf{R}^3$ 中,曲面的平均曲率 $H$ 与高斯曲率 $\kappa$ 为备受关注的几何量。关于这方面有著名的 Gauss-Bonnet 定理与 Willmore 定理,其中,Gauss-Bonnet 定理表明[7],若 $M$ 为 $\mathbf{R}^3$ 中的紧致曲面且与球面同胚,则

$$\int_M\kappa\mathrm{d}\mathscr{H}^2\geqslant4\pi,$$

等号成立当且仅当 $M$ 为 $\mathbf{R}^3$ 中球面。

Willmore 定理表明[8],若 $M$ 为 $\mathbf{R}^3$ 中的紧致曲面,且其平均曲率处处为正,则

$$\int_M H^2\mathrm{d}\mathscr{H}^2\geqslant4\pi,$$

等号成立当且仅当 $M$ 为 $\mathbf{R}^3$ 中球面。

在高维欧氏空间 $\mathbf{R}^n(n\geqslant3)$ 中,若 $M$ 为 $\mathbf{R}^n$ 中的紧致超曲面,Gauss-Bonnet 定理表明

$$\int_M\kappa\mathrm{d}\mathscr{H}^{n-1}\geqslant nV(B_n),$$

其中 $B_n$ 为以原点为中心的 $n$ 维欧氏单位球。等号成立当且仅当 $M$ 为 $\mathbf{R}^n$ 中球面。

Chen[9-10]给出了以下推广的 Willmore 定理及完整证明。

**命题 1**(Chen 不等式)[9-10]　若 $M$ 为 $\mathbf{R}^n$ 中的紧致超曲面,$H$ 为 $M$ 的平均曲率,则

$$\int_M H^{n-1}\mathrm{d}\mathscr{H}^{n-1}\geqslant nV(B_n),\tag{3}$$

其中,$B_n$ 为以原点为中心的 $n$ 维欧氏单位球,$V(\cdot)$表示体积即 Lebesgue 测度。等号成立当且仅当 $M$ 为 $\mathbf{R}^n$ 中球面。

Ros 研究平均曲率倒数的积分不等式,获得如下 Ros 定理。

**命题 2**(Ros 不等式)[11]　若 $M$ 为 $\mathbf{R}^n$ 中的紧致超曲面,$H$ 为 $M$ 的平均曲率,则

$$\int_M\frac{1}{H}\mathrm{d}\mathscr{H}^{n-1}\geqslant nV(M),\tag{4}$$

等号成立当且仅当 $M$ 为 $\mathbf{R}^n$ 中球面。

有关 Ros 不等式的详细证明及各种加强形式参见文献[11-13]。

设 $M$ 为 $\mathbf{R}^n$ 中的紧致超曲面,其具有 $n-1$ 个主曲率,其初等对称函数构成了 $M$ 的第 $i$ 阶平均曲率 $H_i$,$i=1,\cdots,n-1$。受上述 Chen 定理和 Ros 定理的启发,分别对 $\int_M H_i^\alpha\mathrm{d}\mathscr{H}^{n-1}$ 和 $\int_M\frac{1}{H_i^\alpha}\mathrm{d}\mathscr{H}^{n-1}$ 型积分的上下界进行估计,其中 $\alpha\in\mathbf{N}$。

本文主要对凸体的第 $i$ 阶平均曲率积分进行上下界估计,并获得了 Chen 不等式和 Ros 不等式的加强形式,得到了以下结果。

**定理 1**　设 $K\in\mathscr{K}_0^n$ 且 $K\in C_+^2$,$H_i$ 为$\partial K$ 的第 $i$ 阶平均曲率,$W_i$ 为 $K$ 的第 $i$ 阶均质积分。对任意的 $\alpha\in\mathbf{N}$,$i=0,\cdots,n-1$,有

$$\int_{\partial K}H_i^{\alpha+1}\mathrm{d}\mathscr{H}^{n-1}\geqslant\frac{nW_{i+1}^{\alpha+1}}{W_1^\alpha}+(2^\alpha-1)nW_1\eta_{i,0}^{\alpha+1},\tag{5}$$

$$\int_{\partial K}\frac{1}{H_i^\alpha}\mathrm{d}\mathscr{H}^{n-1}\geqslant\frac{nW_1^{\alpha+1}}{W_{i+1}^\alpha}+(2^\alpha-1)nW_{i+1}\eta_{i,i}^{\alpha+1},\tag{6}$$

等号成立当且仅当 $K=B_n$。

特别地,令 $i=1$, $\alpha=n-2$,式(3)为 Chen 不等式(3)的加强形式,见本文推论 1 中式(19);令 $i=1$, $\alpha=1$,式(6)为 Ros 不等式(4)的加强形式,即推论 1 中式(20)。

注　在定理 1 中,当 $i=1$、$\alpha=1$ 时,式(5)即为加强形式的 Willmore 不等式。

**定理 2** 设 $K\in\mathscr{K}_0^n$ 且 $K\in C_+^2$, $H$ 为$\partial K$ 的平均曲率,$W_i$ 为 $K$ 的第 $i$ 阶均质积分,则

$$\int_{\partial K} H^2 \mathrm{d}\mathscr{H}^{n-1} \geqslant nW_3+nW_1\eta_{1,0}^2, \tag{7}$$

其中 $\eta_{j,k}$的定义详见式(15)。等号成立当且仅当 $K=B_n$。

因为 $nW_1\eta_{1,0}^2\geqslant 0$,可知是式(7)的下界估计强于下列结论。

**推论 1** (Zhou)[14] 设 $K\in\mathscr{K}_0^n$ 且 $K\in C_+^2$, $H$ 为$\partial K$ 的平均曲率,$W_i$ 为 $K$ 的第 $i$ 阶均质积分,则

$$\int_{\partial K} H^2 \mathrm{d}\mathscr{H}^{n-1} \geqslant nW_3,$$

等号成立当且仅当 $K=B_n$。

在定理 1 中,当 $i=1$, $\alpha=1$ 时,式(6)即为下列加强形式的 Ros 不等式。

**定理 3** 设 $K\in\mathscr{K}_0^n$ 且 $K\in C_+^2$,$H$ 为$\partial K$ 的平均曲率,$A$ 为 $K$ 的面积,$W_i$ 为 $K$ 的第 $i$ 阶均质积分,则

$$\int_{\partial K} \frac{1}{H}\mathrm{d}\mathscr{H}^{n-1} \geqslant \frac{A^2}{nW_2}+nW_2\eta_{1,1}^2, \tag{8}$$

其中 $\eta_{j,k}$的定义详见式(15)。等号成立当且仅当 $K=B_n$。

鉴于 $nW_2\eta_{1,1}^2\geqslant 0$,可知式(8)的下界估计加强了文献[12]中的结论。

**推论 2**[12] 设 $K\in\mathscr{K}_0^n$ 且 $K\in C_+^2$, $H$ 为$\partial K$ 的平均曲率,$A$ 为 $K$ 的面积,$W_i$ 为 $K$ 的第 $i$ 阶均质积分,则

$$\int_{\partial K} \frac{1}{H}\mathrm{d}\mathscr{H}^{n-1} \geqslant \frac{A^2}{nW_2},$$

等号成立当且仅当 $K=B_n$。

**定理 4** 设 $K\in\mathscr{K}_0^n$ 且 $K\in C_+^2$, $H_i$ 为$\partial K$ 的第 $i$ 阶平均曲率,$W_i$ 为 $K$ 的第 $i$ 阶均质积分,$i=0,1,\cdots,n-1$。对任意的 $0\leqslant\alpha\leqslant 1$, $\beta>1$, $\gamma>0$,则

$$\int_{\partial K} H_i^{\alpha}\mathrm{d}\mathscr{H}^{n-1} \leqslant \frac{nW_{i+1}^{\alpha}}{W_1^{\alpha-1}}, \tag{9}$$

$$\int_{\partial K} H_i^{\beta}\mathrm{d}\mathscr{H}^{n-1} \geqslant \frac{nW_{i+1}^{\beta}}{W_1^{\beta-1}}, \tag{10}$$

$$\int_{\partial K} \frac{1}{H_i^{\gamma}}\mathrm{d}\mathscr{H}^{n-1} \geqslant \frac{nW_1^{\gamma+1}}{W_{i+1}^{\gamma}}, \tag{11}$$

等号成立当且仅当 $K=B_n$。

记 $\mathscr{K}^n$为 $\mathbf{R}^n$ 中全体凸体的集合,$\mathscr{K}_0^n$ 为 $\mathbf{R}^n$ 中包含原点在内部的凸体集合,其体积($n$ 维 Lebesgue 测度)记为 $V(K)$。若 $K\in\mathscr{K}_0^n$且满足二阶连续可微,则称 $K\in C^2$。进一步,若 $K\in C^2$,且满足高斯映射$\nu_k:\partial K\to S^{n-1}$,将边界点 $x\in\partial K$ 映射到 $K$ 在 $x$ 处的(唯一)法向量,该映射是一个微分同胚,则称 $K\in C_+^2$。此时,$\partial K$ 有 $n-1$ 个主曲率,记为 $k_1,\cdots,k_{n-1}$,则

$$H_i=\frac{1}{\binom{n-1}{i}}\sum_{1\leqslant j_1<\cdots<j_i\leqslant n-1} k_{j_1}\cdots k_{j_i}, \quad i=1,\cdots,n-1,$$

其中 $H_i$ 为$\partial K$ 的第 $i$ 阶平均曲率。特别地,$H_0=1$, $H_1=H$ 为经典的平均曲率,$H_{n-1}=\kappa$ 为高斯曲率。

设 $K\in\mathscr{K}^n$,$K$ 的支撑函数 $h_K(u)=\sup_{x\in K}\langle x,u\rangle$, $u\in\mathbf{R}^n$,令

$$q_K(x)=h_K(\nu_K(x))=\langle x,\nu_K(x)\rangle, \quad x\in\partial K。$$

当 $i=1,\cdots,n-1$ 时,由 Minkowski 积分公式[15],有

$$W_i(K)=\frac{1}{n}\int_{\partial K} H_{i-1}\mathrm{d}\mathscr{H}^{n-1}=\frac{1}{n}\int_{\partial K} q_K H_i \mathrm{d}\mathscr{H}^{n-1}, \tag{12}$$

注意到

$$V(K)=W_0=\frac{1}{n}\int_{\partial K} q_K H_0\mathrm{d}\mathscr{H}^{n-1}=\frac{1}{n}\int_{\partial K} q_K\mathrm{d}\mathscr{H}^{n-1}。$$

在文献[16]中,若 $K\in\mathscr{K}_0^n$, $\lambda\in\mathbf{R}$ 为非负实数,Steiner 得到了 Minkowski 加法 $K+\lambda B_n$ 的混合体积,即下

列关于 $\lambda$ 的 $n$ 次多项式，

$$V(K+\lambda B_n)=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}W_i(K)\lambda^i,$$

称为 $K$ 的 Steiner 公式。其中，$W_i(K)$ 为 $K$ 的第 $i$ 阶均质积分，也是通常定义下的混合体积的特殊情况[15]。特别地，$W_0(K)=V(K)$ 为凸体 $K$ 的体积，$nW_1(K)=A(K)$ 为曲面面积。此外，$W_n(K)=V(B_n)$ 为单位球的体积。

在概率空间$(\Omega,P)$中，设 $\rho:\Omega\to\mathbf{R}$ 为概率空间上的可积函数，$\rho$ 的期望为

$$E\rho=\int_{\Omega}\rho(\omega)\,\mathrm{d}P(\omega)。\tag{13}$$

为了证明文中的主要定理，需要引入下列概念。

**定义 1**[17]　若 $K\in\mathscr{K}_0^n$，则 $K$ 的外半径 $\bar{R}(K)$ 与内半径 $\bar{r}$ 分别为

$$\bar{R}(K)=\min\{R>0:K\subseteq RB_n\}=\max\{\|x\|:x\in\partial K\},$$

$$\bar{r}(K)=\max\{r\geqslant 0:rB_n\subseteq K\}=\min\|x\|:x\in\partial K\},$$

显然，$\bar{R}(K)-\bar{r}(K)$ 不是平移不变量。由于 $K$ 为紧凸集，则存在一个点 $c_K$，满足

$$\bar{R}(K-c_K)-\bar{r}(K-c_K)=\min\ \bar{R}(K-t)-\bar{r}(K-t):t\in K\}。$$

其中，点 $c_K$ 是最小环的中心，即由包含$\partial K$ 的半径差的最小值而唯一决定的环。记 $\omega_a(K):=\bar{R}(K-c_K)-\bar{r}(K-c_K)$为 $K$ 的最小环的宽度。注意到，$K-c_K$ 的内半径和外半径不一定与经典的内接圆半径和外接圆半径一致。

由于 $\bar{r}B_n\subseteq K$, $K\subseteq\bar{R}B_n$，则内外半径与均质积分满足

$$\bar{r}(K)W_{i+1}(K)\leqslant W_i(K)\leqslant\bar{R}(K)W_{i+1}(K),\tag{14}$$

其中 $i=0,1,\cdots,n-1$。式(14)是混合体积单调性的直接结果[15]。

为简化主要定理的叙述与证明过程，引入下列符号，当 $1\leqslant j\leqslant n-1$, $0\leqslant k\leqslant n-1$ 时，记

$$\eta_{j,k}=\begin{cases}\dfrac{W_1(K)W_j(K)-W_0(K)W_{j+1}(K)}{W_{k+1}(K)^2\omega_a(K)}, & K\neq rB_n,\ r>0;\\[2ex] 0, & K=rB_n,\ r>0。\end{cases}\tag{15}$$

根据 Aleksandrov-Fenchel 不等式可知

$$W_i(K)W_j(K)\geqslant W_{i-1}(K)W_{j+1}(K),\quad 1\leqslant i\leqslant j\leqslant n-1,\tag{16}$$

式(16)确保了 $\eta_{j,k}$的非负性。

文献[17]给出了如下形式的曲率积分不等式。

**引理 1**[17]　设 $K\in\mathscr{K}_0^n$ 且 $K\in C_+^2$，$H_i$ 为$\partial K$ 的第 $i$ 阶平均曲率，若凸函数 $F(x)$满足 $F:I\to\mathbf{R}$, $I\subseteq\mathbf{R}$。当 $i=0,1,\cdots,n-1$ 时，

$$\int_{\partial K}(F\circ H_i)\,\mathrm{d}\mathscr{H}^{n-1}\geqslant nW_1\frac{F\left(\dfrac{W_{i+1}}{W_1}+\eta_{i,0}\right)+F\left(\dfrac{W_{i+1}}{W_1}-\eta_{i,0}\right)}{2},\tag{17}$$

$$\int_{\partial K}\left(F\circ\frac{1}{H_i}\right)H_i\,\mathrm{d}\mathscr{H}^{n-1}\geqslant nW_{i+1}\frac{F\left(\dfrac{W_1}{W_{i+1}}+\eta_{i,i}\right)+F\left(\dfrac{W_1}{W_{i+1}}-\eta_{i,i}\right)}{2},\tag{18}$$

等号成立当且仅当 $K=B_n$。

**引理 2**[18]　设 $x\geqslant a\geqslant 0$, $n\in\mathbf{N}^+$，有

$$(x+a)^n+(x-a)^n\geqslant 2[x^n+(2^{n-1}-1)a^n]。$$

## 2　主要定理及证明

**定理 1 的证明**　根据引理 1，因 $F(x)=x^{\alpha+1}$, $\alpha\geqslant 0$ 为凸函数，则

$$\begin{aligned}\int_{\partial K} H_i^{\alpha+1}\mathrm{d}\mathscr{H}^{n-1} &\geqslant \frac{nW_1}{2}\left[\frac{(W_{i+1}+W_1\eta_{i,0})^{\alpha+1}+(W_{i+1}-W_1\eta_{i,0})^{\alpha+1}}{W_1^{\alpha+1}}\right]\\ &=\frac{n}{2W_1^{\alpha}}[(W_{i+1}+W_1\eta_{i,0})^{\alpha+1}+(W_{i+1}-W_1\eta_{i,0})^{\alpha+1}]\\ &\geqslant\frac{n}{2W_1^{\alpha}}\cdot 2[W_{i+1}^{\alpha+1}+(2^{\alpha}-1)W_1^{\alpha+1}\eta_{i,0}^{\alpha+1}]\\ &=\frac{nW_{i+1}^{\alpha+1}}{W_1^{\alpha}}+n(2^{\alpha}-1)\cdot W_1\eta_{i,0}^{\alpha+1}。\end{aligned}$$

其中第 3 步源于引理 2,故

$$\int_{\partial K} H_i^{\alpha+1}\mathrm{d}\mathscr{H}^{n-1}\geqslant\frac{nW_{i+1}^{\alpha+1}}{W_1^{\alpha}}+(2^{\alpha}-1)nW_1\eta_{i,0}^{\alpha+1}。$$

由引理 2,取 $F(x)=x^{\alpha+1}$,则

$$\begin{aligned}\int_{\partial K}\frac{1}{H_i^{\alpha}}\mathrm{d}\mathscr{H}^{n-1} &\geqslant\frac{nW_{i+1}}{2}\left[\frac{(W_1+W_{i+1}\eta_{i,i})^{\alpha+1}+(W_1-W_{i+1}\eta_{i,i})^{\alpha+1}}{W_{i+1}^{\alpha+1}}\right]\\ &=\frac{n}{2W_{i+1}^{\alpha}}[(W_1+W_{i+1}\eta_{i,i})^{\alpha+1}+(W_i-W_{i+1}\eta_{i,i})^{\alpha+1}]\\ &\geqslant\frac{n}{2W_{i+1}^{\alpha}}\cdot 2[W_1^{\alpha+1}+(2^{\alpha}-1)W_{i+1}^{\alpha+1}\eta_{i,i}^{\alpha+1}]\\ &=\frac{nW_1^{\alpha+1}}{W_{i+1}^{\alpha}}+n(2^{\alpha}-1)\ \cdot\ W_{i+1}\eta_{i,i}^{\alpha+1},\end{aligned}$$

故

$$\int_{\partial K}\frac{1}{H_i^{\alpha}}\mathrm{d}\mathscr{H}^{n-1}\geqslant\frac{nW_1^{\alpha+1}}{W_{i+1}^{\alpha}}+(2^{\alpha}-1)nW_{i+1}\eta_{i,i}^{\alpha+1}。$$

注意到

$$\frac{nW_{i+1}^{\alpha+1}}{W_1^{\alpha}}+(2^{\alpha}-1)nW_1\eta_{i,0}^{\alpha+1}\geqslant\frac{nW_{i+1}^{\alpha+1}}{W_1^{\alpha}},$$
$$\frac{nW_1^{\alpha+1}}{W_{i+1}^{\alpha}}+(2^{\alpha}-1)nW_{i+1}\eta_{i,i}^{\alpha+1}\geqslant\frac{nW_1^{\alpha+1}}{W_{i+1}^{\alpha}}。$$

特别地,令 $i=1$、$\alpha=n-2$ 或 $\alpha=1$,可得到下列推论。

**推论 1** 设 $K\in\mathscr{K}_0^n$ 且 $K\in C_+^2$,则

$$\int_{\partial K}H^{n-1}\mathrm{d}\mathscr{H}^{n-1}\geqslant\frac{nW_2^{n-1}}{W_1^{n-2}},\tag{19}$$

$$\int_{\partial K}\frac{1}{H}\mathrm{d}\mathscr{H}^{n-1}\geqslant\frac{nW_1^2}{W_2},\tag{20}$$

等号成立当且仅当 $K=B_n$。

注意到,根据 Aleksandrov-Fenchel 不等式

$$W_j^{k-i}\geqslant W_i^{k-j}W_k^{j-i}(0\leqslant i<j<k\leqslant n),$$

有

$$\frac{nW_2^{n-1}}{W_1^{n-2}}\geqslant nW_n=nV(B_n),$$

可得到下列著名的 Chen 不等式。

**推论 2** (Chen 不等式)[9-10] 设$\partial K$为 $\mathbf{R}^n$ 中一凸体 $K$ 的紧致超曲面,记 $H$ 为$\partial K$的平均曲率,当 $i=1,\cdots,n-1$ 时,则

$$\int_{\partial K} H^{n-1} \mathrm{d}\mathscr{H}^{n-1} \geqslant nV(B_n),$$

等号成立当且仅当 $K=B_n$。

注意到

$$\frac{nW_1^2}{W_2} \geqslant nW_0 = nV(K),$$

可得到 Ros 不等式。

**推论 3**（Ros 不等式）[11]　设$\partial K$ 为 $\mathbf{R}^n$ 中一凸体 $K$ 的紧致超曲面，记 $H$ 为$\partial K$ 的平均曲率，当 $i=1,\cdots,n-1$时，则

$$\int_{\partial K} \frac{1}{H} \mathrm{d}\mathscr{H}^{n-1} \geqslant nV(K),$$

等号成立当且仅当 $K=B_n$。

**定理 2 的证明**　在式(5)中，令 $\alpha=1$，$i=1$，结合 Alexandrov-Fenchel 不等式，则

$$\int_{\partial K} H^2 \mathrm{d}\mathscr{H}^{n-1} \geqslant \frac{nW_2^2}{W_1} + nW_1\eta_{1,0}^2 = \frac{n^2W_2^2}{A} + nW_1\eta_{1,0}^2。$$

由于 $nW_1\eta_{1,0}^2 \geqslant 0$，可知

$$\frac{nW_2^2}{W_1} + nW_1\eta_{1,0}^2 \geqslant nW_3 + nW_1\eta_{1,0}^2 \geqslant nW_3,$$

可得到

$$\int_{\partial K} H^2 \mathrm{d}\mathscr{H}^{n-1} \geqslant nW_3 + nW_1\eta_{1,0}^2。$$

由定理 2 及 $nW_1\eta_{1,0}^2$的非负性可获得推论 4。此外，作为定理 2 的直接推论，当 $n=3$ 时，有

**推论 4**　设 $K \in \mathscr{K}_0^3$ 且 $K \in C_+^2$，$H$ 为$\partial K$ 的平均曲率，$A$ 为 $K$ 的面积，$W_i$ 为 $K$ 的第 $i$ 阶均质积分，则

$$\int_{\partial K} H^2 \mathrm{d}\mathscr{H}^2 \geqslant \frac{9W_2^2}{A} + 3W_1\eta_{1,0}^2 \geqslant 3W_3 = 4\pi,$$

等号成立当且仅当 $K=B_3$。

**定理 3 的证明**　在式(6)中，令 $\alpha=1$，$i=1$，则

$$\int_{\partial K} \frac{1}{H} \mathrm{d}\mathscr{H}^{n-1} \geqslant \frac{nW_1^2}{W_2} + nW_2\eta_{1,1}^2 = \frac{A^2}{nW_2} + nW_2\eta_{1,1}^2,$$

由于 $nW_2\eta_{1,1}^2 \geqslant 0$，可知

$$\frac{A^2}{nW_2} + nW_2\eta_{1,1}^2 \geqslant \frac{A^2}{nW_2},$$

可得

$$\int_{\partial K} \frac{1}{H} \mathrm{d}\mathscr{H}^{n-1} \geqslant \frac{A^2}{nW_2} + nW_2\eta_{1,1}^2。$$

因为 $nW_2\eta_{1,1}^2$的非负性，可得推论。作为定理 3 的直接推论，当 $n=3$ 时，有

**推论 5**　设 $K \in \mathscr{K}_0^3$ 且 $K \in C_+^2$，$H$ 为$\partial K$ 的平均曲率，$A$ 为 $K$ 的面积，$W_i$ 为 $K$ 的第 $i$ 阶均质积分，则

$$\int_{\partial K} \frac{1}{H} \mathrm{d}\mathscr{H}^2 \geqslant \frac{A^2}{3W_2} + 3W_2\eta_{1,1}^2 \geqslant 3V,$$

等号成立当且仅当 $K=B_3$。

**定理 4 的证明**　在概率空间$(\Omega,P)$中，若凹函数 $F(x)$满足 $F:I\to\mathbf{R}$，$I\subseteq\mathbf{R}$。根据式(13)得

$$E(F\circ\rho) = \int_\Omega F\circ\rho \mathrm{d}P(\omega)。$$

运用 Jensen 不等式，得

$$\int_\Omega F\circ\rho \mathrm{d}P(\omega) \leqslant F\left(\int_\Omega \rho \mathrm{d}P(\omega)\right)。\tag{21}$$

在概率空间 $\left(\partial K,\dfrac{\mathscr{H}^{n-1}}{nW_1}\right)$中，令 $\rho=H_i$，在$(0,+\infty)$上分别取 $F(x)=x^{\alpha}$，$F(x)=-x^{\beta}$，$F(x)=-\dfrac{1}{x^{\gamma}}$，代入式(21)，$0\leqslant\alpha\leqslant1$，$\beta>1$，$\gamma>0$，则

$$\int_{\partial K}H_i^{\alpha}\mathrm{d}\left(\frac{\mathscr{H}^{n-1}}{nW_1}\right)\leqslant\left(\int_{\partial K}H_i\mathrm{d}\left(\frac{\mathscr{H}^{n-1}}{nW_1}\right)\right)^{\alpha}=\left(\frac{\int_{\partial K}H_i\mathrm{d}\mathscr{H}^{n-1}}{nW_1}\right)^{\alpha}$$

$$=\left(\frac{nW_{i+1}}{nW_1}\right)^{\alpha}=\frac{W_{i+1}^{\alpha}}{W_1^{\alpha}},$$

故

$$\int_{\partial K}H_i^{\alpha}\mathrm{d}\mathscr{H}^{n-1}\leqslant\frac{nW_{i+1}^{\alpha}}{W_1^{\alpha-1}}。\tag{22}$$

又

$$-\int_{\partial K}H_i^{\beta}\mathrm{d}\left(\frac{\mathscr{H}^{n-1}}{nW_1}\right)\leqslant-\left(\int_{\partial K}H_i\mathrm{d}\left(\frac{\mathscr{H}^{n-1}}{nW_1}\right)\right)^{\beta}=-\left(\frac{\int_{\partial K}H_i\mathrm{d}\mathscr{H}^{n-1}}{nW_1}\right)^{\beta}$$

$$=-\left(\frac{nW_{i+1}}{nW_1}\right)^{\beta}=-\frac{W_{i+1}^{\beta}}{W_1^{\beta}},$$

故

$$\int_{\partial K}H_i^{\beta}\mathrm{d}\mathscr{H}^{n-1}\geqslant\frac{nW_{i+1}^{\beta}}{W_1^{\beta-1}}。\tag{23}$$

又

$$-\int_{\partial K}\frac{1}{H_i^{\gamma}}\mathrm{d}\left(\frac{\mathscr{H}^{n-1}}{nW_1}\right)\leqslant-\frac{1}{\left(\int_{\partial K}H_i\mathrm{d}\left(\frac{\mathscr{H}^{n-1}}{nW_1}\right)\right)^{\gamma}}=-\frac{1}{\left(\frac{\int_{\partial K}H_i\mathrm{d}\mathscr{H}^{n-1}}{nW_1}\right)^{\gamma}}$$

$$=-\frac{1}{\left(\frac{nW_{i+1}}{nW_1}\right)^{\gamma}}=-\frac{W_1^{\gamma}}{W_{i+1}^{\gamma}},$$

故

$$\int_{\partial K}\frac{1}{H_i^{\gamma}}\mathrm{d}\mathscr{H}^{n-1}\geqslant\frac{nW_1^{\gamma+1}}{W_{i+1}^{\gamma}}。$$

**推论 6** 设 $K\in\mathscr{K}_0^n$ 且 $K\in C_+^2$，$H_i$ 为$\partial K$的第 $i$ 阶平均曲率，$W_i$ 为 $K$ 的第 $i$ 阶均质积分。当 $i=0,\cdots,n-1$ 时，则

$$\int_{\partial K}\frac{1}{\sqrt[n]{H_i}}\mathrm{d}\mathscr{H}^{n-1}\leqslant nW_1^{1-\frac{1}{n}}(W_{i+1}+W_1\eta_{i,0})^{\frac{1}{n}},\tag{24}$$

$$\int_{\partial K}\sqrt[n]{H_i}\,\mathrm{d}\mathscr{H}^{n-1}\leqslant nW_1\sqrt[n]{\frac{W_{i+1}}{W_1}},\tag{25}$$

等号成立当且仅当 $K=B_n$。

**证明** 由引理1，设 $F(x)=-\sqrt[n]{x}$，则

$$\int_{\partial K}\frac{1}{\sqrt[n]{H_i}}\mathrm{d}\mathscr{H}^{n-1}\leqslant\frac{nW_1}{2}\left[\left(\frac{W_{i+1}}{W_1}+\eta_{i,0}\right)^{\frac{1}{n}}+\left(\frac{W_{i+1}}{W_1}-\eta_{i,0}\right)^{\frac{1}{n}}\right]$$

$$\leqslant\frac{nW_1}{2}\cdot2\frac{(W_{i+1}+W_1\eta_{i,0})^{\frac{1}{n}}}{W_1^{\frac{1}{n}}}$$

$$=nW_1^{1-\frac{1}{n}}(W_{i+1}+W_1\eta_{i,0})^{\frac{1}{n}}。$$

在概率空间$\left(\partial K,\dfrac{\mathscr{H}^{n-1}}{nW_1}\right)$中,令 $F(x)=\sqrt[n]{x}$, $\rho=H_i$ 代入式(21)中,则

$$\int_{\partial K}\sqrt[n]{H_i}\,\mathrm{d}\mathscr{H}^{n-1}\leqslant nW_1\sqrt[n]{\frac{\int_{\partial K}H_i\mathrm{d}\mathscr{H}^{n-1}}{nW_1}}=nW_1\sqrt[n]{\frac{nW_{i+1}}{nW_1}}=nW_1\sqrt[n]{\frac{W_{i+1}}{W_1}}。$$

文献[19-20]对曲率的熵不等式做了下界估计。

**推论 7**[19]　设具有光滑边界$\partial K$ 的凸体 $K\in\mathscr{K}^n$, $\kappa(K)$为 $K$ 的高斯曲率,满足 $V(K)=V(B_n)$,则

$$\int_{\partial K}\kappa(K)\log\kappa(K)\,\mathrm{d}S_K\geqslant 0,$$

其中,$\mathrm{d}S_K$ 为$\partial K$ 的表面积,等号成立当且仅当 $K=B_n$。

**推论 8**[20]　设 $K\in\mathscr{K}^n$是关于原点对称的严格凸体,$K\in C^2$且 $K$ 的 Santaló 点在原点,满足 $V(K)=V(B_n)$,则

$$\int_{\partial K}\kappa(K)\log\kappa(K)\,\mathrm{d}S_K\geqslant 0,$$

其中,$\mathrm{d}S_K$ 为$\partial K$ 的表面积,$\kappa(K)$为 $K$ 的高斯曲率,等号成立当且仅当 $K=B_n$。

特别地,在式(21)中取 $F(x)=\log x$,可得

**推论 9**(曲率熵不等式)　设 $K\in\mathscr{K}_0^n$且 $K\in C_+^2$, $\kappa(K)$为$\partial K$ 的高斯曲率,则

$$\int_{\partial K}\kappa(K)\log\kappa(K)\,\mathrm{d}S_K\leqslant nW_1\log\left(\frac{W_n}{W_1}\right),\tag{26}$$

等号成立当且仅当 $K=B_n$。

**证明**　在概率空间$\left(\partial K,\dfrac{\mathscr{H}^{n-1}}{nW_1}\right)$中,在式(21)中,取 $F(x)=\log x$, $\rho=H_{n-1}=\kappa$,则

$$\int_{\partial K}\log\kappa\mathrm{d}\left(\frac{\mathscr{H}^{n-1}}{nW_1}\right)\leqslant\log\left(\int_{\partial K}\kappa\mathrm{d}\left(\frac{\mathscr{H}^{n-1}}{nW_1}\right)\right)=\log\left(\frac{\int_{\partial K}\kappa\mathrm{d}\mathscr{H}^{n-1}}{nW_1}\right)=\log\left(\frac{nW_n}{nW_1}\right)=\log\left(\frac{W_n}{W_1}\right),$$

即

$$\int_{\partial K}\log\kappa\,\mathrm{d}\mathscr{H}^{n-1}\leqslant nW_1\log\left(\frac{W_n}{W_1}\right)。$$

注意到$\dfrac{1}{\kappa}\mathrm{d}\mathscr{H}^{n-1}=\mathrm{d}S_K$,则

$$\int_{\partial K}\frac{1}{\kappa}\cdot\kappa\log\kappa\,\mathrm{d}\mathscr{H}^{n-1}\leqslant nW_1\log\left(\frac{W_n}{W_1}\right),$$

即

$$\int_{\partial K}\kappa\log\kappa\,\mathrm{d}S_K\leqslant nW_1\log\left(\frac{W_n}{W_1}\right)。$$

**参考文献:**


[1] GAGE M E. An isoperimetric inequality with applications to curveshortening[J]. Duke Mathematical Journal, 1983, 50(4): 1225-1229.

[2] GREEN M, OSHER S. Steiner polynomials, wulff flows, and some new isoperimetric inequalities for convex plane curves[J]. Asian Journal of Mathematics, 1999, 3(3):659-676.

[3] GAO L Y, PAN S L, TSAI D H. Nonlocal flow driven by the radius of curvature with fixed curvature integral[J]. The Journal of Geometric Analysis, 2020, 30(3):2939-2973.

[4] LIN Y C, TSAI D H. Application of Andrews and Green-Osher inequalities to nonlocal flow of convex plane curves[J]. Journal of Evolution Equations, 2012, 12(4):833-854.

[5] YANG Y L. Nonsymmetric extension of the green-osher inequality[J]. Geometriae Dedicata, 2019, 203(1):155-161.
[6] YANG Y L, ZHANG D Y. The green-osher inequality in relativegeometry[J]. Bulletin of the Australian Mathematical Society, 2016, 94(1):155-164.
[7] CARMO M P. Differential geometry of curves and surfaces:revised and updated[M]. 2nd ed. New York: Courier Dover Publications, 2016.
[8] WILLMORE T J. Mean curvature of immersed surfaces[J]. Topics in Differential Geometry, 1976:149-156.
[9] CHEN Bangyen. Geometry of submanifolds and its applications[J]. Science University of Tokyo, 1981:96.
[10] CHEN B Y. On the total curvature of immersed manifolds, I: an inequality of fenchel-borsuk-willmore[J]. American Journal of Mathematics, 1971, 93(1):148-162.
[11] ROS A. Compact hypersurfaces with constant scalar curvature and a congruence theorem[J]. Journal of Differential Geometry, 1988, 27(2):215-220.
[12] 周家足,姜德烁,李明,等. 超曲面的 Ros 定理[J]. 数学学报,2009,52(6):1075-1084.
ZHOU Jiazu, JIANG Deshuo, LI Ming, et al. On Ros' theorem for hypersurfaces[J]. Acta Mathematica Sinica (Chinese Series), 2009, 52(6):1075-1084.
[13] OSSERMAN R. Curvature in the eighties[J]. American Mathematical Monthly, 1990, 97(8):731-736.
[14] ZHOU J Z. On the Willmore' s theorem for convex hypersurfaces[J]. Acta Mathematica Scientia, 2011, 31(2):361-366.
[15] SCHNEIDER R. Convex bodies: the Brunn-Minkowski theory[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2013.
[16] STEINER J. Ueber parallele flächen[J]. Monatsbericht Preuss Akad Wiss, 1840, 2:114-118.
[17] CIFRE M A H, ALONSO-GUTIÉRREZ D. Estimates for the integrals of powered *i*-th mean curvatures[M]//BIANCHI G, COLESANTI A, GRONCHI P, et al. Springer INdAM Series. Cham: Springer International Publishing, 2017:19-37.
[18] GAO Laiyuan, PAN Shengliang, YANG Yunlong. Some notes on Green-Osher' s inequality[J]. Journal of Mathematical Inequalities, 2015(2):369-380.
[19] GUAN P F, NI L. Entropy and a convergence theorem for Gauss curvature flow in high dimension[J]. Journal of the European Mathematical Society, 2017, 19(12):3735-3761.
[20] ZENG C N, DONG X, WANG Y L, et al. The log-Minkowski inequality of curvature entropy for non-symmetric convex bodies[EB/OL]. 2022: 2211.14484. https://arxiv.org/abs/2211.14484v1.

(编辑:祁业卿)

(上接第 74 页)

[13] LI Tao, WANG Qingwen, ZHANG Xinfang. Gl-QFOM and Gl-QGMRES: two efficient algorithms for quaternion linear systems with multiple right-hand sides[EB/OL]. (2023-07-24)[2024-07-11]. http://doi.org/10.48550/arXiv.2308.13214.
[14] RODMAN L. Topics in quaternion linear algebra[M]. Princeton: Princeton University Press, 2014:37.
[15] GHILONI R, MORETTI V, PEROTTI A. Continuous slice functional calculus in quaternionic Hilbert spaces[J]. Reviews in Mathematical Physics, 2013, 25(4):1350006.
[16] BOUYOULI R, JBILOU K, SADAKA R, et al. Convergence properties of some block Krylov subspace methods for multiple linear systems[J]. Journal of Computational Applied Mathematics, 2006, 196(2):498-511.
[17] University of Florida Sparse Matrix Collection web page[EB/OL]. (2011-03-11)[2024-07-11]. https://www.cise.ufl.edu/research/sparse/matrices/list_by_id.html.

(编辑:胡春燕)