文章编号:1671-9352(2025)12-0173-05 DOI:10.6040/j.issn.1671-9352.0.2023.535

Bernoulli 噪声泛函上一类位势算子的谱性质

丁瑞鹤,王才士*,张丽霞
(西北师范大学数学与统计学院, 甘肃 兰州 730070)

摘要:考虑一类作用于 Bernoulli 噪声泛函的自伴算子 N_u,此类算子可解释为某种位势算子。通过 Full-Wiener 积分变换,显式地求出一个与 N_u 酉等价的乘算子,由此进一步得到 N_u 的谱的显式表示;证明在适当条件下 N_u 仅有纯点谱。作为应用,考虑以 N_u 为 Hamiltonian 的量子系统,证明该系统是稳定的。

关键词:Bernoulli 噪声泛函;位势算子;谱性质;权函数
中图分类号:O211.4 **文献标志码**:A
引用格式:丁瑞鹤,王才士,张丽霞. Bernoulli 噪声泛函上一类位势算子的谱性质[J]. 山东大学学报(理学版),2025,60(12):173-177.

Spectral properties of some potential operators on Bernoulli noise functionals

DING Ruihe, WANG Caishi*, ZHANG Lixia
(School of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou 730070, Gansu, China)

Abstract: This paper considers some self-adjoint operators N_u in Bernoulli noise functionals that essentially belong to the category of potential operators. By the Full-Wiener integral transform, the unitarily equivalent multiplication operators are explicitly obtained, and thus the explicit expressions of their spectrums are further obtained. Under some mild conditions, the fact that these operators have only pure point spectra is proved. Finally, in application, the proof that the quantum system with such an operator as the Hamiltonian is stable is proved.

Key words: Bernoulli noise functional; potential operator; spectral property; weight function

0 引言

在量子力学的数学表述中[1],量子系统对应于 Hilbert 空间,其观测则由对应 Hilbert 空间中的自伴算子描述。在此情形下,自伴算子的谱就是它所代表的观测的所有可能值。例如 Schrödinger 算子表示某个量子系统的能量观测,而 Schrödinger 算子的谱就是相应量子系统的能量谱。

作用于 Bernoulli 噪声泛函的湮灭和增生算子$\{\partial_k, \partial_k^* \mid k\geqslant 0\}$满足等时的典则反交换关系,因而是一种量子噪声,称为量子 Bernoulli 噪声[2]。量子 Bernoulli 噪声在许多数学物理问题中都有重要的应用,例如文献[3]将其应用于开放量子系统的不可逆演化问题,构造了相应的量子 Markov 半群;文献[4-5]运用量子 Bernoulli噪声方法研究量子游荡的极限分布和平稳测度的存在性及其特征;此外,文献[6]还运用量子 Bernoulli 噪声方法刻画基于连续时间量子游荡的完美态转移现象。

以 H 表示平方可积 Bernoulli 噪声泛函空间,则量子 Bernoulli 噪声$\{\partial_k, \partial_k^* \mid k\geqslant 0\}$为 H 上的一族有界算子,且∂_k 与∂_k^* 互为共轭。为了构造基于 H 的量子 Markov 半群,文献[3]针对非负整数集 $\mathbf{N}$ 上的非负有界函数 u 引入了如下形式的算子:

收稿日期:2023-12-02; **网络出版时间**:2024-12-10 15:55:49
基金项目:国家自然科学基金资助项目(1226108)
第一作者:丁瑞鹤(1993—),女,硕士研究生,研究方向为数理统计学. E-mail:dingrhnwnu@163.com
***通信作者**:王才士(1962—),男,教授,博士生导师,博士,研究方向为随机分析. E-mail:wangcs@nwnu.edu.cn

$$N_u = \sum_{k=0}^{\infty} u(k)\partial_k^* \partial_k, \tag{1}$$

并且展示其正性、自伴性以及所满足的交换关系。本文旨在讨论算子 N_u 的谱结构及其应用。

1 Bernoulli 噪声泛函与量子 Bernoulli 噪声

本章简要回顾关于 Bernoulli 噪声泛函和量子 Bernoulli 噪声的必要概念和事实,详细内容可参考文献[2]等。

本文中,$\mathbf{N}$ 表示非负整数集,$\mathbf{C}$ 表示复数集,Γ 为 $\mathbf{N}$ 的有限幂集,即 $\Gamma=\{\sigma \mid \sigma \subset \mathbf{N},\ \#\sigma<\infty\}$,其中$\#\sigma$ 为集合 σ 的基数。若 T 是 Hilbert 空间中的稠定线性算子,则 Dom T 表示其定义域,T^* 表示其共轭算子。

设$(\Omega,\mathscr{F},P)$是一个给定的概率空间,$Z=(Z_n)_{n\geqslant 0}$是$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的一列独立的随机变量,满足条件

$$P\{Z_n=\varepsilon_n\}=\theta_n, \quad P\left\{Z_n=-\frac{1}{\varepsilon_n}\right\}=1-\theta_n, \quad n\geqslant 0,$$

其中:$(\theta_n)_{n\geqslant 0}$为一列给定的正数,满足 $0<\theta_n<1$; $\varepsilon_n=\sqrt{\dfrac{1-\theta_n}{\theta_n}}$。特别地,$\mathscr{F}=\sigma(Z_n,\ n\in\mathbf{N})$,即 $\mathscr{F}$ 是随机变量序列 $Z=(Z_n)_{n\geqslant 0}$生成的 σ-代数。根据文献[2],$Z=(Z_n)_{n\geqslant 0}$称为$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的(离散时间)Bernoulli 噪声,而概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的复值随机变量则叫做 Bernoulli 噪声泛函。设 H 表示平方可积 Bernoulli 噪声泛函空间,即

$$H=L^2(\Omega,\mathscr{F},P)。\tag{2}$$

以$\langle\cdot,\cdot\rangle$表示空间 H 中的通常内积,并约定$\langle\cdot,\cdot\rangle$关于第 2 个变量线性, $\|\cdot\|$ 为相应的范数。根据文献[7],Z 具有混沌表示性质,从而$\{\mathbf{Z}_\sigma \mid \sigma\in\Gamma\}$构成 H 的标准正交基,其中 $\mathbf{Z}_\varnothing=1$,

$$\mathbf{Z}_\sigma=\prod_{j\in\sigma}\mathbf{Z}_j, \quad \sigma\in\Gamma, \quad \sigma\neq\varnothing。\tag{3}$$

因此 H 是一个无穷维的复 Hilbert 空间。下称$\{\mathbf{Z}_\sigma \mid \sigma\in\Gamma\}$为 H 的典则标准正交基。

根据文献[2],对每个非负整数 $k\geqslant 0$,在空间 H 上存在有界算子$\partial_k:H\to H$,满足 $\|\partial_k\|=1$,且

$$\partial_k\mathbf{Z}_\sigma=1_\sigma(k)\mathbf{Z}_{\sigma\setminus k}, \quad \partial_k^*\mathbf{Z}_\sigma=[1-1_\sigma(k)]\mathbf{Z}_{\sigma\cup k}, \quad \sigma\in\Gamma, \tag{4}$$

其中,∂_k^* 表示∂_k 的共轭算子,$\sigma\setminus k=\sigma\setminus\{k\}$, $\sigma\cup k=\sigma\cup\{k\}$,而 $1_\sigma(k)$表示 σ 作为集合 $\mathbf{N}$ 的子集时的示性函数。

将∂_k^* 和∂_k 分别称为增生算子和湮灭算子,而将算子族$\{\partial_k,\partial_k^* \mid k\geqslant 0\}$称为量子 Bernoulli 噪声。可以证明量子 Bernoulli 噪声满足一种等时典则反交换关系,即

$$\partial_k\partial_l=\partial_l\partial_k, \quad \partial_k^*\partial_l^*=\partial_l^*\partial_k^*, \quad \partial_k^*\partial_l=\partial_l\partial_k^*, \quad l,k\geqslant 0, \quad k\neq l, \tag{5}$$

且

$$\partial_k\partial_k=\partial_k^*\partial_k^*=0, \quad \partial_k\partial_k^*+\partial_k^*\partial_k=I, \tag{6}$$

其中 I 是 H 上的单位算子。

2 主要结果

本章首先显式地求出一个与算子 N_u 酉等价的乘算子,在此基础上进一步得到 N_u 的谱的显式表示。然后探究 N_u 的谱结构,证明在适当条件下 N_u 仅有纯点谱。最后考虑以 N_u 为 Hamiltonian 的量子系统的演化行为。

2.1 算子 N_u 的谱性质

为便于讨论,首先明确算子 N_u 的确切定义。对于一个非负有界函数 $u:\mathbf{N}\to[0,+\infty)$,$N_u$ 是空间 H 中如下定义的线性算子:

$$N_u\xi=\sum_{k=0}^{\infty}u(k)\partial_k^*\partial_k\xi, \quad \xi\in\mathrm{Dom}\,N_u, \tag{7}$$

其中,N_u 的定义域

$$\operatorname{Dom} N_u=\{\xi\in\mathfrak{h}\mid\sum_{k=0}^{\infty}u(k)\partial_k^*\partial_k\xi\ 收敛\}。\tag{8}$$

此处所称的收敛指依空间 H 中的范数收敛。根据量子 Bernoulli 噪声 $\{\partial_k,\partial_k^*\mid k\geqslant0\}$ 的性质可以知道,对于非负有界函数 u,N_u 是 H 中的稠定正算子。引理 1 表明,N_u 还是自伴算子。

引理 1[3]　设 $u:\mathbf{N}\to[0,+\infty)$ 是一个非负有界函数,则

$$N_u=\sum_{\sigma\in\Gamma}\#_u(\sigma)|\mathbf{Z}_\sigma\rangle\langle\mathbf{Z}_\sigma|\tag{9}$$

成立。其中,$\#_u(\sigma)=\sum_{k=0}^{\infty}1_\sigma(k)u(k)$,符号 $|\mathbf{Z}_\sigma\rangle\langle\mathbf{Z}_\sigma|$ 表示与基向量 $\mathbf{Z}_\sigma$ 相联系的 Dirac 算子。

文献[3]中,算子 N_u 被称为 1D-weighted number operator,该算子在量子 Markov 半群的构造问题中有着重要的应用。下面的命题给出了算子 N_u 有界的一个充分必要条件。

命题 1　设 $u:\mathbf{N}\to[0,+\infty)$ 是一个非负有界函数,则 N_u 有界当且仅当 $|u|:=\sum_{k=0}^{\infty}u(k)<\infty$。在此情形下 $\operatorname{Dom} N_u=H$,且 $\|N_u\|=|u|$。

证明　设 $|u|<\infty$,则对每个 $\sigma\in\Gamma$,直接计算可得 $\#_u(\sigma)\leqslant|u|$。结合引理 1 进一步可得

$$\|N_u\xi\|^2=\sum_{\sigma\in\Gamma}(\#_u(\sigma))^2|\langle\mathbf{Z}_\sigma,\xi\rangle|^2\leqslant|u|^2\sum_{\sigma\in\Gamma}|\langle\mathbf{Z}_\sigma,\xi\rangle|^2=|u|^2\|\xi\|^2,\quad\xi\in\operatorname{Dom} N_u。$$

这表明 N_u 是有界的,并且 $\|N_u\|\leqslant|u|$。

反过来,若 N_u 有界,则 $\|N_u\|<\infty$。取 $\sigma_n=1_{N_n}$,其中 $N_n:=\{0,1,\cdots,n\}$。当 $n\to\infty$ 时,有

$$|u|^2=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}u(k)\right)^2=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty}u(k)1_{\sigma_n}(k)\right)^2=\lim_{n\to\infty}\|N_u\mathbf{Z}_{\sigma_n}\|^2\leqslant\|N_u\|^2<\infty。$$

这表明 $|u|<\infty$,并且 $|u|\leqslant\|N_u\|$。此外,在 $|u|<\infty$ 的情形下,对于所有 $\xi\in H$,有

$$\sum_{\sigma\in\Gamma}(\#_u(\sigma))^2|\langle\mathbf{Z}_\sigma,\xi\rangle|^2\leqslant|u|^2\sum_{\sigma\in\Gamma}|\langle\mathbf{Z}_\sigma,\xi\rangle|^2=|u|^2\|\xi\|^2<\infty。$$

由此并结合引理 1,可得 $\operatorname{Dom} N_u=H$。最后,由上述 $|u|\leqslant\|N_u\|$ 和 $\|N_u\|\leqslant|u|$ 可得 $\|N_u\|=|u|$。

如前所示,Γ 表示非负整数集 $\mathbf{N}$ 的有限幂集,所以 Γ 是一个可数无限集合。以 $l^2(\Gamma)$ 表示 Γ 上的平方可和复值函数构成的复 Hilbert 空间,则 $l^2(\Gamma)$ 有标准正交基 $\{\Phi_\sigma\mid\sigma\in\Gamma\}$,其中 Φ_σ 为 Γ 上的如下定义的函数:

$$\Phi_\sigma(\tau)=\begin{cases}1,&\tau=\sigma;\\0,&\tau\neq\sigma,\ \tau\in\Gamma。\end{cases}$$

$\{\mathbf{Z}_\sigma\mid\sigma\in\Gamma\}$ 为 H 的典则标准正交基,由 Hilbert 空间的一般理论,可知存在酉同构 $J:l^2(\Gamma)\to H$,使得

$$J\Phi_\sigma=\mathbf{Z}_\sigma,\quad\sigma\in\Gamma。\tag{10}$$

根据文献[2],酉同构 J 称为 Full-Wiener 积分变换。注意到 J 是 $l^2(\Gamma)$ 到 H 的酉同构,所以由式(10)可得 J 的一个表示

$$J\Phi=\sum_{\sigma\in\Gamma}\langle\Phi_\sigma,\Phi\rangle_{l^2(\Gamma)}\mathbf{Z}_\sigma,\quad\Phi\in l^2(\Gamma),\tag{11}$$

其中,$\langle\cdot,\cdot\rangle_{l^2(\Gamma)}$ 表示空间 $l^2(\Gamma)$ 中的内积,等式右边的级数依 $\mathfrak{h}$ 的范数 $\|\cdot\|$ 收敛。

如同引理 1 中一样,对于 $\sigma\in\Gamma$ 和函数 $u:\mathbf{N}\to[0,\infty)$,规定 $\#_u(\sigma):=\sum_{k=0}^{\infty}u(k)1_\sigma(k)$,这实际上定义了一个 Γ 上的函数 $\sigma\mapsto\#_u(\sigma)$。$l^2(\Gamma)$ 到 $l^2(\Gamma)$ 的一个交换图可表示为

$$\begin{tikzcd}
l^2(\Gamma) \arrow[r, "J"] \arrow[d, "\widehat{N_u}=J^{-1}N_uJ"'] & H \arrow[d, "N_u"] \\
l^2(\Gamma) & H \arrow[l, "J^{-1}"]
\end{tikzcd}$$

这表明映射$\widehat{N_u}$和 N_u 是同构的。

命题 2 设函数 $u:\mathbf{N}\to[0,+\infty)$满足$|u|<\infty$,则$\widehat{N_u}:=J^{-1}N_uJ$ 是 $l^2(\Gamma)$上的由函数 $\sigma\mapsto\#_u(\sigma)$所确定的乘算子,即对于每个 $\Phi\in l^2(\Gamma)$,有

$$(\widehat{N_u}\Phi)(\sigma)=\#_u(\sigma)\Phi(\sigma),\quad \sigma\in\Gamma。\tag{12}$$

证明 设 $\Phi\in l^2(\Gamma)$, $\sigma\in\Gamma$。易见,u 满足命题 1 中的条件,因而 N_u 是 H 上的一个有界自伴算子。又由于 Full-Wiener 积分变换 J 是酉同构,所以$\widehat{N_u}:=J^{-1}N_uJ$ 是 $l^2(\Gamma)$上的一个有界自伴算子。记 $\xi=J\Phi$,则由 $l^2(\Gamma)$中内积的定义以及 J 的性质可得

$$(\widehat{N_u}\Phi)(\sigma)=\langle\Phi_\sigma,\widehat{N_u}\Phi\rangle_{l^2(\Gamma)}=\langle\mathbf{Z}_\sigma,N_u\xi\rangle=\#_u(\sigma)\langle\mathbf{Z}_\sigma,\xi\rangle=\#_u(\sigma)\langle\Phi_\sigma,\Phi\rangle_{l^2(\Gamma)}=\#_u(\sigma)\Phi(\sigma)。$$

注意到函数 $\sigma\mapsto\#_u(\sigma)$是 Γ 的有界函数,因而该函数所确定的乘算子也是 $l^2(\Gamma)$上的有界算子。

在数学物理研究中,位势算子常表现为一个函数空间中的乘算子。命题 2 表明,算子 N_u 本质上属于位势算子的范畴。

定理 1 设函数 $u:\mathbf{N}\to[0,+\infty)$满足$|u|<\infty$,则算子 N_u 的谱 $\mathrm{Spec}(N_u)$有如下显式表示:

$$\mathrm{Spec}(N_u)=\overline{\{\#_u(\sigma)\mid\sigma\in\Gamma\}},\tag{13}$$

特别地,N_u 的点谱 $\mathrm{Spec}_p(N_u)$有表示 $\mathrm{Spec}_p(N_u)=\{\#_u(\sigma)\mid\sigma\in\Gamma\}$。

证明 根据命题 2 和乘算子谱的一般结论[8],$\widehat{N_u}$的谱 $\mathrm{Spec}(\widehat{N_u})$有如下显式表示:

$$\mathrm{Spec}(\widehat{N_u})=\overline{\{\#_u(\sigma)\mid\sigma\in\Gamma\}},$$

另一方面,由于 N_u 与$\widehat{N_u}$酉等价,所以 $\mathrm{Spec}(N_u)=\mathrm{Spec}(\widehat{N_u})=\overline{\{\#_u(\sigma)\mid\sigma\in\Gamma\}}$。至于点谱 $\mathrm{Spec}_p(N_u)$的表示,可由引理 1 直接得出。

定义 1 若函数 $u:\mathbf{N}\to[0,+\infty)$满足$|u|<\infty$,则 u 称为 $\mathbf{N}$ 上的一个权函数。称 $\mathbf{N}$ 上的权函数 u 为 Γ-完美的,如果$\{\#_u(\sigma)\mid\sigma\in\Gamma\}$在区间$[0,|u|]$中稠密。

定义中的符号$\#_u(\sigma)$和$|u|$如前所示(例如可参见引理 1 和命题 1)。下面的例子表明,$\mathbf{N}$ 上确实存在 Γ-完美的权函数。

例 1 定义函数$u_0:\mathbf{N}\to[0,+\infty)$如下 $u_0(k)=\dfrac{1}{2^{k+1}}$, $k\in\mathbf{N}$,则 u_0 是 $\mathbf{N}$ 上的一个 Γ-完美的权函数。

证明 显然,u_0 是 $\mathbf{N}$ 上的一个权函数。下证 u_0 还是 Γ-完美的,为此记 $D=\overline{\{\#_{u_0}(\sigma)\mid\sigma\in\Gamma\}}$。易知 $0=\#_{u_0}(\varnothing)$且

$$|u_0|=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}u_0(k)=\lim_{n\to\infty}\#_{u_0}(\sigma_n),$$

其中$\sigma_n:=\{0,1,\cdots,n\}\in\Gamma$。这表明 0 和$|u_0|$都属于 D。设 $t\in(0,|u_0|)$,则由$|u_0|=1$ 知 $t\in(0,1)$,从而 t 有二进制表示

$$t=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x_k}{2^{k+1}},$$

其中,$x_k\in\{0,1\}$, $k\geqslant0$。对每一个 $n\geqslant0$,定义 $\tau_n=\{k\geqslant0\mid k\leqslant n,\ x_k=1\}$,则$\tau_n\in\Gamma$。于是,

$$t=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{x_k}{2^{k+1}}=\lim_{n\to\infty}\#_{u_0}(\tau_n)\in D。$$

综上,$[0,|u_0|]\subset D=\overline{\{\#_{u_0}(\sigma)\mid\sigma\in\Gamma\}}$。这表明$\{\#_{u_0}(\sigma)\mid\sigma\in\Gamma\}$在区间$[0,|u_0|]$中稠密,从而 u_0 是 Γ-完美的。

定理 2 设 u 是 $\mathbf{N}$ 上的一个 Γ-完美的权函数,则算子 N_u 的谱 $\mathrm{Spec}(N_u)$与紧区间$[0,|u|]$重合,即 $\mathrm{Spec}(N_u)=[0,|u|]$。

证明 对于任意 $\sigma\in\Gamma$,由 Γ 的定义知 σ 是 $\mathbf{N}$ 的有限子集,结合 u 的权函数性质得

$$0\leqslant\#_u(\sigma)=\sum_{k=0}^{\infty}1_\sigma(k)u(k)\leqslant\sum_{k=0}^{\infty}u(k)=|u|。$$

这表明 $\{\#_u(\sigma)\mid\sigma\in\Gamma\}\subset[0,|u|]$，从而 $\overline{\{\#_u(\sigma)\mid\sigma\in\Gamma\}}\subset[0,|u|]$。此式连同权函数 u 的 Γ-完美性一起蕴含 $\overline{\{\#_u(\sigma)\mid\sigma\in\Gamma\}}=[0,|u|]$。因此，使用定理 1 便得 $\mathrm{Spec}(N_u)=[0,|u|]$。

定理 3　设 u 是 $\mathbf{N}$ 上的一个权函数，则算子 N_u 仅有纯点谱。

证明　设 $\boldsymbol{\xi}\in H$ 是空间 H 中的任意一个向量，则对 $\mathbf{R}$ 上的任意一个有界可测函数 φ，使用引理 1 和自伴算子的函数演算法则可得 $\varphi(N_u)=\sum_{\sigma\in\Gamma}\varphi(\#_u(\sigma))|\boldsymbol{Z}_\sigma\rangle\langle\boldsymbol{Z}_\sigma|$。由此经计算可得

$$\langle\boldsymbol{\xi},\varphi(N_u)\boldsymbol{\xi}\rangle=\sum_{\sigma\in\Gamma}\varphi(\#_u(\sigma))|\langle\boldsymbol{Z}_\sigma,\boldsymbol{\xi}\rangle|^2。$$

这意味着算子 N_u 的与向量 $\boldsymbol{\xi}$ 相联系的谱测度 $\mu_{\boldsymbol{\xi}}$ 可表示为如下形式：

$$\mu_{\boldsymbol{\xi}}=\sum_{\sigma\in\Gamma}|\langle\boldsymbol{Z}_\sigma,\boldsymbol{\xi}\rangle|^2\delta_{\#_u(\sigma)},$$

其中 $\delta_{\#_u(\sigma)}$ 表示由点 $\#_u(\sigma)$ 所确定的 $\mathbf{R}$ 上的点测度。此式连同向量 $\boldsymbol{\xi}\in H$ 的任意性意味着 N_u 的连续谱为空集，从而 N_u 仅有纯点谱。

2.2　应用

作为应用，本章考虑一个以 N_u 为 Hamiltonian 的封闭量子系统的演化行为，其中 u 是 $\mathbf{N}$ 上的一个给定的权函数。根据封闭量子系统演化的 Schrödinger 图景[9]，该演化由下列方程(14)描述：

$$\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}\xi(t)}{\mathrm{d}t}=N_u\xi(t),\tag{14}$$

其中，i 表示虚单位，系统的普朗克常数取为 $\hbar=1$，$\xi(t)$ 表示 t 时刻的态。易知，上述方程的解可表示为

$$\xi(t)=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tN_u}\xi(0),\quad t\in\mathbf{R},\tag{15}$$

其中，$\xi(0)$ 为初始态，$\{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tN_u}\mid t\in\mathbf{R}\}$ 为 N_u 生成的酉算子群。这种演化的动力学性质与其生成元的谱特性密切相关。

定理 4　以算子 N_u 为 Hamiltonian 的封闭量子系统具有基态 $\boldsymbol{Z}_\varnothing$，其基态能量为 0。此外，$\boldsymbol{Z}_\varnothing$ 还是该系统演化的不变态。

证明　由定理 1 可知，算子 N_u 的最小特征值为 0，对应的特征向量为 $\boldsymbol{Z}_\varnothing$。这意味着以 N_u 为 Hamiltonian 的封闭量子系统的基态能量为 0，相应的基态为 $\boldsymbol{Z}_\varnothing$。根据自伴算子的函数演算法则以及引理 1，可以算出

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tN_u}\boldsymbol{Z}_\varnothing=\boldsymbol{Z}_\varnothing,\quad\forall t\in\mathbf{R}。$$

这表明 $\boldsymbol{Z}_\varnothing$ 是不变态。

注 1　由于以 N_u 为 Hamiltonian 的量子系统的基态能量存在，所以该量子系统是稳定的。此外，当该量子系统的基态能量为 0 时，相应的基态 $\boldsymbol{Z}_\varnothing$ 为纯态。

参考文献：

[1] PARTHASARATHY K R. An introduction to quantum stochastic calculus[M]. Basel: Birkhäuser, 1992.

[2] WANG Caishi, CHAI Huifang, LU Yanchun. Discrete-time quantum Bernoulli noises[J]. Journal of Mathematical Physics, 2010, 51(5):053528.

[3] WANG Caishi, TANG Yuling, REN Suling. Weighted number operators on Bernoulli functionals and quantum exclusion semigroups[J]. Journal of Mathematical Physics, 2019, 60(11):113506.

[4] WANG Caishi, YE Xiaojuan. Quantum walk in terms of quantum Bernoulli noises[J]. Quantum Information Processing, 2016, 15(5):1897-1908.

[5] WANG Ce. The uniform measure for quantum walk on hypercube: a quantum Bernoulli noises approach[J]. Journal of Mathematical Physics, 2022, 63(11):113501.

[6] WANG Ce. Abstract model of continuous-time quantum walk based on Bernoulli functionals and perfect state transfer[J]. International Journal of Quantum Information, 2023, 21(3):2350015.

[7] PRIVAULT N. Stochastic analysis of Bernoulli processes[J]. Probability Surveys, 2008, 5:435-483.

[8] BORTHWICK D. Spectral theory[M]. Cham: Springer, 2020.

[9] BRIAN C H. Quantum theory for mathematicians[M]. New York: Springer, 2013.

（编辑：李艺）

山东大学学报(理学版)2025年12月 第60卷 第12期
Journal of Shandong University (*Natural Science*), Vol.60, No.12, 2025　　http://lxbwk.njournal.sdu.edu.cn

文章编号:1671-9352(2025)12-0178-05　　DOI:10.6040/j.issn.1671-9352.0.2024.106

算子乘积 AB 及 BA 的 Browder 定理

刘妮,焦红英,王亚利
(空军工程大学基础部, 陕西 西安 710051)

摘要:设 $\mathscr{H}$ 为复可分无限维 Hilbert 空间,A、B 为 $\mathscr{H}$ 上的有界线性算子。利用算子分块技巧,证明了算子乘积 AB 满足 Browder定理当且仅当 BA 满足 Browder 定理,也等价于 $AB\oplus BA$ 满足 Browder 定理。

关键词:Hilbert 空间;Browder 定理;Weyl 定理;谱
中图分类号:O177.2　　**文献标志码**:A
引用格式:刘妮,焦红英,王亚利. 算子乘积 AB 及 BA 的 Browder 定理[J]. 山东大学学报(理学版),2025,60(12):178-182.

The Browder's theorem of AB and BA

LIU Ni, JIAO Hongying, WANG Yali
(Department of Basic, Air Force Engineering University, Xi'an 710051, Shaanxi, China)

Abstract: Let $\mathscr{H}$ be complex separable Hilbert spaces. Let A, B denote the set of bounded linear operators on $\mathscr{H}$. By using the method of operator block, the equivalence of Browder's theorem holding for AB and BA is given, which is equivalent to Browder's theorem holding for $AB\oplus BA$.

Key words: Hilbert spaces; Browder's theorem; Weyl's theorem; spectrum

0　引言

设 $\mathscr{H}$ 与 $\mathscr{K}$ 表示无限(可分)复 Hilbert 空间,$\mathscr{B}(\mathscr{H})$ 与 $\mathscr{B}(\mathscr{H},\mathscr{K})$ 分别表示 Hilbert 空间 $\mathscr{H}$ 上和从 $\mathscr{H}$ 到 $\mathscr{K}$ 上全体有界线性算子之集。对算子 $A\in\mathscr{B}(\mathscr{H},\mathscr{K})$,分别用 A^*、$N(A)$、$R(A)$ 和 $\sigma(A)$ 表示 A 的伴随算子、核空间、值域和谱。记 $n(A)=\dim N(A)$ 为零空间的维数,$d(A)=\dim R(A)^{\perp}$ 为值域正交补空间维数。设算子 $T\in\mathscr{B}(\mathscr{H},\mathscr{K})$,若 $R(T)$ 是闭空间且 $N(T)$ 为有限维空间,则称 T 为左 Fredholm 算子。若 T^* 是左 Fredholm 算子,则称 T 为右 Fredholm 算子。T 称为 Fredholm 算子,如果 T 和 T^* 都是左 Fredholm 算子。记 Fredholm 算子 T 的指标为 $\mathrm{ind}(T)=n(T)-d(T)$。若 T 是 Fredholm 算子且 $\mathrm{ind}(T)=0$,则称 T 为 Weyl 算子。当 $T\in\mathscr{B}(\mathscr{H})$ 时,记 T 的左本质谱、右本质谱和 Weyl 谱为别为

$$\sigma_{le}(T):=\{\lambda\in\mathbf{C}:T-\lambda I\text{ 不是左 Fredholm 算子}\},$$

$$\sigma_{re}(T):=\{\lambda\in\mathbf{C}:T-\lambda I\text{ 不是右 Fredholm 算子}\},$$

$$\sigma_{w}(T):=\{\lambda\in\mathbf{C}:T-\lambda I\text{ 不是 Weyl 算子}\}。$$

记 $\mathrm{iso}\,\sigma(T)$ 为 T 的全体孤立谱点之集,且 $\pi_{00}(T)=\{\lambda\in\mathrm{iso}\,\sigma(T):0<n(T-\lambda I)<\infty\}$ 为全体有限重孤立特征值之集。若 $\sigma(T)\setminus\sigma_w(T)\subseteq\pi_{00}(T)$,则称 $T\in B(\mathscr{H})$ 满足 Browder 定理。尤其,如果 $\sigma(T)\setminus\sigma_w(T)=\pi_{00}(T)$,则称 T 满足 Weyl 定理。

Weyl 定理指 Hilbert 空间自伴算子的 Weyl 谱恰好等于它的谱集去掉有限重孤立特征值[1],许多学者研究了哪些算子类能够满足 Weyl 定理,满足 Weyl 定理的算子类不断得到扩大[2-7]。另外,许多学者尝试利用

收稿日期:2024-04-02; **网络出版时间**:2025-04-02 13:19:07
基金项目:空军工程大学基础部基金资助项目(JK2020106); 陕西省自然科学基础研究计划一般项目(2024JC-YBQN-0690)
第一作者:刘妮(1976—),女,副教授,硕士,研究方向为算子广义逆. E-mail:549011216@qq.com

不同的谱集提出算子满足 Weyl 型定理的各种判定方法[8-10]。特别是作为 Weyl 定理的拓广形式,Harte 等[6]定义并研究了算子的 Browder 定理。本文主要证明算子乘积 AB 满足 Browder 定理当且仅当 BA 满足 Browder 定理,也等价于 $AB\oplus BA$ 满足 Browder 定理。

1　主要结果

为证明本文主要结论,需要下面 2 个引理:

引理 1[11]　设 $A\in\mathscr{B}(\mathscr{H},\mathscr{K})$ 且 $B\in\mathscr{B}(\mathscr{K},\mathscr{H})$ 则

(1) $\sigma(AB)\backslash\{0\}=\sigma(BA)\backslash\{0\}$ 且 $\sigma_w(AB)\backslash\{0\}=\sigma_w(BA)\backslash\{0\}$;

(2) $\sigma_{le}(AB)\backslash\{0\}=\sigma_{le}(BA)\backslash\{0\}$ 且对 $\lambda\in\mathbf{C}\backslash\sigma_{le}(AB)$,都有 $\mathrm{ind}(AB-\lambda I)=\mathrm{ind}(BA-\lambda I)$;

(3) $n(AB-\lambda I)=n(BA-\lambda I)$ 且 $d(AB-\lambda I)=d(BA-\lambda I)$ 对 $\lambda\neq0$。

引理 2[12]　若 $\lambda\notin\sigma_{le}(A)\cap\sigma_{re}(A)$,则存在 $\delta>0$,使得对所有的 $0<|\mu-\lambda|<\delta$ 都有 $n(A-\mu I)$ 和 $d(A-\mu I)$ 为常值。

定理 1　设 $A\in\mathscr{B}(\mathscr{H},\mathscr{K})$ 且 $B\in\mathscr{B}(\mathscr{K},\mathscr{H})$,则下面命题等价:

(a) Browder 定理对对角算子矩阵 $AB\oplus BA:\mathscr{H}\oplus\mathscr{K}$ 成立;

(b) Browder 定理对 AB 成立;

(c) Browder 定理对 BA 成立;

(d) Browder 定理对 $M_C:=\begin{pmatrix}AB & C\\ 0 & BA\end{pmatrix}:\mathscr{H}\oplus\mathscr{K}$ 成立,其中 $C\in B(\mathscr{K},\mathscr{H})$ 是任意的。

证明　(a)$\Rightarrow$(b)。设 $\lambda\in\sigma(AB)\backslash\sigma_w(AB)$。

情形 1　若 $\lambda\neq0$,则 $AB-\lambda I$ 是 Weyl 算子,但 $AB-\lambda I$ 不可逆,故 $0<n(AB-\lambda I)<\infty$。由引理 2 可知 $BA-\lambda I$ 是 Weyl 算子,故 $(AB-\lambda I)\oplus(BA-\lambda I)$ 也是 Weyl 算子。因此,由(a)知 $\lambda\in\mathrm{iso}\,\sigma(AB\oplus BA)$,则 $\lambda\in\mathrm{iso}\,\sigma(AB)$,又 $0<n(AB-\lambda I)<\infty$,从而 $\lambda\in\pi_{00}(AB)$。

情形 2　若 $\lambda=0$,则 AB 是 Weyl 算子,但 AB 不可逆,故 $0<n(AB)<\infty$。需要证明 $0\in\mathrm{iso}\,\sigma(AB)$。反设 $0\notin\mathrm{iso}\,\sigma(AB)$,则存在非 0 序列 $\{\lambda_m\}_{m=1}^{\infty}\subseteq\sigma(AB)$ 使得 $\lim\limits_{m\to\infty}\lambda_m=0$。又由于 $0\in\sigma(AB)\backslash\sigma_w(AB)$,则由引理 2 知,存在 $\delta>0$ 使得对所有的 $0<|\mu|<\delta$ 都有 $AB-\mu I$ 是 Weyl 算子,且 $n(AB-\mu I)=d(AB-\mu I)$ 为大于 0 的常数。因此,当 m_0 充分大时,$0<|\lambda_{m_0}|<\delta$,从而

$$\lambda_{m_0}\in\sigma(AB\oplus BA)\backslash\sigma_w(AB\oplus BA)\subseteq\mathrm{iso}\,\sigma(AB\oplus BA),$$

即有 $\lambda_{m_0}\in\mathrm{iso}\,\sigma(AB)$。所以存在 $0<|\mu_0|<\delta$ 使得 $AB-\mu_0I$ 是可逆的,故对任意的 $0<|\mu|<\delta$ 都有

$$n(AB-\mu I)=n(AB-\mu_0I)=0,$$

矛盾。因此 $0\in\mathrm{iso}\,\sigma(AB)$,从而 $0\in\pi_{00}(AB)$,这蕴含 Browder 定理对 AB 成立。

(b)$\Rightarrow$(c)。设 $0\neq\lambda\in\sigma(BA)\backslash\sigma_w(BA)$,则 $0<n(BA-\lambda I)<\infty$。由引理 1 可知 $\lambda\in\sigma(AB)\backslash\sigma_w(AB)$。因此 $\lambda\in\mathrm{iso}\,\sigma(AB)$,再次应用引理 1 知,$\lambda\in\mathrm{iso}\,\sigma(BA)$,故有 $\lambda\in\pi_{00}(BA)$。

若 $0\in\sigma(BA)\backslash\sigma_w(BA)$,则 BA 是不可逆的 Weyl 算子,故有 $0<n(BA)<\infty$。需要证明 $0\in\mathrm{iso}\,\sigma(BA)$。反设 $0\notin\mathrm{iso}\,\sigma(BA)$,则存在非 0 序列 $\{\lambda_m\}_{m=1}^{\infty}\subseteq\sigma(BA)$ 使得 $\lim\limits_{m\to\infty}\lambda_m=0$。因为 $0\in\sigma(BA)\backslash\sigma_w(BA)$,则由引理 2 知存在 $\delta>0$ 使得对所有的 $0<|\mu|<\delta$ 都有 $BA-\mu I$ 是 Weyl 算子,且 $n(BA-\mu I)>0$ 是常数,因此当 m_0 充分大时,有 $0<|\lambda_{m_0}|<\delta$,再由引理 1 知

$$\lambda_{m_0}\in\sigma(AB)\backslash\sigma_w(AB)\subseteq\mathrm{iso}\,\sigma(AB),$$

即有 $\lambda_{m_0}\in\mathrm{iso}\,\sigma(AB)$。所以存在 $0<|\mu_0|<\delta$ 使得 $AB-\mu_0I$ 是可逆的,故对任意的 $0<|\mu|<\delta$ 都有

$$n(BA-\mu I)=n(AB-\mu I)=n(AB-\mu_0I)=0,$$

矛盾。因此 $0\in\mathrm{iso}\,\sigma(BA)$,从而 $0\in\pi_{00}(BA)$,这蕴含 Browder 定理对 BA 成立。

(c)$\Rightarrow$(a)。若 Browder 定理对 BA 成立,则应用上面(b)$\Rightarrow$(c)的方法,可得 Browder 定理对 AB 也成立,即有

$$\sigma(AB)\backslash\sigma_w(AB)\subseteq\pi_{00}(AB)\text{ 且 }\sigma(BA)\backslash\sigma_w(BA)\subseteq\pi_{00}(BA),$$

因此

$$\begin{aligned}\sigma(AB\oplus BA)\backslash\sigma_w(AB\oplus BA)&\subseteq[\sigma(AB)\backslash\sigma_w(AB)]\cup[\sigma(BA)\backslash\sigma_w(BA)]\\&\subseteq\pi_{00}(AB)\cup\pi_{00}(BA)\\&\subseteq\pi_{00}(AB\oplus BA)。\end{aligned}$$

(d)$\Leftrightarrow$(a)。首先证明对任意的 $C\in B(\mathscr{K},\mathscr{H})$,都有 $\sigma_w(M_C)=\sigma_w(AB)\cup\sigma_w(BA)$。显然 $\sigma_w(M_C)\subseteq\sigma_w(AB)\cup\sigma_w(BA)$。

设 $\lambda\notin\sigma_w(M_C)$。

情形 1 若 $\lambda\neq0$,则 $AB-\lambda I$ 是左 Fredholm 算子且 $BA-\lambda I$ 是右 Fredholm 算子,则由引理 1,$BA-\lambda I$ 也是左 Fredholm 算子,故 $BA-\lambda I$ 是 Fredholm 算子,从而有 $AB-\lambda I$ 也是 Fredholm 算子。因为

$$\begin{pmatrix}AB-\lambda I & C\\ 0 & BA-\lambda I\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}I & 0\\ 0 & BA-\lambda I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I & C\\ 0 & I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}AB-\lambda I & 0\\ 0 & I\end{pmatrix},\tag{1}$$

所以

$$0=\operatorname{ind}\begin{pmatrix}AB-\lambda I & C\\ 0 & BA-\lambda I\end{pmatrix}=\operatorname{ind}(AB-\lambda I)+\operatorname{ind}(BA-\lambda I)=2\operatorname{ind}(AB-\lambda I),$$

故有 $AB-\lambda I$ 和 $BA-\lambda I$ 都是 Weyl 算子,从而 $\lambda\notin\sigma_w(AB)\cup\sigma_w(BA)$。

情形 2 若 $\lambda=0$,则 AB 是左 Fredholm 算子且 BA 是右 Fredholm 算子,故有 B 和 A 都是 Fredholm 算子,$\operatorname{ind}(AB)=\operatorname{ind}(BA)$,从而

$$2\operatorname{ind}(AB)=\operatorname{ind}(AB)+\operatorname{ind}(BA)=\operatorname{ind}(M_C)=0,$$

则有 $0\notin\sigma_w(AB)\cup\sigma_w(BA)$。

同理可以证明:对任意 $C\in B(\mathscr{K},\mathscr{H})$,都有

$$\sigma(M_C)=\sigma(AB)\cup\sigma(BA),$$

则对任意 $C\in B(\mathscr{K},\mathscr{H})$,都有 $\sigma(M_C)\backslash\sigma_w(M_C)=\sigma(AB\oplus BA)\backslash\sigma_w(AB\oplus BA)$。

容易验证 $\operatorname{iso}\sigma(M_C)=\operatorname{iso}\sigma(AB\oplus BA)$,因此

$$\sigma(M_C)\backslash\sigma_w(M_C)\subseteq\operatorname{iso}\sigma(M_C)\Leftrightarrow\sigma(AB\oplus BA)\backslash\sigma_w(AB\oplus BA)\subseteq\operatorname{iso}\sigma(AB\oplus BA),$$

则有 $\sigma(M_C)\backslash\sigma_w(M_C)\subseteq\pi_{00}(M_C)\Leftrightarrow\sigma(AB\oplus BA)\backslash\sigma_w(AB\oplus BA)\subseteq\pi_{00}(AB\oplus BA)$。

设 $T=U|T|$ 是算子 $T\in\mathscr{B}(\mathscr{H})$ 的典型极分解,即 U 是唯一的部分等距算子满足 $N(U)=N(T)$ 成立,其中 $|T|=(T^*T)^{\frac{1}{2}}$ 是正算子 T^*T 的唯一正平方根算子。算子 $T\in\mathscr{B}(\mathscr{H})$ 的广义 Aluthge 变换算子 $\tilde{T}$ 定义为 $\tilde{T}=|T|^sU|T|^t$,这里 $s,t>0$ 且 $s+t=1$。

推论 1 设 $T\in\mathscr{B}(\mathscr{H})$,则 T 满足 Browder 定理当且仅当 $\tilde{T}$ 满足 Browder 定理。

证明 记 $S=U|T|^t$ 且 $R=|T|^s$,则 $T=SR$ 且 $\tilde{T}=RS$,故定理 1 蕴含 T 满足 Browder 定理当且仅当 $\tilde{T}$ 满足 Browder 定理。

上面的推论 1 还可以进一步拓广,即 T 满足 Weyl 定理当且仅当 $\tilde{T}$ 满足 Weyl 定理。

引理 3 设 $T\in\mathscr{B}(\mathscr{H})$,则

(1) $\sigma(T)=\sigma(\tilde{T})$ 且 $\sigma_w(T)=\sigma_w(\tilde{T})$;

(2) $\pi_{00}(T)=\pi_{00}(\tilde{T})$。

证明 (1) 记 $S=U|T|^t$ 且 $R=|T|^s$,则由引理 1 知

$$\sigma(T)\backslash\{0\}=\sigma(SR)\backslash\{0\}=\sigma(RS)\backslash\{0\}=\sigma(\tilde{T})\backslash\{0\},\tag{2}$$

且

$$\sigma_w(T)\backslash\{0\}=\sigma_w(SR)\backslash\{0\}=\sigma_w(RS)\backslash\{0\}=\sigma_w(\tilde{T})\backslash\{0\}。\tag{3}$$

容易验证

$$0\in\sigma_w(T)\Leftrightarrow0\in\sigma_w(\tilde{T})\text{ 且 }0\in\sigma(T)\Leftrightarrow0\in\sigma(\tilde{T})。\tag{4}$$

事实上,若 $T=U|T|$ 是 Weyl 算子,则 $|T|$ 是 Weyl 算子,故有 $U|T|^t$ 和 $|T|^s$ 都是 Weyl 算子,因此 $\tilde{T}=|T|^sU|T|^t$ 是 Weyl 算子。反之,若 $\tilde{T}$ 是 Weyl 算子,则 $|T|^t$ 是左 Weyl 算子,从而 $|T|$ 是 Weyl 算子。又由于 $R(|T|^t)=R(|T|)$ 是闭子空间且 U 是从闭子空间 $R(|T|)$ 到闭子空间 $R(T)$ 的酉算子,所以 $U|T|^t$ 是 Weyl 算子,故有

$T=U|T|^t|T|^s$ 是 Weyl 算子。组合上面的(2)—(4)，可得

$$\sigma(T)=\sigma(\tilde{T})\text{ 且 }\sigma_w(T)=\sigma_w(\tilde{T})。\tag{5}$$

(2) 因为(5)蕴含 $\mathrm{iso}\,\sigma(T)=\mathrm{iso}\,\sigma(\tilde{T})$，只需证明对任意复数 λ，都有

$$0<n(\tilde{T}-\lambda I)<\infty\Leftrightarrow 0<n(T-\lambda I)<\infty。\tag{6}$$

当 $\lambda\neq 0$ 时，由引理 1 知

$$n(\tilde{T}-\lambda I)=n(RS-\lambda I)=n(SR-\lambda I)=n(T-\lambda I),$$

故式(6)成立。若 $n(T)=0$，则 U 是等距算子，故 $n(\tilde{T})=n(|T|^sU|T|^t)=0$。另一方面，若 $n(\tilde{T})=0$，则 $n(T)=n(|T|)=0$。显然 $n(T)\leqslant n(\tilde{T})<\infty$。反之若 $n(T)<\infty$，则 $n(T)=n(|T|)=n(U|T|^t)$，故有 $n(\tilde{T})<\infty$，因此 $\pi_{00}(T)=\pi_{00}(\tilde{T})$。

例 1 说明“AB 满足 Weyl 定理”与“BA 满足 Weyl 定理”并不等价。

例 1 令 $\ell^2:=\{(x_1,x_2,x_3,\cdots):x_i\in\mathbf{C}\text{ 且 }\sum\limits_{i=1}^{\infty}|x_i|^2<\infty\}$，则 ℓ^2 是复可分希尔伯特空间。定义算子 $K,S,T\in\mathscr{B}(\ell^2)$ 分别有下面的形式：

$$K(x_1,x_2,x_3,\cdots)=\left(0,0,0,\frac{1}{2}x_2,0,\frac{1}{3}x_3,0,\frac{1}{4}x_4,0,\frac{1}{5}x_5,\cdots\right),$$

$$S(x_1,x_2,x_3,\cdots)=(0,x_1,0,x_2,0,x_3,0,x_4,\cdots),$$

且

$$T(x_1,x_2,x_3,\cdots)=(x_2,x_4,x_6,x_8,\cdots)。$$

令

$$A=\begin{pmatrix}I&0\\0&T\end{pmatrix}:\ell^2\oplus\ell^2\to\ell^2\oplus\ell^2,\quad B=\begin{pmatrix}K&0\\0&S\end{pmatrix}:\ell^2\oplus\ell^2\to\ell^2\oplus\ell^2,$$

显然 $TS=I$ 且 $ST(x_1,x_2,x_3,\cdots)=(0,x_2,0,x_4,0,x_6,0,x_8,\cdots)$，则

$$AB=\begin{pmatrix}K&0\\0&I\end{pmatrix}:\ell^2\oplus\ell^2\to\ell^2\oplus\ell^2,\quad BA=\begin{pmatrix}K&0\\0&ST\end{pmatrix}:\ell^2\oplus\ell^2\to\ell^2\oplus\ell^2。$$

容易验证下面 3 个结论成立：

(1) $\sigma(K)=\{0\}$，$n(K)=1$；

(2) $\sigma(AB)=\sigma_w(AB)=\sigma(BA)=\sigma_w(BA)=\{0,1\}$；

(3) $\pi_{00}(AB)=\{0\}$，$\pi_{00}(BA)=\varnothing=\pi_{00}(AB\oplus BA)$。

令

$$C_0=\begin{pmatrix}S&0\\0&0\end{pmatrix}:N(BA)\oplus N(BA)^{\perp}\to R(AB)^{\perp}\oplus\overline{R(AB)},$$

其中 S 是从 $N(BA)$ 到 $R(AB)^{\perp}$ 上的可逆算子(由于 $n(BA)=\infty=d(AB)$)。容易计算

$$\sigma(M_{C_0})=\sigma_w(M_{C_0})=\{0,1\},\quad n(M_{C_0})=1\text{ 且 }\pi_{00}(M_{C_0})=\{0\},$$

则 BA 和 $AB\oplus BA$ 满足 Weyl 定理，但是 AB 和 M_{C_0} 不满足 Weyl 定理。

定理 2 设 $T\in\mathscr{B}(\mathscr{H})$，则下面命题成立：

(a) $T\oplus\tilde{T}$ 满足 Weyl 定理；

(b) T 满足 Weyl 定理；

(c) $\tilde{T}$ 满足 Weyl 定理；

(d) $N_C:=\begin{pmatrix}T&C\\0&\tilde{T}\end{pmatrix}:\mathscr{H}\oplus\mathscr{H}$ 满足 Weyl 定理，其中 $C\in\mathscr{B}(\mathscr{H})$ 是任意的。

证明 容易验证：对任意的 $C\in B(\mathscr{K},\mathscr{H})$，都有

$$N\begin{pmatrix}T-\lambda I&C\\0&\tilde{T}-\lambda I\end{pmatrix}\subseteq\begin{pmatrix}N(T-\lambda I)\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}(T-\lambda I)^{-1}(Cy)\\y\end{pmatrix}\tag{7}$$

成立，其中 $y\in N(\tilde{T}-\lambda I)$ 满足 $Cy\in R(T-\lambda I)$ 且 $(T-\lambda I)^{-1}(Cy)\subseteq N(T-\lambda I)^{\perp}$，$(T-\lambda I)^{-1}$ 表示 $T-\lambda I$ 的逆算子，即是从 $\overline{R(T-\lambda I)}$ 到 $N(T-\lambda I)^{\perp}$ 上的稠定闭算子。因此由引理 3 知

$$0<n(\tilde{T}-\lambda I)<\infty \Leftrightarrow 0<n(T-\lambda I)<\infty \Leftrightarrow 0<n(N_C-\lambda I)<\infty 。\tag{8}$$

再由引理 3 可得 $\mathrm{iso}\,\sigma(T)=\mathrm{iso}\,\sigma(\tilde{T})$,故有 $\mathrm{iso}\,\sigma(T)=\mathrm{iso}\,\sigma(\tilde{T})=\mathrm{iso}\,\sigma(N_C)$,所以对任意的 $C\in\mathscr{B}(\mathscr{H})$ 都有

$$\pi_{00}(T)=\pi_{00}(T\oplus\tilde{T})=\pi_{00}(N_C)。\tag{9}$$

又由引理 3 知,$\sigma(T)=\sigma(\tilde{T})$ 且 $\sigma_w(T)=\sigma_w(\tilde{T})$,这 2 个等式蕴含

$$\sigma(T)=\sigma(\tilde{T})=\sigma(N_C) \text{ 且 } \sigma_w(T)=\sigma_w(\tilde{T})=\sigma_w(N_C)\tag{10}$$

对任意的 $C\in\mathscr{B}(\mathscr{H})$ 成立,因此由等式(9)和(10)可得(a)⇒(b)⇔(c)⇒(d)。

参考文献:

[1] WEYL H V. Über beschränkte quadratische Formen, deren Differenz vollsteig ist[J]. Rendiconti Del Circolo Matematico Di Palermo, 1909, 27(1):373-392.

[2] COBURN L A. Weyl's theorem for nonnormal operators [J]. Michigan Mathematical Journal, 1966, 13(3):285-288.

[3] CAO Xiaohong. Weyl type theorem and hypercyclic operators[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2006, 323(1):267-274.

[4] CAO Xiaohong, GUO Maozheng, MENG Bin. Weyl spectra and Weyl's theorem [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2003,288(2):758-767.

[5] DJORDJEVIĆ S V, HAN Y M. Browder's theorems and spectral continuity[J]. Glasgow Math, 2000, 42(3):479-486.

[6] HARTE R, LEE W Y. Another note on Weyl's theorem[J]. Transactions of the American Mathematical Society, 1997, 349(5):2115-2124.

[7] KIMURA F. Analysis of non-normal operators via Aluthge transformation[J]. Integral Equation Operator Theory, 2004, 50: 375-384.

[8] 仇思楠,曹小红. 有界线性算子及其函数的 Browder 定理的判定[J]. 中山大学学报(自然科学版),2022,61(5):165-172.
QIU Sinan, CAO Xiaohong. Judgement of Browder's theorem for bounded linear opertors and their functions[J]. Acta Scientiarum Naturalium Univeraitatis Sunyatseni, 2022, 61(5):165-172.

[9] 王静,曹小红. 有界线性算子的 Weyl 定理的判定[J]. 浙江大学学报(理学版),2020,47(5):541-547.
WANG Jing, CAO Xiaohong. The judgement of Weyl's theorem for bounded linear opertors[J]. Journal of ZheJiang University (Science Edition), 2020, 47(5):541-547.

[10] 孙晨辉,白珍贵,曹小红. 有界线性算子的 Browder 定理的判定[J]. 山东大学学报(理学版),2021,56(2):34-40.
SUN Chenhui, BAI Zhengui, CAO Xiaohong. Judgement of Browder's theorem for bounded linear opertors[J]. Journal of Shandong University (Natural Science), 2021, 56(2):34-40.

[11] BRUCE A B. Common operator properties of the linear operators RS and SR[J]. Proceedings of the American Mathematical Society, 1998, 126(4):1055-1061.

[12] CONWAY J B A. Course in functional analysis[M]. New York: Springer, 1989.

(编辑:陈丽萍)