山东大学学报(理学版)2025 年 12 月 第 60 卷 第 12 期
Journal of Shandong University(*Natural Science*), Vol.60, No.12, 2025 http://lxbwk.njournal.sdu.edu.cn

文章编号:1671-9352(2025)12-0075-09 DOI:10.6040/j.issn.1671-9352.0.2023.505

Rotation-Camassa-Holm 方程和 Rotation-μ-Camassa-Holm 方程 Cauchy 解的局部解析性

高亚琴,王海权*,滕凯民
(太原理工大学数学学院, 山西 太原 030024)

摘要:利用具有抽象形式的 Cauchy-Kovalevsky 定理研究一个 rotation-μ-Camassa-Holm 方程 Cauchy 问题解的局部解析性,通过推广的 Ovsyannikov 定理,讨论一个 rotation-Camassa-Holm 方程 Cauchy 问题的解在某些 Sobolev-Gevrey 空间中的局部解析性,并给出解析解存在的时间区间。

关键词:rotation-μ-Camassa-Holm 方程;rotation-Camassa-Holm 方程;抽象的 Cauchy-Kovalevsky 定理;推广的 Ovsyannikov 定理;局部解析性

中图分类号:O175 **文献标志码**:A

引用格式:高亚琴,王海权,滕凯民. Rotation-Camassa-Holm 方程和 Rotation-μ-Camassa-Holm 方程 Cauchy 解的局部解析性研究[J]. 山东大学学报(理学版),2025,60(12):75-83.

Local analyticity of the solutions of Cauchy problems of a rotation-μ-Camassa-Holm equation and a rotation-Camassa-Holm equation

GAO Yaqin, WANG Haiquan*, TENG Kaimin
(College of Mathematics, Taiyuan University of Technology, Taiyuan 030024, Shanxi, China)

Abstract: By utilizing the abstact Cauchy-Kovalevsky theorem, this paper first investigates the local analyticity of the solution of Cauchy problem of a rotation-μ-Camassa-Holm equation. Then, the local analyticity of the solution to Cauchy problem associated with a rotation-Camassa-Holm equation in some Sobolev-Gevrey spaces is studied by means of the generalized Ovsyannikov theorem. Besides, the lifespan of the analytic solutions will be given in detail.

Key words: rotation-μ-Camassa-Holm equation; rotation-Camassa-Holm equation; abstract Cauchy-Kovalevsky theorem; generalized Ovsyannikov theorem; local analyticity

1 引言与主要结果

本文首先考虑 rotation-μ-Camassa-Holm (R-μ-CH) 方程

$$m_t+um_x+2u_xm+cu_x-\frac{\beta_0}{\beta}u_{xxx}+\frac{\omega_1}{\alpha^2}u^2u_x+\frac{\omega_2}{\alpha^3}u^3u_x=0,\quad t>0,\quad x\in S \tag{1}$$

的 Cauchy 问题解的局部解析性,其中,$m=\mu(u)-u_{xx}$, $\mu(u)=\int_S u(t,x)\,\mathrm{d}x$, $S=\mathbf{R}/\mathbf{Z}\cong(0,1)$。方程(1)中的各参数具体如下:

$$c=\sqrt{1+\Omega^2}-\Omega,\quad \alpha=\frac{c^2}{1+c^2},\quad \beta_0=\frac{c(c^4+6c^2-1)}{6(c^2+1)^2},\quad \beta=\frac{3c^4+8c^2-1}{6(c^2+1)^2},$$

收稿日期:2023-11-28; **网络出版时间**:2024-12-02 17:18:14
基金项目:山西省基础研究计划项目(20210302124259);国家自然科学基金资助项目(12401307)
第一作者:高亚琴(1999—),女,硕士研究生,研究方向为偏微分方程. E-mail:gaoyaqinmath@163.com
* **通信作者**:王海权(1991—),男,讲师,博士,研究方向为偏微分方程. E-mail:hqwangmath@163.com

$$\omega_1=\frac{-3c(c^2-1)(c^2-2)}{2(1+c^2)^3},\quad \omega_2=\frac{(c^2-2)(c^2-1)^2(8c^2-1)}{2(1+c^2)^5},$$

其中 Ω 是由地球自转引起的 Coriolis 效应产生的恒定旋转频率。方程(1)是由 Moon[1]提出来的,同时作者还说明了该方程在周期情形下不具有尖的行波解。事实上,该方程可看成如下 rotation-Camassa-Holm (R-CH)方程

$$m_t+um_x+2u_xm+cu_x-\frac{\beta_0}{\beta}u_{xxx}+\frac{\omega_1}{\alpha^2}u^2u_x+\frac{\omega_2}{\alpha^3}u^3u_x=0,\quad t>0,\quad x\in\mathbf{R} \tag{2}$$

的一个 μ 形式推广,其中 $m=u-u_{xx}$, α, β, β_0, ω_1, ω_2 和上述定义一样。方程(2)是由 Gui 等[2]提出来的,描述了具有 Coriolis 效应的流体在赤道区域中不可压缩浅水区中的运动。它和浅水波方程 Camassa-Holm (CH)方程[3]类似,也具有形式上的双哈密顿结构。许多学者已经对该方程的 Cauchy 问题解的一些基本数学性质进行了详细研究和探讨,比如证明了周期和非周期情形下解在不同能量空间的局部适定性以及解对初值的不一致连续依赖性[4-6]。当 $\Omega=0$ 时,通过一定的变换,方程(1)可化简为 μ-Camassa-Holm(μ-CH)方程[7]

$$\mu(u_t)-u_{txx}+2\mu(u)u_x=2u_xu_{xx}+uu_{xxx},$$

方程(2)可化简为 Camassa-Holm(CH)方程[3]

$$m_t+um_x+2u_xm=0,\quad m=u-u_{xx}。$$

对于一个方程来说,研究其 Cauchy 问题解的局部解析性是极其重要的,它不仅在研究方程解的适定性方面起着很大作用,而且在弹性力学和流体力学方面也有着很强的应用。诸多学者已经根据具有抽象形式的 Cauchy-Kovalevsky 定理对一些方程 Cauchy 问题解的局部解析性进行了详细的探讨[8-9],例如 Camassa-Holm 方程[10]和修正的 μ-Camassa-Holm 方程[11]等。然而这一定理对于在 Sobolev-Gevrey 空间中研究解析性是无效的,于是 Galstian 等[12]建立了一个新的辅助函数,得到了推广的 Ovsyannikov 定理,同时利用这个定理对一些 CH 型方程在 Sobolev-Gevrey 空间中的局部解析性进行了研究。

本文首先利用抽象的 Cauchy-Kovalevsky 定理[8-9]研究周期情形下 rotation-μ-Camassa-Holm 方程即方程(1)的 Cauchy 问题解的局部解析性;然后,通过推广的 Ovsyannikov 定理[12]研究具有混合次非线性项的 rotation-Camassa-Holm 方程即方程(2)的 Cauchy 问题的解在 Sobolev-Gevrey 空间中的局部解析性,并给出了解析解的存在区间,具体结论如下。

定理 1 如果初值 u_0 是 S 上的一个实解析函数,则存在 $\varepsilon>0$ 使得方程(1)的 Cauchy 问题存在一个唯一的解 $u(t,x)$ 且其在 $(-\varepsilon,\varepsilon)\times S$ 上是解析的。

注 1 定理 1 表明当初值是实解析的,对应方程 Cauchy 问题的解,关于时间变量局部解析,关于空间变量全局解析。

定理 2 假设 $\sigma\geqslant 1$, $q>\frac{3}{2}$,若 $u_0\in G^1_{\sigma,q}(\mathbf{R})$,则对于任意的 $0<\delta<1$,存在时间 T_0 使得方程(2)的 Cauchy 问题有唯一的解 $u\in G^{\delta}_{\sigma,q}(\mathbf{R})$,并且 $|t|<\frac{T_0(1-\delta)^\sigma}{2^\sigma-1}$ 时该解解析,且 $T_0\approx\frac{1}{\|u_0\|_{G^1_{\sigma,q}(\mathbf{R})}+\|u_0\|^2_{G^1_{\sigma,q}(\mathbf{R})}+\|u_0\|^3_{G^1_{\sigma,q}(\mathbf{R})}}$。

注 2 当 $\sigma=1$ 时,u_0,u 被称为常规解析函数,进一步可以得到方程(2)的 Cauchy 问题有类似于定理 1 的结论。

2 定理 1 的证明

2.1 预备知识

首先,给出一个抽象形式的 Cauchy-Kovalevsky 定理。

定理 3[8-9] 假定 $\{E_s\}_{0<s<1}$ 是一族递减的 Banach 空间,也就是说对任意的 $0<s'<s$,有 $E_s\subset E_{s'}$,且有 $|||u|||_{s'}\leqslant|||u|||_s$,现考虑如下的 Cauchy 问题

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=F(t,u(t)),\\ u|_{t=0}=u_0。\end{cases}$$

令 T,R 都是正数,对于给定的实解析函数 u_0,假设函数 F 满足下面的 3 个条件:

(1) 若对任意的函数 $u\in E_s$,当 $0<s'<s<1$ 时,函数 $t\mapsto u(t)$ 在 $|t|<T$ 上解析,在 $|t|<T$ 上连续,并且

$$\sup_{|t|\leqslant T}|||u(t)|||_s<R,$$

那么函数 $t\mapsto F(t,u(t))$ 在 $|t|<T$ 上解析。

(2) 对任意的 $0<s'<s\leqslant 1$,以及任意的 $u,v\in\overline{B(u_0,R)}\subset E_s$,存在一个依赖于初值 u_0 和 R 的正数 C,使得

$$\sup_{|t|\leqslant T}|||F(t,u)-F(t,v)|||_{s'}\leqslant\frac{C}{s-s'}|||u-v|||_s。$$

(3) 存在一个正数 $M>0$,其中 M 依赖于初值 u_0,使得对任意的 $0<s<1$,有

$$\sup_{|t|\leqslant T}|||F(t,u_0)|||_s\leqslant\frac{M}{1-s},$$

则存在$T_0\in(0,T)$和唯一的函数 $u(t)\in E_s$,当 $|t|<(1-s)T_0$ 时,其中 $0<s<1$, $u(t)$ 解析并且恰好是上述 Cauchy 问题的解。

设 γ 为三次多项式方程(3)的实根[4]:

$$c-\frac{\beta_0}{\beta}-2\gamma+\frac{\omega_1}{\alpha^2}\gamma^2-\frac{\omega_2}{\alpha^3}\gamma^3=0,\tag{3}$$

且考虑如下变换:

$$x\to x-\left(\frac{\beta_0}{\beta}-\gamma\right)t,\quad u\to u-\gamma,\quad t\to t,\tag{4}$$

可以将方程(1)化为

$$\mu(u_t)-u_{txx}-uu_{xxx}+2\mu(u)u_x+\frac{\beta_0}{\beta}u_x-2u_xu_{xx}+\left(\frac{3\omega_2\gamma^2}{\alpha^3}-\frac{2\omega_1\gamma}{\alpha^2}\right)uu_x+\left(\frac{\omega_1}{\alpha^2}-\frac{3\omega_2\gamma}{\alpha^3}\right)u^2u_x+\frac{\omega_2}{\alpha^3}u^3u_x=0,\tag{5}$$

为了计算方便,上述方程(5)的 Cauchy 问题可以化为如下非局部形式:

$$\begin{cases}u_t=-\dfrac{1}{2}\partial_x(u^2)-(\mu-\partial_x^2)^{-1}\partial_xP, & x\in S,\ t>0,\\ u(0,x)=u_0(x), & x\in S,\end{cases}\tag{6}$$

其中,

$$P(x,t)=2\mu(u)u+c_1u+c_2u^2+c_3u^3+c_4u^4+\frac{1}{2}u_x^2,$$

$$c_1=\frac{\beta_0}{\beta},\quad c_2=\frac{3\omega_2\gamma^2}{2\alpha^3}-\frac{\omega_1\gamma}{\alpha^2},\quad c_3=\frac{\omega_1}{3\alpha^2}-\frac{\omega_2\gamma}{\alpha^3},\quad c_4=\frac{\omega_2}{4\alpha^3}。$$

下面介绍证明问题(6)解的局部解析性,即定理 1 所需要的一些定义以及引理。

定义 1[13]　称一个函数 $w:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ 在点 $\boldsymbol{x}^0=(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0)$ 是实解析的,若存在 $r>0$ 以及常数$\{w_\alpha\}$使得在 $|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^0|<r$ 内,$w(\boldsymbol{x})=\sum_\alpha w_\alpha(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^0)^\alpha$ 成立,其中 α 表示多重指标。

定义 2[10-11]　对于任意的 $s>0$,定义空间:

$$E_s=\left\{u\in C^\infty(S):|||u|||_s=\sup_{k\in\mathbf{N}_0}\frac{s^k\|\partial^ku\|_{H^2(S)}}{k!/(k+1)^2}<\infty\right\},$$

其中,$H^2(S)$ 表示具有二阶实指数的 Sobolev 空间,$\mathbf{N}_0$ 表示非负整数集,当为空间 E_s 赋予范数 $|||\cdot|||_s$ 之后,E_s 便成为 Banach 空间,并对任意的 $0<s'<s$ 有嵌入关系 $E_s\subset E_{s'}$,从而有 $|||u|||_{s'}\leqslant|||u|||_s$。另外,任何 $u\in E_s$ 在 S 上均为实解析函数。

定义 3[10-11]　对任意的 $u,v\in E_s$,定义

$$|||(u,v)|||_s=|||u|||_s+|||v|||_s。$$

引理 1[10,14]　如果 $0<s<1$,那么存在一个常数 $c>0$,其中 c 不依赖于 s,对任意的 $u,v\in E_s$,都有

$$|||uv|||_s\leqslant c|||u|||_s+|||v|||_s。$$

引理 2[11] 根据范数$|||\cdot|||_s$的定义,存在一个常数 $c>0$,使得

$$|||\mu(u)|||_s=|\mu(u)|\leqslant\|u\|_{L^2}\leqslant c|||u|||_s。$$

引理 3[10-11] 存在常数 $c>0$,使得对任意的 $0<s'<s<1$,都有

$$|||\partial_x u|||_{s'}\leqslant\frac{c}{s-s'}|||u|||_s,$$

$$|||(\mu-\partial_x^2)^{-1}u|||_s\leqslant c|||u|||_s,$$

$$|||(\mu-\partial_x^2)^{-1}\partial_x u|||_s\leqslant c|||u|||_s。$$

2.2 定理 1 的证明

利用定理 3 来证明定理 1,假设初值 u_0 是 S 上的一个实解析函数,首先令

$$h(u)=u^2,\quad P_1u=-\partial_x u,\quad P_2u=-(\mu-\partial_x^2)^{-1}\partial_x u,$$

则可以把问题(6)中的方程化成下面的形式:

$$\partial_t u=\frac{1}{2}P_1h(u)+P_2\left[2\mu(u)u+c_1u+c_2h(u)+c_3uh(u)+c_4h(h(u))+\frac{1}{2}h(P_1u)\right]。$$

令 $u_1=u$, $u_2=P_1u=-\partial_x u_1$,则

$$\partial_t u_1=\partial_t u=\frac{1}{2}P_1h(u_1)+P_2\left[2\mu(u_1)u_1+c_1u_1+c_2h(u_1)+c_3u_1h(u_1)+c_4h(h(u_1))+\frac{1}{2}h(u_2)\right]=H_1(u_1,u_2),$$

进一步有

$$\begin{aligned}\partial_t u_2&=\frac{1}{2}P_1^2h(u_1)+P_1P_2\left[2\mu(u_1)u_1+c_1u_1+c_2h(u_1)+c_3u_1h(u_1)+c_4h(h(u_1))+\frac{1}{2}h(u_2)\right]\\&=P_1(u_1u_2)+P_1P_2\left[2\mu(u_1)u_1+c_1u_1+c_2h(u_1)+c_3u_1h(u_1)+c_4h(h(u_1))+\frac{1}{2}h(u_2)\right]=H_2(u_1,u_2),\end{aligned}$$

因此,问题(6)可以写成

$$\begin{cases}\partial_t u_1=H_1(u_1,u_2),\\ \partial_t u_2=H_2(u_1,u_2),\\ u_1(x,0)=u_0(x),\\ u_2(x,0)=-\partial_x u_1(x,0)=-\partial_x u_0(x)。\end{cases}$$

定义

$$\boldsymbol{U}=(u_1,u_2),$$

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{U})=\boldsymbol{H}(u_1,u_2)=(H_1(u_1,u_2),H_2(u_1,u_2)),$$

则上述 Cauchy 问题等价于下面的形式:

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{H}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{H}(t,\boldsymbol{U}(t)),\\ \boldsymbol{U}(0)=(u_0(x),-\partial_x u_0(x))。\end{cases}$$

接下来证明问题(6)中的方程满足定理 3 中的条件(1)、(2)以及(3)。根据定义 3,可以得到

$$|||\boldsymbol{H}(u_1,u_2)|||_{s'}=|||H_1(u_1,u_2)|||_{s'}+|||H_2(u_1,u_2)|||_{s'},\tag{7}$$

通过引理 1—3 可得

$$\begin{aligned}|||H_1(u_1,u_2)|||_{s'}&\leqslant\frac{c^2}{2(s-s')}|||u_1|||_s^2+2c^3|||u_1|||_s^2+c|c_1||||u_1|||_s+c^2|c_2||||u_1|||_s^2+c^3|c_3||||u_1|||_s^3\\&\quad+c^4|c_4||||u_1|||_s^4+\frac{c^2}{2}|||u_2|||_s^2\\&\leqslant c|c_1|R+\left(\frac{c^2}{2(s-s')}+2c^3+c^2|c_2|+\frac{c^2}{2}\right)R^2+c^3|c_3|R^3+c^4|c_4|R^4\\&\leqslant\frac{C_{R,\gamma,\omega_1,\omega_2,\alpha,\beta_0,\beta}}{s-s'},\end{aligned}\tag{8}$$

类似地,利用同样的方法可以得到

$$
\begin{aligned}
|||H_2(u_1,u_2)|||_{s'} &\leqslant \frac{c^2}{s-s'}|||u_1|||_s|||u_2|||_s+\frac{c^2}{s-s'}\Big[2c^2|||u_1|||_s^2+|c_1||||u_1|||_s+c|c_2||||u_1|||_s^2 \\
&\quad +c^2|c_3||||u_1|||_s^3+c^3|c_4||||u_1|||_s^4+\frac{c}{2}|||u_2|||_s^2\Big] \\
&\leqslant \frac{C_{R,\gamma,\omega_1,\omega_2,\alpha,\beta_0,\beta}}{s-s'},
\end{aligned}\tag{9}
$$

于是结合 $0<s-s'<1$ 以及式(7)—(9)可得 $\boldsymbol{H}(u_1,u_2)$ 有界,从而定理 3 中条件(1)成立。特别地,当 $t=0$ 时,式(8)、(9)依旧成立,从而问题(6)中的方程满足条件(3)。

下面证明问题(6)中的方程满足定理 3 中的条件(2),令 $|||u_1-u_0|||_s\leqslant R$, $|||u_2-(-u_0')|||_s\leqslant R$, $|||v_1-u_0|||_s\leqslant R$, $|||v_2-(-u_0')|||_s\leqslant R$,根据定义 3,可以得到

$$
|||\boldsymbol{H}(u_1,u_2)-\boldsymbol{H}(v_1,v_2)|||_{s'}=|||H_1(u_1,u_2)-H_1(v_1,v_2)|||_{s'}+|||H_2(u_1,u_2)-H_2(v_1,v_2)|||_{s'},
$$

根据引理 3,有

$$
\begin{aligned}
&|||H_1(u_1,u_2)-H_1(v_1,v_2)|||_{s'} \\
\leqslant &\frac{1}{2}|||P_1(u_1^2-v_1^2)|||_{s'}+2|||P_2[\mu(u_1)u_1-\mu(v_1)v_1]|||_{s'}+|||P_2c_1(u_1-v_1)|||_{s'}+|||P_2c_2(u_1^2-v_1^2)|||_{s'} \\
&+|||P_2c_3(u_1^3-v_1^3)|||_{s'}+|||P_2c_4(u_1^4-v_1^4)|||_{s'}+\frac{1}{2}|||P_2(u_2^2-v_2^2)|||_{s'} \\
\leqslant &\frac{1}{2}\frac{c}{s-s'}|||(u_1+v_1)(u_1-v_1)|||_s+2c|||\mu(u_1)(u_1-v_1)|||_s+2c|||\mu(u_1-v_1)v_1|||_s+c|c_1||||u_1-v_1|||_s \\
&+c|c_2||||(u_1+v_1)(u_1-v_1)|||_s+c|c_3||||(u_1^2+u_1v_1+v_1^2)(u_1-v_1)|||_s \\
&+c|c_4||||(u_1^3+u_1^2v_1+u_1v_1^2+v_1^3)(u_1-v_1)|||_s+\frac{c}{2}|||(u_2+v_2)(u_2-v_2)|||_s,
\end{aligned}
$$

进一步根据引理 1 和引理 2,有

$$
\begin{aligned}
&|||H_1(u_1,u_2)-H_1(v_1,v_2)|||_{s'} \\
\leqslant &\Big[\frac{c^2}{2(s-s')}|||u_1+v_1|||_s+2c^3|||u_1|||_s+2c^3|||v_1|||_s+c|c_1|+c^2|c_2||||u_1+v_1|||_s+c^2|c_3||||u_1^2+u_1v_1+v_1^2|||_s \\
&+c^2|c_4||||u_1^3+u_1{}^2v_1+u_1v_1{}^2+v_1{}^3|||_s\Big]\times|||u_1-v_1|||_s+\frac{c^2}{2}|||u_2+v_2|||_s\times|||u_2-v_2|||_s \\
\leqslant &\Big[\frac{c^2}{s-s'}(|||u_0|||_s+R)+4c^3(|||u_0|||_s+R)+c|c_1|+2c^2|c_2|(|||u_0|||_s+R)+3c^3|c_3|(|||u_0|||_s+R)^2 \\
&+4c^4|c_4|(|||u_0|||_s+R)^3\Big]\times|||u_1-v_1|||_s+c^2(|||u_0'|||_s+R)\times|||u_2-v_2|||_s \\
\leqslant &\frac{C_{R,\gamma,\omega_1,\omega_2,\alpha,\beta_0,\beta}}{s-s'}|||(u_1,u_2)-(v_1,v_2)|||_s,
\end{aligned}
$$

结合上面的引理并用同样的方法进行估计,得

$$
\begin{aligned}
&|||H_2(u_1,u_2)-H_2(v_1,v_2)|||_{s'} \\
\leqslant &|||P_1(u_1u_2-v_1v_2)|||_{s'}+2|||P_1P_2[\mu(u_1)u_1-\mu(v_1)v_1]|||_{s'}+|||P_1P_2c_1(u_1-v_1)|||_{s'}+|||P_1P_2c_2(u_1^2-v_1^2)|||_{s'} \\
&+|||P_1P_2c_3(u_1^3-v_1^3)|||_{s'}+|||P_1P_2c_4(u_1^4-v_1^4)|||_{s'}+\frac{1}{2}|||P_1P_2(u_2^2-v_2^2)|||_{s'} \\
\leqslant &\frac{C_{R,\gamma,\omega_1,\omega_2,\alpha,\beta_0,\beta}}{s-s'}|||(u_1,u_2)-(v_1,v_2)|||_s,
\end{aligned}
$$

从而对任意的 $0<s'<s\leqslant 1$,存在一个常数 $C>0$,使得对任意的 $u_1,v_1\in\overline{B(u_0,R)}\in E_s$, $u_2,v_2\in\overline{B(u_0,R)}\in E_s$,都有

$$
|||\boldsymbol{H}(u_1,u_2)-\boldsymbol{H}(v_1,v_2)|||_{s'}\leqslant\frac{C}{s-s'}|||(u_1,u_2)-(v_1,v_2)|||_s。
$$

问题(6)中的方程满足定理 3 中的条件(2),由此可知问题(6)的方程满足定理 3 的 3 个条件,定理 1 证毕。

3 定理 2 的证明

3.1 预备知识

首先,为了得到定理 2,给出一个推广的 Ovsyannikov 定理。

定理 4[12] 假定$\{X_\delta\}_{0<\delta<1}$是一族递减的Banach 空间,也就是说对任意的$\delta'<\delta$,有$X_\delta<X_{\delta'}$且有$\|u\|_{\delta'}\leqslant\|u\|_\delta$,考虑如下 Cauchy 问题:

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=F(t,u(t)),\\ u(0)=u_0,\end{cases}$$

令 T,R 都是正数,$\sigma\geqslant1$,对于给定的$u_0\in X_1$,假设函数 F 满足下面的 3 个条件:

(1) 若对任意的函数 $u\in X_\delta$,当 $0<\delta'<\delta<1$ 时,函数 $t\mapsto u(t)$ 在$|t|<T$ 上解析,在$|t|<T$ 上连续,并且

$$\sup_{|t|<T}\|u(t)\|_\delta<R,$$

那么函数 $t\mapsto F(t,u(t))$在$|t|<T$ 上解析。

(2) 对任意的 $0<\delta'<\delta<1$,以及任意的 $u,v\in\overline{B(u_0,R)}\subset X_\delta$,存在一个常数 $L>0$ 使得

$$\sup_{|t|<T}\|F(t,u)-F(t,v)\|_{\delta'}\leqslant\frac{L}{(\delta-\delta')^\sigma}\|u-v\|_\delta,$$

其中 L 依赖于初值 u_0 和 R。

(3) 存在一个常数 $M>0$,其中 M 依赖于初值 u_0,使得对任意的 $0<\delta<1$,有

$$\sup_{|t|<T}\|F(t,0)\|_\delta\leqslant\frac{M}{(1-\delta)^\sigma}。$$

则存在$T_0\in(0,T)$和唯一的函数 $u(t)\in X_\delta$,当$|t|<\dfrac{T_0(1-\delta)^\sigma}{2^\sigma-1}$时,其中 $0<\delta<1$, $u(t)$解析并且恰好是上述 Cauchy 问题的解。

注 3 实际上,$T_0=\min\left\{\dfrac{1}{2^{2\sigma+4}L},\dfrac{(2^\sigma-1)R}{(2^\sigma-1)2^{2\sigma+3}LR+M}\right\}$是解最大存在时间的一个下界。

注 4 当 $\sigma=1$ 时上述定理化简为定理 3 抽象形式的 Cauchy-Kovalevsky 定理[8-9]。

为了估算方便,同样利用变换(4),可以将方程(2)的 Cauchy 问题化为如下形式[4]:

$$\begin{cases}u_t=F(u):=-\dfrac{1}{2}\partial_x(u^2)-\partial_x(1-\partial_x^2)^{-1}Q, & x\in\mathbf{R},\ t>0,\\ u(x,0)=u_0(x), & x\in\mathbf{R},\end{cases}\tag{10}$$

其中

$$Q(x,t)\doteq c_1'u^2+\frac{u_x^2}{2}+c_2'u^3+c_3'u^4,$$

且

$$c_1'=1+\frac{3\gamma^2\omega_2}{2\alpha^3}-\frac{\omega_1\gamma}{\alpha^2},\quad c_2'=\frac{\omega_1}{3\alpha^2}-\frac{\omega_2\gamma}{\alpha^3},\quad c_3'=\frac{\omega_2}{4\alpha^3},$$

同时 γ 满足三次多项式方程(3)。

在这一部分,解析性的定义和上述定义 1 一致,接下来,介绍 Sobolev-Gevrey 空间以及它的一些性质。

定义 4[15] 设 $s\in\mathbf{R}$, $\sigma,\delta>0$ 函数$f\in G_{\sigma,s}^\delta(\mathbf{R}^n)$当且仅当$f\in C^\infty(\mathbf{R}^n)$且满足

$$\|f\|_{G_{\sigma,s}^\delta(\mathbf{R}^n)}=\left(\int_{\mathbf{R}^n}(1+|\xi|^2)^s\mathrm{e}^{2\delta(1+|\xi|^2)^{\frac{1}{2\sigma}}}|\hat{f}(\xi)|^2\mathrm{d}\xi\right)^{\frac{1}{2}}<\infty。$$

注 5　由于 $\mathrm{e}^{\delta A^{\frac{1}{\sigma}}}f=\mathscr{F}^{-1}(\mathrm{e}^{\delta(1+|\xi|^2)^{\frac{1}{2\sigma}}}\hat{f})$,于是可以推断出 $\|f\|_{G^{\delta}_{\sigma,s}(\mathbf{R}^n)}=\|\mathrm{e}^{\delta A^{\frac{1}{\sigma}}}f\|_{H^s(\mathbf{R}^n)}$,又由于 H^s 空间的完备性,可知 $\|\cdot\|_{G^{\delta}_{\sigma,s}(\mathbf{R}^n)}$ 是 Banach 空间。

注 6　设 $0<\delta'<\delta$, $0<\sigma'<\sigma$, $s'<s$,则有嵌入关系 $G^{\delta}_{\sigma,s}(\mathbf{R}^n)\subset G^{\delta'}_{\sigma,s}(\mathbf{R}^n)$, $G^{\delta}_{\sigma',s}(\mathbf{R}^n)\subset G^{\delta}_{\sigma,s}(\mathbf{R}^n)$ 以及 $G^{\delta}_{\sigma,s}(\mathbf{R}^n)\subset G^{\delta}_{\sigma,s'}(\mathbf{R}^n)$,其中嵌入系数 $C=1$。

引理 4[12]　设 $s\in\mathbf{R}$, $\sigma>0$,则对任意的 $0<\delta'<\delta$,有

$$\|\partial_x f\|_{G^{\delta'}_{\sigma,s}(\mathbf{R}^n)}\leqslant\frac{\mathrm{e}^{-\sigma}\sigma^{\sigma}}{(\delta-\delta')^{\sigma}}\|f\|_{G^{\delta}_{\sigma,s}(\mathbf{R}^n)}。$$

引理 5[12]　设 $s>\dfrac{1}{2}$, $\sigma\geqslant1$, $\delta>0$,则存在一个常数 $C_s>0$,对任意的 $f,g\in G^{\delta}_{\sigma,s}(\mathbf{R})$,都有

$$\|fg\|_{G^{\delta}_{\sigma,s}(\mathbf{R})}\leqslant C_s\|f\|_{G^{\delta}_{\sigma,s}(\mathbf{R})}\|g\|_{G^{\delta}_{\sigma,s}(\mathbf{R})}。$$

引理 6[12]　对于任意的 $s\in\mathbf{R}$, $\sigma,\delta>0$, $u\in G^{\delta}_{\sigma,s}(\mathbf{R})$,有

$$\|\partial_x u\|_{G^{\delta}_{\sigma,s-1}(\mathbf{R})}\leqslant\|u\|_{G^{\delta}_{\sigma,s}(\mathbf{R})},$$

$$\|(1-\partial_x^2)^{-1}u\|_{G^{\delta}_{\sigma,s}(\mathbf{R})}=\|u\|_{G^{\delta}_{\sigma,s-2}(\mathbf{R})}\leqslant\|u\|_{G^{\delta}_{\sigma,s}(\mathbf{R})},$$

$$\|\partial_x(1-\partial_x^2)^{-1}u\|_{G^{\delta}_{\sigma,s}(\mathbf{R})}\leqslant\|u\|_{G^{\delta}_{\sigma,s-1}(\mathbf{R})}\leqslant\|u\|_{G^{\delta}_{\sigma,s}(\mathbf{R})}。$$

3.2　定理 2 的证明

下面证明问题(10)中的方程满足定理 4 中的条件(1)、(2)以及(3),所有的函数空间都在 $\mathbf{R}$ 上,为了简单起见,在下面省略 $\mathbf{R}$,对于任意的 $0<\delta'<\delta$,需要估计:

$$\|F(u)\|_{G^{\delta'}_{\sigma,q}}\leqslant\frac{1}{2}\|\partial_x(u^2)\|_{G^{\delta'}_{\sigma,q}}+\|\partial_x(1-\partial_x^2)^{-1}Q\|_{G^{\delta'}_{\sigma,q}},$$

利用引理 4 以及引理 5,有

$$\frac{1}{2}\|\partial_x(u^2)\|_{G^{\delta'}_{\sigma,q}}\leqslant\frac{\mathrm{e}^{-\sigma}\sigma^{\sigma}}{2(\delta-\delta')^{\sigma}}\|u^2\|_{G^{\delta}_{\sigma,q}}\leqslant C_q\frac{\mathrm{e}^{-\sigma}\sigma^{\sigma}}{2(\delta-\delta')^{\sigma}}\|u\|^2_{G^{\delta}_{\sigma,q}},$$

结合引理 6 可以得到

$$\|\partial_x(1-\partial_x^2)^{-1}c_1'u^2\|_{G^{\delta'}_{\sigma,q}}\leqslant|c_1'|\,\|u^2\|_{G^{\delta'}_{\sigma,q-1}}\leqslant|c_1'|C_q\|u\|^2_{G^{\delta}_{\sigma,q}},$$

类似地,可以得到

$$\left\|\partial_x(1-\partial_x^2)^{-1}\frac{1}{2}u_x^2\right\|_{G^{\delta'}_{\sigma,q}}\leqslant\frac{1}{2}\|u_x^2\|_{G^{\delta'}_{\sigma,q-1}}\leqslant\frac{1}{2}C_q\|u\|^2_{G^{\delta}_{\sigma,q}},$$

$$\|\partial_x(1-\partial_x^2)^{-1}c_2'u^3\|_{G^{\delta'}_{\sigma,q}}\leqslant|c_2'|C_q^2\|u\|^3_{G^{\delta}_{\sigma,q}},$$

$$\|\partial_x(1-\partial_x^2)^{-1}c_3'u^4\|_{G^{\delta'}_{\sigma,q}}\leqslant|c_3'|C_q^3\|u\|^4_{G^{\delta}_{\sigma,q}},$$

从而

$$\begin{aligned}\|\partial_x(1-\partial_x^2)^{-1}Q\|_{G^{\delta'}_{\sigma,q}}&\leqslant|c_1'|C_q\|u\|^2_{G^{\delta}_{\sigma,q}}+\frac{1}{2}C_q\|u\|^2_{G^{\delta}_{\sigma,q}}+|c_2'|C_q\|u\|^3_{G^{\delta}_{\sigma,q}}+|c_3'|C_q\|u\|^4_{G^{\delta}_{\sigma,q}}\\&\leqslant C_{q,\gamma,\omega_1,\omega_2,\alpha,\beta,\beta_0}(\|u\|^2_{G^{\delta}_{\sigma,q}}+\|u\|^3_{G^{\delta}_{\sigma,q}}+\|u\|^4_{G^{\delta}_{\sigma,q}}),\end{aligned}$$

又由于 $\delta-\delta'<1$,进一步有

$$\begin{aligned}\|F(u)\|_{G^{\delta'}_{\sigma,q}}&\leqslant\frac{1}{2}\|\partial_x(u^2)\|_{G^{\delta'}_{\sigma,q}}+\|\partial_x(1-\partial_x^2)^{-1}Q\|_{G^{\delta'}_{\sigma,q}}\\&\leqslant C_{q,\gamma,\omega_1,\omega_2,\alpha,\beta,\beta_0}\frac{(\mathrm{e}^{-\sigma}\sigma^{\sigma}+2)\|u\|^2_{G^{\delta}_{\sigma,q}}+2(\|u\|^3_{G^{\delta}_{\sigma,q}}+\|u\|^4_{G^{\delta}_{\sigma,q}})}{2(\delta-\delta')^{\sigma}},\end{aligned}$$

于是可以得出定理 4 中条件(1)成立,进一步可以得到问题(10)的方程满足条件(3),即存在 $M>0$,使得对任意的 $0<\delta<1$,有

$$\|F(u_0)\|_{G^{\delta}_{\sigma,q}}\leqslant C_{q,\gamma,\omega_1,\omega_2,\alpha,\beta,\beta_0}\frac{(\mathrm{e}^{-\sigma}\sigma^{\sigma}+2)\|u_0\|^2_{G^{1}_{\sigma,q}}+2(\|u_0\|^3_{G^{1}_{\sigma,q}}+\|u_0\|^4_{G^{1}_{\sigma,q}})}{2(1-\delta)^{\sigma}},$$

其中 $M=C_{q,\gamma,\omega_1,\omega_2,\alpha,\beta,\beta_0}\left(\left(\frac{\mathrm{e}^{-\sigma}\sigma^{\sigma}}{2}+1\right)\|u_0\|^2_{G^1_{\sigma,q}}+\|u_0\|^3_{G^1_{\sigma,q}}+\|u_0\|^4_{G^1_{\sigma,q}}\right)$。

下面证明问题(10)中的方程满足定理 4 中的条件(2),假设 $\|u-u_0\|_{G^{\delta}_{\sigma,q}}\leqslant R$, $\|v-u_0\|_{G^{\delta}_{\sigma,q}}\leqslant R$,根据引理 4 有

$$\begin{aligned}\|F(u)-F(v)\|_{G^{\delta'}_{\sigma,q}}&=\left\|-\frac{1}{2}\partial_x(u^2-v^2)-\partial_x(1-\partial_x^2)^{-1}[Q(x,t)-M(x,t)]\right\|_{G^{\delta'}_{\sigma,q}}\\&\leqslant\frac{\mathrm{e}^{-\sigma}\sigma^{\sigma}}{2(\delta-\delta')^{\sigma}}\|(u+v)(u-v)\|_{G^{\delta}_{\sigma,q}}+\|\partial_x(1-\partial_x^2)^{-1}[Q(x,t)-M(x,t)]\|_{G^{\delta'}_{\sigma,q}},\end{aligned}$$

其中

$$M(x,t)\doteq c_1'v^2+\frac{v_x^2}{2}+c_2'v^3+c_3'v^4,$$

且

$$Q(x,t)-M(x,t)=c_1'(u^2-v^2)+\frac{1}{2}(u_x^2-v_x^2)+c_2'(u^3-v^3)+c_3'(u^4-v^4)。$$

根据引理 5 可以得到

$$\|(u+v)(u-v)\|_{G^{\delta}_{\sigma,q}}\leqslant C_q\|u+v\|_{G^{\delta}_{\sigma,q}}\|u-v\|_{G^{\delta}_{\sigma,q}}\leqslant C_q(2\|u_0\|_{G^{\delta}_{\sigma,q}}+2R)\|u-v\|_{G^{\delta}_{\sigma,q}},$$

另外通过引理 4—6 有

$$\|\partial_x(1-\partial_x^2)^{-1}c_1'(u^2-v^2)\|_{G^{\delta'}_{\sigma,q}}\leqslant|c_1'|\|(u+v)(u-v)\|_{G^{\delta'}_{\sigma,q-1}}\leqslant|c_1'|C_q(2\|u_0\|_{G^{\delta}_{\sigma,q}}+2R)\|u-v\|_{G^{\delta}_{\sigma,q}},$$

类似地,有

$$\begin{aligned}\left\|\partial_x(1-\partial_x^2)^{-1}\frac{1}{2}(u_x^2-v_x^2)\right\|_{G^{\delta'}_{\sigma,q}}&\leqslant\frac{1}{2}C_q\|(u_x+v_x)(u_x-v_x)\|_{G^{\delta'}_{\sigma,q-1}}\\&\leqslant C_q(\|u_0\|_{G^{\delta}_{\sigma,q}}+R)\|u-v\|_{G^{\delta}_{\sigma,q}},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|\partial_x(1-\partial_x^2)^{-1}c_2'(u^3-v^3)\|_{G^{\delta'}_{\sigma,q}}&\leqslant|c_2'|C_q\|(u^2+uv+v^2)(u-v)\|_{G^{\delta'}_{\sigma,q-1}}\\&\leqslant6|c_2'|C_q^2(\|u_0\|^2_{G^{\delta}_{\sigma,q}}+R^2)\|u-v\|_{G^{\delta}_{\sigma,q}},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|\partial_x(1-\partial_x^2)^{-1}c_3'(u^4-v^4)\|_{G^{\delta'}_{\sigma,q}}&\leqslant|c_3'|C_q\|(u^3+u^2v+uv^2+v^3)(u-v)\|_{G^{\delta'}_{\sigma,q-1}}\\&\leqslant16|c'|C_q^3(\|u_0\|^3_{G^{\delta}_{\sigma,q}}+R^3)\|u-v\|_{G^{\delta}_{\sigma,q}},\end{aligned}$$

从而可以得到

$$\begin{aligned}&\|\partial_x(1-\partial_x^2)^{-1}[Q(x,t)-M(x,t)]\|_{G^{\delta'}_{\sigma,q}}\\&\leqslant C_{q,\gamma,\omega_1,\omega_2,\alpha,\beta,\beta_0}[3(\|u_0\|_{G^{\delta}_{\sigma,q}}+R)+6(\|u_0\|^2_{G^{\delta}_{\sigma,q}}+R^2)+16(\|u_0\|^3_{G^{\delta}_{\sigma,q}}+R^3)]\|u-v\|_{G^{\delta}_{\sigma,q}},\end{aligned}$$

综合上述估计可得

$$\begin{aligned}\|F(u)-F(v)\|_{G^{\delta'}_{\sigma,q}}&\leqslant\frac{\mathrm{e}^{-\sigma}\sigma^{\sigma}}{2(\delta-\delta')^{\sigma}}\|(u+v)(u-v)\|_{G^{\delta}_{\sigma,q}}+\|\partial_x(1-\partial_x^2)^{-1}[Q(x,t)-M(x,t)]\|_{G^{\delta'}_{\sigma,q}}\\&\leqslant C_{q,\gamma,\omega_1,\omega_2,\alpha,\beta,\beta_0}\frac{(\mathrm{e}^{-\sigma}\sigma^{\sigma}+3)(\|u_0\|_{G^1_{\sigma,q}}+R)+6(\|u_0\|^2_{G^1_{\sigma,q}}+R^2)+16(\|u_0\|^3_{G^1_{\sigma,q}}+R^3)}{(\delta-\delta')^{\sigma}}\|u-v\|_{G^{\delta}_{\sigma,q}},\end{aligned}$$

以上就证明了定理 4 中的条件(2),并且

$$L=C_{q,\gamma,\omega_1,\omega_2,\alpha,\beta,\beta_0}[(\mathrm{e}^{-\sigma}\sigma^{\sigma}+3)(\|u_0\|_{G^1_{\sigma,q}}+R)+6(\|u_0\|^2_{G^1_{\sigma,q}}+R^2)+16(\|u_0\|^3_{G^1_{\sigma,q}}+R^3)]。$$

根据定理 4 以及注 2 知,存在 $T_0\in(0,T)$ 和唯一的解 $u(t)\in G^{\delta}_{\sigma,q}$,当 $|t|<\frac{T_0(1-\delta)^{\sigma}}{2^{\sigma}-1}$ 时,其中 $0<\delta<1$, $u(t)$ 解析,且 $T_0=\min\left\{\frac{1}{2^{2\sigma+4}L},\ \frac{(2^{\sigma}-1)R}{(2^{\sigma}-1)2^{2\sigma+3}LR+M}\right\}$。设 $R=\|u_0\|_{G^1_{\sigma,q}}$,由以上证明可知

$$L=C_{q,\gamma,\omega_1,\omega_2,\alpha,\beta,\beta_0}[2(\mathrm{e}^{-\sigma}\sigma^{\sigma}+3)\|u_0\|_{G^1_{\sigma,q}}+12\|u_0\|^2_{G^1_{\sigma,q}}+32\|u_0\|^3_{G^1_{\sigma,q}}],$$

通过简单估算可知 $M\leqslant2^{2\sigma+3}LR$,于是有

$$T_0=\frac{1}{2^{2\sigma+5}C_{q,\gamma,\omega_1,\omega_2,\alpha,\beta,\beta_0}\left[\left(\mathrm{e}^{-\sigma}\sigma^{\sigma}+3\right)\|u_0\|_{G^1_{\sigma,q}}+6\|u_0\|^2_{G^1_{\sigma,q}}+16\|u_0\|^3_{G^1_{\sigma,q}}\right]},$$

定理 2 证毕。

参考文献：

[1] MOON B. Nonexistence of periodic peaked traveling wave solutions to a rotation μ-Camassa−Holm equation with Coriolis effect [J]. Nonlinear Analysis: Real World Applications, 2023, 70:103793.

[2] GUI Guilong, LIU Yue, SUN Junwei. A nonlocal shallow-water model arising from the full water waves with the Coriolis effect[J]. Journal of Mathematical Fluid Mechanics, 2019, 21(2):27.

[3] CAMASSA R, HOLM D D. An integrable shallow water equation with peaked solitons[J]. Physical Review Letters, 1993, 71(11):1661-1664.

[4] XIAO Li, QI Xueyuan, LI Fengquan. Non-uniform dependence on initial data for the rotation-Camassa−Holm equation[J]. Journal of Mathematical Fluid Mechanics, 2022, 24(4):107.

[5] GUO Yingying, YIN Zhaoyang. The Cauchy problem of the rotation Camassa−Holm equation in equatorial water waves[J]. Applicable Analysis, 2021, 100(12):2547-2563.

[6] ZHANG Lei. Non-uniform dependence and well-posedness for the rotation-Camassa−Holm equation on the torus[J]. Journal of Differential Equations, 2019, 267(9):5049-5083.

[7] KHESIN B, LENELLS J, MISIOŁEK G. Generalized Hunter−Saxton equation and the geometry of the group of circle diffeomorphisms[J]. Mathematische Annalen, 2008, 342(3):617-656.

[8] BAOUENDI M S, GOULAOUIC C. Sharp estimates for analytic pseudodifferential operators and application to Cauchy problems[J]. Journal of Differential Equations, 1983, 48(2):241-268.

[9] BAOUENDI M S, GOULAOUIC C. Remarks on the abstract form of nonlinear Cauchy−Kovalevsky theorems[J]. Communications in Partial Differential Equations, 1977, 2(11):1151-1162.

[10] HIMONAS A A, MISIOŁEK G. Analyticity of the Cauchy problem for an integrable evolution equation[J]. Mathematische Annalen, 2003, 327(3):575-584.

[11] FU Ying. A note on the Cauchy problem of a modified Camassa−Holm equation with cubic nonlinearity[J]. Discrete & Continuous Dynamical Systems−Series A, 2015, 35(5):2011-2039.

[12] GALSTIAN A, YAGDJIAN K. Global solutions for semilinear Klein−Gordon equations in FLRW spacetimes[J]. Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, 2015, 113:339-356.

[13] 朱长江，邓引斌. 偏微分方程教程[M]. 北京：科学出版社，2005：199-200.
ZHU Changjiang, DENG Yinbin. An introduction to partial differential equations[M]. Beijing: Science Press, 2005:199-200.

[14] YAN Kai, YIN Zhaoyang. Analytic solutions of the Cauchy problem for two-component shallow water systems[J]. Mathematische Zeitschrift, 2011, 269(3):1113-1127.

[15] PALMIERI A, REISSIG M. A competition between Fujita and Strauss type exponents for blow-up of semi-linear wave equations with scale-invariant damping and mass[J]. Journal of Differential Equations, 2019, 266(2/3):1176-1220.

（编辑：胡春燕）