山东大学学报(理学版)2025 年 12 月 第 60 卷 第 12 期
Journal of Shandong University(*Natural Science*), Vol.60, No.12, 2025 http://lxbwk.njournal.sdu.edu.cn

文章编号:1671-9352(2025)12-0149-07 DOI:10.6040/j.issn.1671-9352.0.2024.191

调和映射空间 $\mathscr{H}_{H,1-\alpha}^{p}$

黄琼,唐树安*
(贵州师范大学数学科学学院, 贵州 贵阳 550001)

摘要:引进单位圆盘 D 上的一类调和空间 $\mathscr{H}_{H,1-\alpha}^{p}$ 并给出这个空间的一些基本性质,然后将经典 Hardy-Littlwood 定理推广至调和映射情形。考虑小调和空间 $\mathscr{H}_{H,1-\alpha,0}^{p}$ 并证明它是空间 $\mathscr{H}_{H,1-\alpha}^{p}$ 的一个闭子空间并给出一个判别准则。

关键词:调和 $\mathscr{H}_{H,1-\alpha}^{p}$ 空间;小调和 $\mathscr{H}_{H,1-\alpha,0}^{p}$ 空间;Hardy-Littlwood 定理
中图分类号:O174 **文献标志码**:A
引用格式:黄琼,唐树安. 调和映射空间 $\mathscr{H}_{H,1-\alpha}^{p}$[J]. 山东大学学报(理学版),2025,60(12):149-155.

On the space of harmonic mapping $\mathscr{H}_{H,1-\alpha}^{p}$

HUANG Qiong, TANG Shu-an*
(School of Mathematics Science, Guizhou Normal University, Guiyang 550001, Guizhou, China)

Abstract: In this paper, we introduce and investigate a class $\mathscr{H}_{H,1-\alpha}^{p}$ of harmonic space on the unit disk D and characterize some fundamental properties of this space. Then, we extend the classical Hardy-Littlewood theorem to the case of harmonic mappings. We consider the little harmonic space $\mathscr{H}_{H,1-\alpha,0}^{p}$, and prove that it is a closed subspace of the space $\mathscr{H}_{H,1-\alpha}^{p}$ and provide a criteiton for belonging to $\mathscr{H}_{H,1-\alpha,0}^{p}$.

Key words: harmonic $\mathscr{H}_{H,1-\alpha}^{p}$ space; the little harmonic $\mathscr{H}_{H,1-\alpha,0}^{p}$ space; Hardy-Littlwood theorem

1 研究背景及主要结果

用 $D=\{z\in\mathbf{C}:|z|<1\}$ 表示开单位圆盘,$\overline{D}=\{z\in\mathbf{C}:|z|\leqslant 1\}$ 表示闭单位圆盘,$H(D)$ 表示 D 上的所有解析函数组成的空间。如果 D 内的一个复值函数 h 满足拉普拉斯方程

$$\Delta h=4h_{z\bar{z}}=0,$$

则称它是调和的,其中 $h_{z\bar{z}}$ 表示 h 的混合复数二阶偏导数。单位圆 D 内的调和映射 h 具有标准的分解 $h=f+\overline{g}$,其中 f 和 g 在 D 内解析且 $g(0)=0$。更多调和映射的知识见文献[1]。

调和映射是解析函数的自然推广,近年来,很多专家学者对经典解析函数空间的调和扩展进行了大量的研究,得到了很多重要而有趣的结果。Aljuaid 等[2-3]研究调和 α-Bloch 空间以及调和 Zygmund 空间 Z_H,文献[4]研究调和 V^H空间,文献[5] 研究调和 Q 型空间,Chen 等[6]研究调和 Lipschitz-type 空间。更多相关研究见文献[7]。本文将研究一类调和的光滑函数空间 $\mathscr{H}_{H,1-\alpha}^{p}$,首先给出一些相关定义。

设 $0<p<\infty$, $f\in H(D)$,如果

$$\sup_{0<r<1} M_p(r,f)<\infty ,$$

则称 f 属于 H^p空间,这里

收稿日期:2024-05-27; **网络出版时间**:2024-12-02 18:30:16
基金项目:国家自然科学基金资助项目(12061022);贵州省科技厅基础研究基金项目(ZK[2021] 一般 001);贵州师范大学学术新苗基金项目([2021]A03)
第一作者:黄琼(2000—),女,硕士研究生,研究方向为复分析. E-mail:571407093@qq.com
* **通信作者**:唐树安(1982—),男,教授,博士生导师,博士,研究方向为复分析. E-mail:tsaflyhigher@163.com

$$M_p(r,f)=\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(re^{i\theta})|^p d\theta\right)^{\frac{1}{p}}。$$

关于经典解析 H^p 空间的性质，见文献[8]。

设 $1\leqslant p<\infty$，$0\leqslant\alpha\leqslant 1$，空间 $H^p_{1-\alpha}$ 定义为

$$H^p_{1-\alpha}=\{f\in H(D):\|f\|_{1-\alpha,p}=\sup_{z\in D}(1-|z|^2)^{1-\alpha}M_p(|z|,f')<\infty\}。$$

当 $\alpha=0$ 时，此空间称为 F_p 空间[9]，当 $\alpha=1$ 时，此空间是 S^p 空间，且

$$S^p\subset H^p_{1-\alpha}\subset F_p。$$

用 $H^p_{1-\alpha,0}$ 表示小 $H^p_{1-\alpha}$ 空间，由所有 $f\in H^p_{1-\alpha}$ 组成并满足

$$\sup_{r\to 1}(1-r^2)^{1-\alpha}M_p(r,f')=0。$$

本文将研究解析函数空间 $H^p_{1-\alpha}$ 的调和推广，首先给出调和映射空间 $\mathscr{H}^p_{H,1-\alpha}$ 的定义。设 $1\leqslant p<\infty$，$0\leqslant\alpha\leqslant 1$，$h$ 是 D 上的调和映射，$z\in D$ 且 $|z|=r$，如果

$$\|h\|_*=\sup_{z\in D}(1-|z|^2)^{1-\alpha}M_p(r,h_z+h_{\bar z})<\infty, \tag{1}$$

则称 h 属于调和 $\mathscr{H}^p_{H,1-\alpha}$ 空间。其中

$$M_p(r,h_z+h_{\bar z})=\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(|h_z(re^{i\theta})|+|h_{\bar z}(re^{i\theta})|)^p d\theta\right)^{\frac{1}{p}}。$$

如果调和映射 $h\in\mathscr{H}^p_{H,1-\alpha}$ 且满足

$$\lim_{|z|\to 1}(1-|z|^2)^{1-\alpha}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(|h_z(z)|+|h_{\bar z}(z)|)^p d\theta\right)^{\frac{1}{p}}=0,$$

则称 h 属于小调和 $\mathscr{H}^p_{H,1-\alpha,0}$ 空间。如果 $h\in H(D)$，那么 $h_{\bar z}=0$，因此调和映射空间 $\mathscr{H}^p_{H,1-\alpha}$ 与 $\mathscr{H}^p_{H,1-\alpha,0}$ 和解析函数空间 $H^p_{1-\alpha}$ 与 $H^p_{1-\alpha,0}$ 重合。

本文给出调和映射空间 $\mathscr{H}^p_{H,1-\alpha}$ 的一些基本刻画，首先证明在一定范数下，它成为 Banach 空间。

定理 1 设 $1\leqslant p<\infty$，$0\leqslant\alpha\leqslant 1$，$\mathscr{H}^p_{H,1-\alpha}$ 空间在范数

$$\|h\|=|h(0)|+\|h\|_*$$

下是一个 Banach 空间。

接下来证明 $\mathscr{H}^p_{H,1-\alpha}$ 具有 Möbius 不变性。

定理 2 设 $1\leqslant p<\infty$，$0\leqslant\alpha\leqslant 1$。$\mathscr{H}^p_{H,1-\alpha}$ 是一个 Möbius 不变空间。

设 $\varphi\in L^p(0,2\pi)$，$1\leqslant p<\infty$，$0<\alpha\leqslant 1$。如果 $\omega_p(t)=O(t^\alpha)$，则称 φ 属于空间 Λ^p_α。这里

$$\omega_p(t)=\omega_p(t;\varphi)=\sup_{0<h\leqslant t}\left(\int_0^{2\pi}|\varphi(x+h)-\varphi(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

称为 p 阶连续积分模。著名的 Hardy-Littlewood 定理给出了函数空间 Λ^p_α 一个充分必要的刻画。

定理 3[8]（Hardy-Littlewood） 设 $1\leqslant p<\infty$，$0\leqslant\alpha\leqslant 1$，$f\in H^p$，则 $f(e^{i\theta})\in\Lambda^p_\alpha$ 当且仅当 $f\in H^p_{1-\alpha}$。

本文将定理 3 推广至调和映射情形。

定理 4 设 $1\leqslant p<\infty$，$0\leqslant\alpha\leqslant 1$，$h(z)$ 是 D 上的调和映射，则 $h(e^{i\theta})\in\Lambda^p_\alpha$ 当且仅当 $h\in\mathscr{H}^p_{H,1-\alpha}$。

对于小调和映射空间 $\mathscr{H}^p_{H,1-\alpha,0}$，证明它是一个闭子空间。

定理 5 设 $1\leqslant p<\infty$，$\mathscr{H}^p_{H,1-\alpha,0}$ 是 $\mathscr{H}^p_{H,1-\alpha}$ 的一个闭子空间。

本文也给出 $h\in\mathscr{H}^p_{H,1-\alpha,0}$ 的一个判别准则。

定理 6 设 $1\leqslant p<\infty$，$h\in\mathscr{H}^p_{H,1-\alpha}$，则 $h\in\mathscr{H}^p_{H,1-\alpha,0}$ 当且仅当 $\|h_t-h\|_*\to 0$，$t\to 1$，其中 $h_t(z)=h(tz)$，这里 $z\in D$，$t\in(0,1)$。

2 调和映射空间 $\mathscr{H}^p_{H,1-\alpha}$ 的基本性质

本章将证明调和映射空间 $\mathscr{H}^p_{H,1-\alpha}$ 是一个 Banach 空间并具有 Möbius 不变性。如果 h 在 D 上解析，则

$h_{\bar z}=0$，因此 $\|h\|_*=\|f\|_{1-\alpha,p}$。当 h 是 D 上的调和映射，由标准分解有 $h=f+\overline{g}$，直接计算得到 $h_z=f'$，$h_{\bar z}=\overline{g}'$，所以式(1)可以写为

$$\|h\|_*=\sup_{z\in D}(1-|z|^2)^{1-\alpha}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(|f'(re^{i\theta})|+|g'(re^{i\theta})|^p d\theta\right)^{\frac{1}{p}}<\infty。$$

因此可以得到

$$\frac{1}{2}(\|f\|_{1-\alpha,p}+\|g\|_{1-\alpha,p})\leqslant\max\{\|f\|_{1-\alpha,p},\|g\|_{1-\alpha,p}\}\leqslant\|h\|_*\leqslant\|f\|_{1-\alpha,p}+\|g\|_{1-\alpha,p}。\tag{2}$$

定理 1 的证明　假设 $\{h_n\}$ 是 Cauchy 列。只需要证明存在 $h\in\mathscr{H}^p_{H,1-\alpha}$，使得 $\|h_n-h\|\to0$，当 $n\to\infty$，对任意的 $n\in\mathbf{N}$，设 $f_n,g_n\in H^p_{1-\alpha}$，$g_n(0)=0$，$h_n=f_n+\overline{g}_n$。对 $\varepsilon>0$，由于 $\{h_n\}$ 是 $\mathscr{H}^p_{H,1-\alpha}$ 中的 Cauchy 列，因此存在 $N\in\mathbf{N}$，使得当 $n,m\geqslant N$ 时，有

$$\|h_n-h_m\|<\varepsilon,$$

由式(2)，对于所有的 $n,m\geqslant N$，有

$$\|f_n-f_m\|_{1-\alpha,p}\leqslant\|h_n-h_m\|<\varepsilon,$$
$$\|g_n-g_m\|_{1-\alpha,p}\leqslant\|h_n-h_m\|<\varepsilon,$$

因此 $\{f_n\}$ 和 $\{g_n\}$ 是 $H^p_{1-\alpha}$ 中的 Cauchy 列。注意到 $H^p_{1-\alpha}$ 空间在范数

$$\|f\|_{H^p_{1-\alpha}}=|f(0)|+\|f\|_{1-\alpha,p}$$

下是 Banach 空间，所以存在 $f,g\in H^p_{1-\alpha}$，使得

$$\|f_n-f\|_{H^p_{1-\alpha}}\to0,\quad\|g_n-g\|_{H^p_{1-\alpha}}\to0,\quad n\to\infty。$$

注意到对所有的 $n\in\mathbf{N}$，$g_n(0)=0$，所以 $g(0)=0$。

设 $h=f+\overline{g}$，由式(2)，有 $h\in\mathscr{H}^p_{H,1-\alpha}$。下面证明

$$\lim_{n\to\infty}\|h_n-h\|=0。\tag{3}$$

实际上，对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 $N\in\mathbf{N}$，使得对所有的 $n\geqslant N$，有

$$\|f_n-f\|_{H^p_{1-\alpha}}<\frac{\varepsilon}{2},\quad\|g_n-g\|_{H^p_{1-\alpha}}<\frac{\varepsilon}{2}。$$

所以对所有的 $n\geqslant N$，有

$$\begin{aligned}\|h_n-h\|=&|f_n(0)+\overline{g}_n(0)-f(0)-\overline{g}(0)|\\&+\sup_{z\in D}(1-|z|^2)^{1-\alpha}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(|f_n'(z)-f'(z)|+|g_n'(z)-g'(z)|)^p d\theta\right\}^{\frac{1}{p}}\\ \leqslant&|f_n(0)-f(0)|+|g_n(0)-g(0)|\\&+\sup_{z\in D}(1-|z|^2)^{1-\alpha}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f_n'(z)-f'(z)|^p d\theta\right\}^{\frac{1}{p}}\\&+\sup_{z\in D}(1-|z|^2)^{1-\alpha}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|g_n'(z)-g'(z)|^p d\theta\right\}^{\frac{1}{p}}\\ =&\|f_n-f\|_{H^p_{1-\alpha}}+\|g_n-g\|_{H^p_{1-\alpha}}\\ <&\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,\end{aligned}$$

因此，式(3)成立，这说明调和映射空间 $\mathscr{H}^p_{H,1-\alpha}$ 在范数 $\|h\|=|h(0)|+\|h\|_*$ 下是一个 Banach 空间。定理证明完毕。

下面开始证明调和映射空间 $\mathscr{H}^p_{H,1-\alpha}$ 具有 Möbius 不变性。

定理 2 的证明　设 $b\in D$。对任意 $z=re^{i\theta}\in D$，令

$$\varphi_b(z)=\frac{b-z}{1-\overline{b}z}。$$

为说明 $\mathscr{H}^p_{H,1-\alpha}$ 具有 Möbius 不变性，只需证明对于任意 $h\in\mathscr{H}^p_{H,1-\alpha}$，都有 $h\circ\varphi_b\in\mathscr{H}^p_{H,1-\alpha}$。

通过简单计算，得到

$$|\varphi_b'(z)|=\frac{1-|b|^2}{|1-\bar{b}z|^2},$$

$$1-|\varphi_b(z)|^2=\frac{(1-|b|^2)(1-|z|^2)}{|1-\bar{b}z|^2}=(1-|z|^2)|\varphi_b'(z)|。$$

因此

$$\left|\frac{\partial}{\partial z}(h\circ\varphi_b)(z)\right|=|\varphi_b'(z)(h_z\circ\varphi_b)(z)|,$$

$$\left|\frac{\partial}{\partial \bar{z}}(h\circ\varphi_b)(z)\right|=|\varphi_b'(z)(h_{\bar{z}}\circ\varphi_b)(z)|,$$

所以

$$\|(h\circ\varphi_b)(z)\|_*=\sup_{z\in D}(1-|z|^2)^{1-\alpha}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(|\varphi_b'(z)(h_z\circ\varphi_b)(z)|+|\varphi_b'(z)(h_{\bar{z}}\circ\varphi_b)(z)|)^p\mathrm{d}\theta\right)^{\frac{1}{p}}。$$

作变量替换 $re^{it}=\varphi_b(z)$,有

$$\begin{aligned}
&\|(h\circ\varphi_b)(z)\|_*\\
&=\sup_{z\in D}(1-|\varphi_b(re^{it})|^2)^{1-\alpha}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(|h_z(re^{it})|+|h_{\bar{z}}(re^{it})|)^p|\varphi_b'[\varphi_b(re^{it})]|^p|\varphi_b'(re^{it})|\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}}\\
&=\sup_{z\in D}(1-|re^{it}|^2)^{1-\alpha}|\varphi_b'(re^{it})|^{1-\alpha}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(|h_z(re^{it})|+|h_{\bar{z}}(re^{it})|)^p|\varphi_b'(re^{it})|^{1-p}\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}}\\
&\leqslant\sup_{z\in D}(1-|re^{it}|^2)^{1-\alpha}\left(\frac{1+|b|}{1-|b|}\right)^{1-\alpha}\left(\frac{1+|b|}{1-|b|}\right)^{\frac{1}{p}-1}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(|h_z(re^{it})|+|h_{\bar{z}}(re^{it})|)^p\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}}\\
&=\left(\frac{1+|b|}{1-|b|}\right)^{\frac{1}{p}-\alpha}\|h\|_*。
\end{aligned}$$

因此$h\circ\varphi_b\in\mathscr{H}^p_{H,1-\alpha}$。所以调和 $\mathscr{H}^p_{H,1-\alpha}$空间具有 Möbius 不变性。证毕。

3 Hardy-Littlewood 定理的调和推广

证明定理 4,这个结果将经典的 Hardy-Littlewood 定理推广至调和映射情形。

定理 4 的证明 设 $\|h\|_*<\infty$。设 $h=f+\bar{g}$, $g(0)=0$, $f,g\in H(D)$,则有 $h_z=f'$, $h_{\bar{z}}=\overline{g'}$。设 $0<\rho<r<1$, $0<\varphi-\theta<2\pi$。则

$$\begin{aligned}
|h(re^{i\varphi})-h(re^{i\theta})|&=|f(re^{i\varphi})+\bar{g}(re^{i\varphi})-f(re^{i\theta})-\bar{g}(re^{i\theta})|\\
&\leqslant|f(re^{i\varphi})-f(re^{i\theta})|+|g(re^{i\varphi})-g(re^{i\theta})|\\
&\leqslant\int_\rho^r|f'(se^{i\theta})|\mathrm{d}s+\int_\rho^r|f'(se^{i\varphi})|\mathrm{d}s+\int_\theta^\varphi|f'(\rho e^{it})|\mathrm{d}t\\
&\quad+\int_\rho^r|g'(se^{i\theta})|\mathrm{d}s+\int_\rho^r|g'(se^{i\varphi})|\mathrm{d}s+\int_\theta^\varphi|g'(\rho e^{it})|\mathrm{d}t\\
&=\int_\rho^r(|f'(se^{i\theta})|+|g'(se^{i\theta})|)\mathrm{d}s+\int_\rho^r(|f'(se^{i\varphi})|+|g'(se^{i\varphi})|)\mathrm{d}s\\
&\quad+\int_\theta^\varphi(|f'(\rho e^{it})|+|g'(\rho e^{it})|)\mathrm{d}t。
\end{aligned}$$

选择 k, $0<k<\dfrac{1}{2}$,设 $\varphi=\theta+k$。应用广义 Minkowski's 不等式[10],得到

$$\begin{aligned}
\left(\int_0^{2\pi}|h(re^{i(\theta+k)})-h(re^{i\theta})|^p\mathrm{d}\theta\right)^{\frac{1}{p}}&\leqslant\left(\int_0^{2\pi}\left(\int_\rho^r(|f'(se^{i\theta})|+|g'(se^{i\theta})|)\mathrm{d}s\right)^p\mathrm{d}\theta\right)^{\frac{1}{p}}\\
&\quad+\left(\int_0^{2\pi}\left(\int_\rho^r(|f'(se^{i(\theta+k)})|+|g'(se^{i(\theta+k)})|)\mathrm{d}s\right)^p\mathrm{d}\theta\right)^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}$$

$$+\left(\int_0^{2\pi}\left(\int_\theta^{(\theta+k)}(|f'(\rho e^{it})|+|g'(\rho e^{it})|)dt\right)^p d\theta\right)^{\frac{1}{p}}$$
$$\leqslant 2\int_\rho^r M_p(s,h_z+h_{\bar z})ds+kM_p(\rho,h_z+h_{\bar z})。$$

这里 r 和 ρ 是任意的。假设 $r>1-k$,令 $\rho=r-k$。由于 $\|h\|_*<\infty$,对所有的 $r>1-k$,

$$\begin{aligned}2\int_\rho^r M_p(s,h_z+h_{\bar z})ds+kM_p(\rho,h_z+h_{\bar z})&\leqslant 2\int_\rho^r\frac{C}{(1-s^2)^{1-\alpha}}ds+k\frac{C}{(1-\rho^2)^{1-\alpha}}\\&\leqslant 2\int_\rho^r\frac{C}{(1-s)^{1-\alpha}}ds+k\frac{C}{(1-\rho)^{1-\alpha}}\\&=\frac{2C}{\alpha}(1-\rho)^\alpha-\frac{2C}{\alpha}(1-r)^\alpha+k\frac{C}{(1-\rho)^{1-\alpha}}\\&\leqslant C(1-r+k)^\alpha\left(\frac{2}{\alpha}+\frac{k}{1-r+k}\right)\\&\leqslant C(2k)^\alpha\left(\frac{2}{\alpha}+1\right)\\&\leqslant C'k^\alpha。\end{aligned}$$

因此有

$$\left(\int_0^{2\pi}|h(re^{i(\theta+k)})-h(re^{i\theta})|^p d\theta\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant C'k^\alpha,$$

其中 C' 与 r 无关。令 $r\to 1$,就有 $h(e^{i\theta})\in\Lambda_\alpha^p$。

反过来,设 $h(e^{i\theta})\in\Lambda_\alpha^p$。$h(z)$ 在 D 上调和,则

$$h(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1-|z|^2}{|e^{it}-z|^2}h(e^{it})dt,\quad z=re^{i\theta}\in D。$$

令 $z=|z|e^{i\tau}\in D$。由文献[4]中定理 1.8 及注 1.1,得到

$$|h_z(z)|+|h_{\bar z}(z)|=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{|h(e^{i(t+\tau)})-h(e^{i\tau})|}{|e^{it}-|z||^2}dt。$$

因此根据广义 Minkowski's 不等式,有

$$\begin{aligned}&\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(|h_z(z)|+|h_{\bar z}(z)|)^p d\theta\right)^{\frac{1}{p}}\\&\leqslant\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{|h(e^{i(t+\tau)})-h(e^{i\tau})|}{|e^{it}-|z||^2}dt\right)^p d\theta\right)^{\frac{1}{p}}\\&\leqslant\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|h(e^{i(t+\tau)})-h(e^{i\tau})|^p d\theta\right)^{\frac{1}{p}}\frac{1}{1-2|z|\cos t+|z|^2}dt\\&\leqslant\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{C|t|^\alpha}{1-2|z|\cos t+|z|^2}dt。\end{aligned}$$

分两种情形:

(Ⅰ) $|z|\leqslant\frac{1}{2}$。此时有 $(1-|z|^2)\geqslant\frac{1}{4}$,推出

$$\int_0^\pi\frac{t^\alpha}{1-2|z|\cos t+|z|^2}dt\leqslant\int_0^\pi\frac{t^\alpha}{(1-|z|)^2+4|z|\frac{t^2}{\pi^2}}dt\leqslant 4\int_0^\pi t^\alpha dt=\frac{4\pi^{\alpha+1}}{\alpha+1}。$$

所以

$$(1-|z|^2)^{1-\alpha}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(|h_z(re^{i\theta})|+|h_{\bar z}(re^{i\theta})|)^p d\theta\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant\frac{8\pi^\alpha}{\alpha+1}<\infty。\tag{4}$$

(Ⅱ) $\frac{1}{2}\leqslant|z|<1$。令 $s=\frac{t}{1-|z|}$,则 $\frac{4|z|}{\pi^2}<1$。于是存在常数 $C>0$,使得

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(|h_z(z)|+|h_{\bar z}(z)|)^p\mathrm{d}\theta\right)^{\frac{1}{p}} &\leqslant \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{C|t|^\alpha}{1-2|z|\cos t+|z|^2}\mathrm{d}t\\
&\leqslant C\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{t^\alpha}{(1-|z|)^2+4|z|\frac{t^2}{\pi^2}}\mathrm{d}t\\
&=C\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{s^\alpha(1-|z|)^{\alpha+1}}{(1-|z|)^2+\frac{4|z|}{\pi^2}(1-|z|)^2s^2}\mathrm{d}s\\
&\leqslant C\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{s^\alpha(1-|z|)^{\alpha-1}}{\frac{4|z|}{\pi^2}(1+s^2)}\mathrm{d}s\\
&=C\frac{\pi}{2|z|}(1-|z|)^{\alpha-1}\int_0^{\infty}\frac{s^\alpha}{1+s^2}\mathrm{d}s\\
&\leqslant C\pi(1-|z|^2)^{\alpha-1}\left(\int_0^1\frac{s^\alpha}{1+s^2}\mathrm{d}s+\int_1^{\infty}\frac{s^\alpha}{1+s^2}\mathrm{d}s\right)\\
&\leqslant C\pi(1-|z|^2)^{\alpha-1}\left(\frac{\pi}{4}+\int_1^{\infty}\frac{s^\alpha}{1+s^2}\mathrm{d}s\right)。
\end{aligned}
$$

由于 $\int_1^{\infty}\frac{s^\alpha}{1+s^2}\mathrm{d}s\leqslant\int_1^{\infty}\frac{1}{s^{2-\alpha}}\mathrm{d}s<\infty$，则有

$$
(1-|z|^2)^{1-\alpha}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(|h_z(z)|+|h_{\bar z}(z)|)^p\mathrm{d}\theta\right\}^{\frac{1}{p}}<C'。\tag{5}
$$

根据式(4)、(5)，有

$$
\sup_{z\in D}(1-|z|^2)^{1-\alpha}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(|h_z(z)|+|h_{\bar z}(z)|)^p\mathrm{d}\theta\right)^{\frac{1}{p}}<\infty。
$$

定理证明完毕。

4 小调和映射空间 $\mathscr{H}^p_{H,1-\alpha,0}$ 的一些刻画

定理5的证明 先证明 $\mathscr{H}^p_{H,1-\alpha,0}$ 是 $\mathscr{H}^p_{H,1-\alpha}$ 的闭子空间。考虑 $\mathscr{H}^p_{H,1-\alpha,0}$ 中的一个序列 $h_n(n\in\mathbf{N})$，并且收敛于 $h\in\mathscr{H}^p_{H,1-\alpha}$，需要证明 $h\in\mathscr{H}^p_{H,1-\alpha,0}$。

由于 $h_n\in\mathscr{H}^p_{H,1-\alpha,0}$，对任意 $\varepsilon>0$，存在 $r_0\in(0,1)$，使得当 $|z|>r_0$ 时，有

$$
(1-|z|^2)^{1-\alpha}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(|h_{n,z}(z)|+|h_{n,\bar z}(z)|)^p\mathrm{d}\theta\right)^{\frac{1}{p}}<\varepsilon。
$$

因为 h_n 收敛到 h，所以对上述 $\varepsilon>0$，存在 N，使得当 $n>N$ 时，有

$$
\sup_{|z|\to1}(1-|z|^2)^{1-\alpha}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(|h_{n,z}(z)-h_z(z)|+|h_{n,\bar z}(z)-h_{\bar z}(z)|)^p\mathrm{d}\theta\right)^{\frac{1}{p}}<\varepsilon。
$$

因此当 $|z|>r_0$ 时，有

$$
\begin{aligned}
&(1-|z|^2)^{1-\alpha}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(|h_z(z)|+|h_{\bar z}(z)|)^p\mathrm{d}\theta\right)^{\frac{1}{p}}\\
&=(1-|z|^2)^{1-\alpha}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(|h_z(z)-h_{n,z}(z)+h_{n,z}(z)|+|h_{\bar z}(z)-h_{n,\bar z}(z)+h_{n,\bar z}(z)|)^p\mathrm{d}\theta\right)^{\frac{1}{p}}\\
&\leqslant(1-|z|^2)^{1-\alpha}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(|h_{n,z}(z)-h_z(z)|+|h_{n,\bar z}(z)-h_{\bar z}(z)|)^p\mathrm{d}\theta\right)^{\frac{1}{p}}\\
&\quad+(1-|z|^2)^{1-\alpha}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(|h_{n,z}(z)|+|h_{n,\bar z}(z)|)^p\mathrm{d}\theta\right)^{\frac{1}{p}}\\
&<2\varepsilon。
\end{aligned}
$$

所以 $h\in\mathscr{H}^{p}_{H,1-\alpha,0}$。定理证明完毕。

下面开始证明定理 6。

定理 6 的证明　假设 $\|h_t-h\|_*\to 0$, $t\to 1$。注意到对任意固定的 $t\in(0,1)$,有 $h_t\in\mathscr{H}^{p}_{H,1-\alpha,0}$。又由定理 5 可知 $\mathscr{H}^{p}_{H,1-\alpha,0}$是 $\mathscr{H}^{p}_{H,1-\alpha}$的闭子空间,所以 $h\in\mathscr{H}^{p}_{H,1-\alpha,0}$。

反之,参考文献[11]中的定理 5.9 的证明。设 $h\in\mathscr{H}^{p}_{H,1-\alpha,0}$,对任意的 $\varepsilon>0$,存在 $\delta\in(0,1)$使得

$$\sup_{z\in\overline{D}_\delta}(1-|z|^2)^{1-\alpha}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(|h_z(z)|+|h_{\bar z}(z)|)^p\mathrm{d}\theta\right)^{\frac{1}{p}}<\varepsilon,$$

其中 $\overline{D}_\delta=\{z\in D:\delta^2<|z|<1\}$。考虑

$$\begin{aligned}\|h_t-h\|_*&=\sup_{z\in D}(1-|z|^2)^{1-\alpha}M_p(r,(h_t-h)_z+(h_t-h)_{\bar z})\\&=\sup_{\delta<|z|<1}(1-|z|^2)^{1-\alpha}M_p(r,(h_t-h)_z+(h_t-h)_{\bar z})\\&\quad+\sup_{|z|\leqslant\delta}(1-|z|^2)^{1-\alpha}M_p(r,(h_t-h)_z+(h_t-h)_{\bar z})。\end{aligned}\tag{6}$$

对于$|z|\leqslant\delta$, $th_z(tz)\to h_z(z)$, $th_{\bar z}(tz)\to h_{\bar z}(z)$关于 z 是一致的,所以当 $t\to 1$ 时,式(6)第二项趋于 0。如果 $\delta<t<1$并且 $\delta<|z|<1$,则 $\delta^2<t|z|<1$,于是

$$\begin{aligned}&(1-|z|^2)^{1-\alpha}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(|th_z(tz)|+|th_{\bar z}(tz)|)^p\mathrm{d}\theta\right)^{\frac{1}{p}}\\&\leqslant(1-t^2|z|^2)^{1-\alpha})\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(|h_z(tz)|+|h_{\bar z}(tz)|)^p\mathrm{d}\theta\right)^{\frac{1}{p}}\\&<\varepsilon。\end{aligned}$$

因此,对所有的 $\delta<t<1$,有

$$\begin{aligned}&\sup_{\delta<|z|<1}(1-|z|^2)^{1-\alpha}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(|th_z(tz)-h_z(z)|+|th_{\bar z}(tz)-h_{\bar z}(z)|)^p\mathrm{d}\theta\right)^{\frac{1}{p}}\\&\leqslant\sup_{\delta<|z|<1}(1-|z|^2)^{1-\alpha}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(|th_z(tz)|+|th_{\bar z}(tz)|)^p\mathrm{d}\theta\right)^{\frac{1}{p}}\\&\quad+\sup_{\delta<|z|<1}(1-|z|^2)^{1-\alpha}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(|h_z(z)|+|h_{\bar z}(z)|)^p\mathrm{d}\theta\right)^{\frac{1}{p}}\\&<2\varepsilon。\end{aligned}$$

综上,对所有的 $\delta<t<1$,有

$$\|h_t-h\|_*<2\varepsilon。$$

定理证明完毕。

参考文献:

[1] DUREN P L. Harmonic mappings in the plane[M]. Cambridge: Cambridge Tracts in Mathematics, 2004:1-75.

[2] ALJUAID M, COLONNA F. Characterizations of Bloch-type spaces of harmonic mappings[J]. Journal of Function Spaces, 2019:1-11.

[3] ALJUAID M, COLONNA F. On the harmonic Zygmund spaces[J]. Bulletin of the Australian Mathematical Society, 2020, 101(3):466-476.

[4] ALJUAID M. Composition operators on the space of harmonic mapping V^H[J]. Journal of Mathematical Analysis, 2023, 14(2):25-35.

[5] KAMAL A. *Q*-Type spaces of harmonic mappings[J]. Journal of Mathematics, 2022, 2022:1-10.

[6] CHEN S L, PONNUSAMY S, RASILA A. Lengths, areas and Lipschitz-type spaces of planar harmonic mappings[J]. Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, 2015, 115:62-70.

[7] ALJUAID M. The operator theory on some spaces of harmonic mappings[D]. Virginia: George Mason University, 2019.

[8] DUREN P L. Theory of H^p Spaces[M]. New York: Pure and Applied Mathematics, 1970:1-2,78.

[9] GIRELA D, PELÁEZ J A. Integral means of analytic functions[J]. Annales Fennici Mathematici, 2004, 29(2):459-469.

[10] ZYGMUND A. Trigonometric series[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1959:19.

[11] ZHU K H. Operator theory in function spaces[M]. Providence: American Mathematical Soc, 2007:109.

(编辑:胡春燕)