山东大学学报(理学版)2025 年 12 月 第 60 卷 第 12 期
*Journal of Shandong University*(*Natural Science*), Vol.60, No.12, 2025 http://lxbwk.njournal.sdu.edu.cn

**文章编号**:1671-9352(2025)12-0142-07 DOI:10.6040/j.issn.1671-9352.0.2023.464

# 迭代级亚纯函数结合其导数与差分算子的 Borel 例外值

刘建明,王钦,向旭旭,王师文
(贵州师范大学数学科学学院, 贵州 贵阳 550025)

**摘要**:利用 Nevanlinna 值分布理论,研究迭代级的亚纯函数结合其导数与 $n$ 阶平移差分算子的 Borel 例外值,刻画迭代级亚纯函数结合其导数与 $n$ 阶平移差分算子的 Borel 例外值存在性条件。

**关键词**:亚纯函数;Borel 例外值;迭代级;差分算子
**中图分类号**:O174 **文献标志码**:A
**引用格式**:刘建明,王钦,向旭旭,等. 迭代级亚纯函数结合其导数与差分算子的 Borel 例外值[J]. 山东大学学报(理学版),2025,60(12):142-148.

# Borel exceptional value of iterated order meromorphic functions with thier derivative and difference operator

LIU Jianming, WANG Qin, XIANG Xuxu, WANG Shiwen
(School of Mathematical Sciences, Guizhou Normal University, Guiyang 550025, Guizhou, China)

**Abstract**: The Borel exceptional values of meromorphic functions of iterated order combined with their derivatives and $n$-order shift difference operators are studied by using the theory of Nevanlinna value distribution, and the conditions existenced of Borel exceptional values of meromorphic functions of iterated order combined with their derivatives and $n$-order shift difference operators are described in this paper.

**Key words**: meromorphic function; Borel exceptional value; iterated order; difference operator

## 1 引言与主要结果

本文采用 Nevanlinna 理论的标准记号[1-4]。为方便后面的叙述,做以下规定:对 $r\in[0,\infty]$, $\exp_1 r=e^r$ 且 $\exp_{n+1}r=\exp(\exp_n r)$, $n\in\mathbf{N}$;对适当大的 $r$ 有 $\log_1 r=\log^+ r$, $\log_{n+1}r=\log(\log_n r)$, $n\in\mathbf{N}$,其中 $\log^+ r=\max\{\log r,0\}$。特别地,有 $\exp_0 r=r=\log_0 r$, $\exp_{-1}r=\log r$, $\log_{-1}r=\exp_1 r$。

**定义 1.1**[5] 设 $f$ 是复平面 $\mathbf{C}$ 上的亚纯函数,则 $f$ 的对数级定义为

$$\sigma_{\log}(f)=\limsup_{r\to\infty}\frac{\log^+ T(r,f)}{\log\log r}。$$

对于有穷对数级亚纯函数,Chern[5]定义了亚纯函数的对数 Borel 例外值。

**定义 1.2**[5] 设 $f$ 是复平面 $\mathbf{C}$ 上的亚纯函数,$a\in\overline{\mathbf{C}}=\mathbf{C}\cup\{\infty\}$,如果满足

$$\sigma_{\log}(n(r,a,f))=\limsup_{r\to\infty}\frac{\log^+ n(r,a,f)}{\log\log r}<\sigma_{\log}(f)-1,$$

则称 $a$ 为 $f$ 的一个对数 Borel 例外值,其中 $n(r,a,f)$ 表示 $|z|\leqslant r$ 上 $f(z)-a$ 的零点个数(计重数)。

**收稿日期**:2023-11-02; **网路出版时间**:2024-12-02 15:18:56
**基金项目**:国家自然科学基金资助项目(12261023,11861023);贵州师范大学学术新苗培养及创新探索专项项目(黔科合平台人才[2018]5769-05 号)

**第一作者**:刘建明(1998— ),女,硕士,研究方向为函数论. E-mail:545991290@qq.com

例外值是值分布理论中的重要概念,它的研究可追溯到著名的 Picard 定理,后来,Borel 获得了 Borel 定理,是 Picard 定理的进一步发展。对于无穷级函数的情况,2005 年,曹廷彬[6]利用迭代级概念,研究了有穷正迭代级亚纯函数的 Borel 例外值。最近,刘建明等[7]利用$[p,q]$级概念,研究了有穷正$[p,q]$级亚纯函数的 Borel 例外值。对于零级函数的情况,2006 年,Chern[5]通过定义对数级的概念,刻画了慢速增长的亚纯函数,研究有穷对数级亚纯函数 $f$ 结合其 $k$ 阶导函数 $f^{(k)}$ 的对数 Borel 例外值存在性问题,证明了如下结果。

**定理 A**[5]　设 $f$ 是复平面 $\mathbf{C}$ 上对数级为 $\sigma_{\log}(<\infty)$ 的超越亚纯函数,则每个正整数 $k$,都有

$$\limsup_{r\to\infty}\frac{\log^{+}\{n(r,0,f)+\bar{n}(r,1,f^{(k)})\}}{\log\log r}=\sigma_{\log}-1,$$

其中,$n(r,0,f)$ 表示 $|z|\leqslant r$ 上 $f(z)$ 的零点个数(计重数),$\bar{n}(r,1,f^{(k)})$ 表示为 $|z|\leqslant r$ 上 $f^{(k)}(z)-1$ 的零点个数(不计重数)。

最近,Yu 等[8]研究了有穷对数级的亚纯函数关于其 $n$ 阶平移差分算子的对数 Borel 例外值的存在性问题,并且证明了以下结果。

**定理 B**[8]　设 $f$ 是复平面 $\mathbf{C}$ 上对数级为 $\sigma_{\log}(<\infty)$ 的非常数亚纯函数,$c\in\mathbf{C}$, $n\in\mathbf{N}$ ,使得 $\Delta_c^n f\not\equiv 0$,则对 $a\in\mathbf{C}$,和 $b\in\overline{\mathbf{C}}\setminus\{0\}$ ,有

$$\limsup_{r\to\infty}\frac{\log^{+}\{n(r,a,f)+n(r,b,\Delta_c^n f)\}}{\log\log r}=\sigma_{\log}-1,$$

其中,$\Delta_c^0 f(z)=f(z)$, $\Delta_c^1 f(z)=f(z+c)-f(z)$, $\Delta_c^n f(z)=\Delta_c(\Delta_c^{n-1}f(z))$ ,$n(r,a,f)$ 表示在 $|z|\leqslant r$ 内 $f(z)-a$ 零点个数(计重数),$n(r,b,\Delta_c^n f)$ 表示在 $|z|\leqslant r$ 内 $\Delta_c^n f(z)-b$ 的零点个数(计重数)。

定理 B 对有穷对数级的亚纯函数结合其 $n$ 阶平移差分算子进行研究,其他增长级结合差分算子的研究可以参考文献[9]。

定理 A 和定理 B 所研究的对象是有穷对数级亚纯函数,自然提出下面问题:对于无穷级亚纯函数,是否有类似的结果? 为了描述无穷级的亚纯函数,下面先回顾迭代级的定义。

**定义 1.3**[6]　设 $f$ 是复平面 $\mathbf{C}$ 上的亚纯函数,$p\geqslant 1$ 为整数,则 $f$ 的 $p$ 次迭代级定义为

$$\sigma_{p,T}(f)=\limsup_{r\to\infty}\frac{\log_p T(r,f)}{\log r};$$

当 $f$ 为整函数时,其 $p$ 次迭代级为

$$\sigma_{p,M}(f)=\limsup_{r\to\infty}\frac{\log_{p+1}M(r,f)}{\log r}。$$

注 1.1　对复平面 $\mathbf{C}$ 上的整函数 $f$, $\sigma_{p,T}(f)=\sigma_{p,M}(f)$ ,故下面用 $\sigma_p(f)$ 表示 $f$ 的 $p$ 次迭代级。当 $p=2$ 时, $\sigma_2(f)$ 即为函数 $f$ 的超级。

**定义 1.4**[6]　设 $f$ 是复平面 $\mathbf{C}$ 上的亚纯函数,其增长指标 $i(f)$ 定义为

$$i(f)=\begin{cases}0, & \text{当 } f \text{ 为有理函数;}\\ \min\{j\in\mathbf{N}:\sigma_j(f)<\infty\}, & \text{当 } f \text{ 为超越的且存在某一 } j\in\mathbf{N}\text{,满足 } \sigma_j(f)<\infty\text{;}\\ \infty, & \text{对所有的 } j\in\mathbf{N} \text{ 满足 } \sigma_j(f)=\infty\text{。}\end{cases}$$

为了研究无穷级亚纯函数的 Borel 例外值,2005 年,曹廷彬定义了亚纯函数的迭代 Borel 例外值[6]。

**定义 1.5**[6]　设 $f$ 是复平面 $\mathbf{C}$ 上的亚纯函数,$i(f)=p\in(0,\infty)$, $\sigma_p(f)=\sigma\in(0,\infty)$, $a\in\overline{\mathbf{C}}$,若

$$\sigma_p(n(r,a,f))=\limsup_{r\to\infty}\frac{\log_p n(r,a,f)}{\log r}<\sigma,$$

则称 $a$ 为 $f$ 的迭代 Borel 例外值,当 $p=1$ 时,称 $a$ 为 Borel 例外值。

对于迭代级亚纯函数 $f$ 结合其 $k$ 阶导数 $f^{(k)}$ 的例外值,得到如下定理。

**定理 1.1**　设 $f$ 是复平面 $\mathbf{C}$ 上的非常数亚纯函数,$i(f)=p\in(0,\infty)$, $\sigma_p(f)=\sigma\in(0,\infty)$,则对每个正整数 $k$,都有

$$\limsup_{r\to\infty}\frac{\log_p\{n(r,0,f)+\bar{n}(r,1,f^{(k)})\}}{\log r}=\sigma。$$

下面推论是定理 1.1 的直接结果。

**推论 1.1** 设 $f$ 是复平面 $\mathbf{C}$ 上的一个非常数亚纯函数, $i(f)=p\in(0,\infty)$, $\sigma_p(f)=\sigma\in(0,\infty)$,则下面两种情况不能同时发生:

(ⅰ) $f$ 有一个有穷的迭代 Borel 例外值;

(ⅱ) 对于一个正整数 $k$, $f^{(k)}$ 有一个有穷的非零精简迭代 Borel 例外值。

利用熊庆来不等式,可以得到两个导数的情况。

**定理 1.2** 设 $f$ 是复平面 $\mathbf{C}$ 上的一个非常数亚纯函数, $i(f)=p\in(0,\infty)$, $\sigma_p(f)=\sigma\in(0,\infty)$,存在 3 个不同的数 $a,b,c\in\mathbf{N}$,且 $b\neq0$, $c\neq0$,则对每个正整数 $k$,都有

$$\limsup_{r\to\infty}\frac{\log_p\{n(r,a,f)+n(r,b,f^{(k)})+n(r,c,f^{(k)})\}}{\log r}=\sigma。$$

定理 B 所研究的是有穷对数级亚纯函数与其 $n$ 阶平移差分算子的情况,自然提出下面问题:对于无穷级函数,是否有类似的结果? 通过超级的定义考虑了这个问题,证明了下面结果。

**定理 1.3** 设 $f$ 是复平面 $\mathbf{C}$ 上超级为 $\sigma_2(<1)$ 的非常数亚纯函数, $c\in\mathbf{C}$, $n\in\mathbf{N}$,使得 $\Delta_c^n f\neq0$,则对 $a\in\mathbf{C}$ 和 $b,d\in\overline{\mathbf{C}}\setminus\{0\}$,有

$$\limsup_{r\to\infty}\frac{\log_2\{n(r,a,f)+n(r,b,\Delta_c^n f)+n(r,d,\Delta_c^n f)\}}{\log r}=\sigma_2。$$

## 2 引理

为了证明本文的结果,下面介绍几个辅助结果。

**引理 2.1**[6] 设 $f$ 是复平面 $\mathbf{C}$ 上的亚纯函数, $i(f)=p\in(0,\infty)$, $\sigma_p(f)=\sigma\in(0,\infty)$,则对任意复数 $a$,都有

$$\limsup_{r\to\infty}\frac{\log_p n(r,a,f)}{\log r}=\limsup_{r\to\infty}\frac{\log_p N(r,a,f)}{\log r}。$$

下面的引理刻画了函数 $f$ 与其 $k$ 阶导数迭代级的关系。

**引理 2.2** 设 $f$ 是复平面 $\mathbf{C}$ 上的亚纯函数, $i(f)=p\in(0,\infty)$, $\sigma_p(f)=\sigma\in(0,\infty)$,则 $f$ 与 $f^{(k)}$ 有相同迭代级,即 $\sigma_p(f)=\sigma_p(f^{(k)})$。

**证明** 一方面,根据文献[1], $m\left(r,\dfrac{f^{(k)}}{f}\right)=S(r,f)$,另外

$$\begin{aligned}T(r,f^{(k)})&=m(r,f^{(k)})+N(r,f^{(k)})\\&\leqslant m(r,f)+m\left(r,\frac{f^{(k)}}{f}\right)+N(r,f)+k\overline{N}(r,f)\\&\leqslant(k+1)T(r,f)+S(r,f),\end{aligned}$$

其中, $S(r,f)=o(T(r,f))$ 至多可能除去一个线性测度有穷的例外集。则

$$\sigma_p(f)\geqslant\sigma_p(f^{(k)}),$$

另一方面,应用庄圻泰不等式[1]和 Borel 引理,可得

$$\sigma_p(f)\leqslant\sigma_p(f^{(k)}),$$

因此,有 $\sigma_p(f)=\sigma_p(f^{(k)})$。

利用类似于文献[10,引理 2.2]的方法,得到引理 2.3、2.4,它在定理 1.3 的证明中起重要作用。

**引理 2.3**[10] 设 $\log T(r)$ 在 $\mathbf{R}^+$ 是一个非减且连续的函数,假设 $0<\sigma<\limsup\limits_{r\to\infty}\dfrac{\log\log T(r)}{\log r}$,则

$$\overline{\log\text{ dens}}\,F:=\limsup_{r\to\infty}\frac{\int_{F\cap[1,r)}\mathrm{d}(\log t)}{\log r}>0,$$

其中 $F:=\{r\in\mathbf{R}^+\mid\log T(r)\geqslant r^\sigma\}$。

**引理 2.4**　设 $f$ 是复平面 $\mathbf{C}$ 上超级为 $\sigma_2(<1)$ 的非常数亚纯函数,$c\in\mathbf{C}$, $n\in\mathbf{N}$,使得 $\Delta_c^n f\neq 0$,设 $a(z)$ 是周期为 $c$ 的亚纯函数,则

$$m\left(r,\frac{\Delta_c^n f}{f-a}\right)=o(T(r,f)),\quad r\notin F,\tag{1}$$

其中 $F$ 为对数测度有穷的集合。

**证明**　由文献[11,定理 5.1]知

$$m\left(r,\frac{f(z+c)}{f(z)}\right)=o(T(r,f)),\quad r\notin F,$$

其中 $F$ 为对数测度有穷的集合。

因为 $\Delta_c^n f=\Delta_c^n(f-a)$, $a(z+jc)=a(z)$, $j=0,1,\cdots,n$,所以

$$\begin{aligned}m\left(r,\frac{\Delta_c^n f}{f-a}\right)&=m\left(r,\frac{\Delta_c^n(f-a)}{f-a}\right)\\&=m\left(r,\frac{\sum_{j=0}^{n}\binom{j}{n}(-1)^{n-j}(f(z+jc)-a)}{f-a}\right)\\&\leqslant\sum_{j=0}^{n}m\left(r,\frac{f(z+jc)-a(z+jc)}{f-a}\right)+O(1)\\&=o(T(r,f)),\quad r\notin F。\end{aligned}$$

结论得证。

接下来,使用文献[12,定理 3.1]类似的证明方法,得到引理 2.5、2.6。

**引理 2.5**　设 $f$ 是复平面 $\mathbf{C}$ 上超级为 $\sigma_2(<1)$ 的非常数亚纯函数,$c\in\mathbf{C}$, $n\in\mathbf{N}$,使得 $\Delta_c^n f\neq 0$,设 $a_1(z),\cdots a_p(z)(p\geqslant 2)$ 是周期为 $c$ 的亚纯函数,使得 $T(r,a_k)=S(r,f)$, $k=1,\cdots,p$,则有

$$\sum_{k=1}^{p}m(r,a_k,f)\leqslant T(r,\Delta_c^n f)-N(r,0,\Delta_c^n f)+o(T(r,f)),\quad r\notin F。\tag{2}$$

其中 $F\subset[1,\infty)$ 为对数测度有穷的集合。

**证明**　由文献[12]中定理 3.1 的证明,有

$$\sum_{k=1}^{p}m(r,a_k,f)=m(r,0,P(f))+o(T(r,f)),\tag{3}$$

其中 $P(f)=\prod_{k=1}^{p}(f-a_k)$,对于某些常数 $c_k$ 有 $\frac{1}{P(f)}=\sum_{k=1}^{p}\frac{c_k}{f-a_k}$。

由引理 2.4 和 Nevanlinna 第一基本定理,有

$$\begin{aligned}m\left(r,\frac{1}{P(f)}\right)&\leqslant m\left(r,\frac{\Delta_c^n f}{P(f)}\right)+m\left(r,\frac{1}{\Delta_c^n f}\right)\\&\leqslant\sum_{k=1}^{p}m\left(r,\frac{\Delta_c^n f}{f-a_k}\right)+m\left(r,\frac{1}{\Delta_c^n f}\right)+O(1)\\&\leqslant T(r,\Delta_c^n f)-N\left(r,\frac{1}{\Delta_c^n f}\right)+o(T(r,f)),\quad r\notin F,\end{aligned}$$

其中 $F\subset[1,\infty)$ 为对数测度有穷的集合。

结合式(3),结论得证。

注 2.1　因为 $F\subset[1,\infty)$ 为有穷对数测度的集合,则有

$$\overline{\log\text{ dens}}\,F:=\limsup_{r\to\infty}\frac{\int_{F\cap[1,r)}\mathrm{d}(\log t)}{\log r}=0。$$

注意到 $\overline{\log\text{ dens}}\,F^c=1-\overline{\log\text{ dens}}\,F=1$,其中 $F^c$ 为集合 $F$ 的补集,则易知式(1)和(2)在 $\underline{\log\text{ dens}}\,F^c=1$ 的集合 $F^c$ 上成立。因为 $1\geqslant\overline{\log\text{ dens}}\,F^c\geqslant\underline{\log\text{ dens}}\,F^c=1$,所以式(1)和(2)在 $\overline{\log\text{ dens}}\,F^c=1$ 的集合 $F^c$ 上也成立。

**引理 2.6** 设 $f$ 是复平面 $\mathbf{C}$ 上超级为 $\sigma_2(<1)$ 的非常数亚纯函数,令 $c\in\mathbf{C}$, $n\in\mathbf{N}$,使得 $\Delta_c^n f\not\equiv 0$,设 $a(z)$ 是周期为 $c$ 的亚纯函数,使得 $T(r,a)=S(r,f)$,且

$$\limsup_{r\to\infty}\frac{\log_2 n(r,a,f)}{\log r}<\sigma_2,$$

则有 $\sigma_2(\Delta_c^n f)=\sigma_2$。

**证明** 易知 $\sigma_2(\Delta_c^n f)\leqslant\sigma_2$。只需证明 $\sigma_2(\Delta_c^n f)\geqslant\sigma_2$。反证法,假设 $\sigma_2(\Delta_c^n f)<\sigma_2$。分两种情况证明:情况(1) $n(r,a,f)>0$;情况(2) $n(r,a,f)=0$。

**情况(1)** 如果 $n(r,a,f)>0$, $a\in C$ 是 $f$ 的一个迭代 Borel 例外值,由迭代 Borel 例外值的定义和引理 2.1得

$$\limsup_{r\to\infty}\frac{\log_2 N(r,a,f)}{\log r}=\limsup_{r\to\infty}\frac{\log_2 n(r,a,f)}{\log r}<\sigma。\tag{4}$$

又因 $\sigma_2(\Delta_c^n f)<\sigma_2$,由式(4)和引理 2.3 知,存在一个常数 $\sigma$,满足

$$\sigma_0:=\limsup_{r\to\infty}\frac{\log_2\{T(r,\Delta_c^n f)+N(r,a,f)\}}{\log r}<\sigma<\sigma_2,\tag{5}$$

使得

$$\log T(r,f)\geqslant r^{\sigma},\quad r\in F,\tag{6}$$

其中,$F\subset[1,\infty)$且 $\underline{\log\text{ dens}}\ F>0$,对任意 $\varepsilon$ 满足 $0<\varepsilon<\dfrac{\sigma-\sigma_0}{2}$及所有足够大的 $r$,由式(5)和(6)有

$$\log\{T(r,\Delta_c^n f)+N(r,a,f)\}\leqslant r^{\sigma_0+\varepsilon}<r^{\sigma}\leqslant\log T(r,f),\quad r\in F。$$

即得

$$T(r,\Delta_c^n f)+N(r,a,f)=o(T(r,f)),\quad r\in F。\tag{7}$$

另一方面,由式(7)和引理 2.4 得

$$\begin{aligned}m\left(r,\frac{1}{f-a}\right)&\leqslant m\left(r,\frac{\Delta_c^n f}{f-a}\right)+m\left(r,\frac{1}{\Delta_c^n f}\right)\\&\leqslant T(r,\Delta_c^n f)+o(T(r,f))=o(T(r,f)),\quad r\in F_1。\end{aligned}\tag{8}$$

其中 $\overline{\log\text{ dens}}\ F_1=1$。

再结合式(7)、(8)和 Nevanlinna 第一基本定理得

$$T(r,f)=m(r,a,f)+N(r,a,f)+O(1)=o(T(r,f)),\quad r\in(F\cap F_1)$$

矛盾。其中 $\overline{\log\text{ dens}}(F\cap F_1)>\overline{\log\text{ dens}}\ F-\overline{\log\text{ dens}}\ F_1^c=\overline{\log\text{ dens}}\ F-(1-\underline{\log\text{ dens}}\ F_1)=\overline{\log\text{ dens}}\ F-(1-\log\text{ dens}\ F_1)>0$。

**情况(2)** 如果 $n(r,a,f)=0$,由于 $f$ 是非常数,因此得 $\limsup\limits_{r\to\infty}\dfrac{\log_2 N(r,a,f)}{\log r}=0<\sigma_2$。使用类似情况(1)的证明,易导出矛盾。引理得证。

## 3 定理的证明

**定理 1.1 的证明** 由于 $f$ 是复平面 $\mathbf{C}$ 上迭代级有穷的亚纯函数,根据引理 2.1 和引理 2.2 得

$$\limsup_{r\to\infty}\frac{\log_p\{n(r,0,f)+\overline{n}(r,1,f^{(k)})\}}{\log r}\leqslant\sigma。$$

需证

$$\limsup_{r\to\infty}\frac{\log_p\{n(r,0,f)+\overline{n}(r,1,f^{(k)})\}}{\log r}\geqslant\sigma。\tag{9}$$

假设式(9)不成立,则有

$$\limsup_{r\to\infty}\frac{\log_p\{n(r,0,f)+\bar{n}(r,1,f^{(k)})\}}{\log r}<\sigma,$$

从而有

$$\limsup_{r\to\infty}\frac{\log_p n(r,0,f)}{\log r}<\sigma,$$

$$\limsup_{r\to\infty}\frac{\log_p \bar{n}(r,1,f^{(k)})}{\log r}<\sigma。$$

不妨设 $N(r)=\max\{N(r,0,f),\bar{N}(r,1,f^{(k)})\}$,因此利用 Hayman 不等式[1],有

$$\sigma=\limsup_{r\to\infty}\frac{\log_p T(r,f)}{\log r}\leqslant\limsup_{r\to\infty}\frac{\log_p\{N(r,0,f)+\bar{N}(r,1,f^{(k)})\}}{\log r}\leqslant\limsup_{r\to\infty}\frac{\log_p 2N(r)}{\log r}<\sigma。$$

这与 $f$ 的迭代级为 $\sigma$ 矛盾, 因此结论得证。

**定理 1.2 的证明**　利用熊庆来不等式[1],有

$$T(r,f)<N(r,a,f)+N(r,b,f^{(k)})+N(r,c,f^{(k)})-N(r,\infty,f^{(k+1)})+Q(r,f),$$

其中 $Q(r,f)=o\{\log(rT(r,f)\}$。使用与定理 1.1 类似的方法即证此结论。

**定理 1.3 的证明**　由于 $f$ 是复平面 $\mathbf{C}$ 上超级为 $\sigma_2(<1)$ 的非常数亚纯函数,根据引理 2.1 和引理 2.6 得

$$\limsup_{r\to\infty}\frac{\log_2\{n(r,a,f)+n(r,b,\Delta_c^n f)+n(r,d,\Delta_c^n f)\}}{\log r}\leqslant\sigma_2。$$

另一方面,需证

$$\limsup_{r\to\infty}\frac{\log_2\{n(r,a,f)+n(r,b,\Delta_c^n f)+n(r,d,\Delta_c^n f)\}}{\log r}\geqslant\sigma_2。\tag{10}$$

假设式(10)不成立,则有

$$\limsup_{r\to\infty}\frac{\log_2\{n(r,a,f)+n(r,b,\Delta_c^n f)+n(r,d,\Delta_c^n f)\}}{\log r}<\sigma_2,$$

其中 $a\in\mathbf{C}$ 和 $b,d\in\bar{\mathbf{C}}\setminus\{0\}$。

首先假设 $n(r,a,f)>0$, $n(r,b,\Delta_c^n f)>0$ 和 $n(r,d,\Delta_c^n f)>0$。则由引理 2.1 得

$$\limsup_{r\to\infty}\frac{\log_2 N(r,a,f)}{\log r}=\limsup_{r\to\infty}\frac{\log_2 n(r,a,f)}{\log r}<\sigma_2,\tag{11}$$

$$\limsup_{r\to\infty}\frac{\log_2 N(r,b,\Delta_c^n f)}{\log r}=\limsup_{r\to\infty}\frac{\log_2 n(r,b,\Delta_c^n f)}{\log r}<\sigma_2,\tag{12}$$

$$\limsup_{r\to\infty}\frac{\log_2 N(r,d,\Delta_c^n f)}{\log r}=\limsup_{r\to\infty}\frac{\log_2 n(r,d,\Delta_c^n f)}{\log r}<\sigma_2。\tag{13}$$

由式(7),(11)—(13)和引理 2.3,对于足够小的正数 $\varepsilon$,有

$$N(r,a,f)+N(r,b,\Delta_c^n f)+N(r,d,\Delta_c^n f)=o(T(r,f)),\quad r\in F_1,\tag{14}$$

其中 $F_1\subset[1,\infty)$ 且 $\underline{\log\text{ dens}}\ F_1>0$。

由式(14)和 Nevanlinna 第一基本定理得

$$\begin{aligned}T(r,f)&=m(r,a,f)+N(r,a,f)+O(1)\\&=m(r,a,f)+o(T(r,f)),\quad r\in F_1,\end{aligned}\tag{15}$$

又由引理 2.5 得

$$m(r,a,f)\leqslant T(r,\Delta_c^n f)-N(r,0,\Delta_c^n f)+o(T(r,f)),\quad r\in F_2,\tag{16}$$

其中 $F_2\subset[1,\infty)$ 且 $\underline{\log\text{ dens}}\ F_2=1$。

应用 Nevanlinna 第二基本定理到 $\Delta_c^n f$,且结合式(14),当 $r\in F_1$ 且 $r\to\infty$ 时,有

$$T(r,\Delta_c^n f)-N(r,0,\Delta_c^n f)<N(r,b,\Delta_c^n f)+N(r,d,\Delta_c^n f)=o(T(r,f))。\tag{17}$$

结合式(15)—(17)得

$$T(r,f)=o(T(r,f)),\quad r\in(F_1\cap F_2)$$

矛盾。其中,类似引理 2.6 的证明,易知 $\overline{\log \mathrm{dens}}(F_1 \cap F_2)>0$。

若 $n(r,a,f)=0$(或 $n(r,b,\Delta_c^n f)=0$ 或 $n(r,d,\Delta_c^n f)=0$),则 $n(r,a,f)$(或 $n(r,b,\Delta_c^n f)$ 或 $n(r,d,\Delta_c^n f)$)的超级是 0,它严格小于 $\sigma_2$。使用上面类似的论证,易导出矛盾,定理得证。

**参考文献:**


[1] 杨乐. 值分布论及其新研究[M]. 北京:科学出版社,1982:109-138.
YANG Le. Value distribution theory and its new research[M]. Beijing: Science Press, 1982:109-138.

[2] 柏盛桄. 整函数与亚纯函数[M]. 武汉:华中师范大学出版社,1987.
BAI Shengguang. Entire function and meromorphic function[M]. Wuhan: Central China Normal University Press, 1987.

[3] HAYMAN W K. Meromorphic function[M]. Oxford: Clarendon Press, 1964.

[4] LAINE I. Nevanlinna theory and complex differential equations[M]. Berlin: Walter de Gruyter, 1993:12.

[5] CHERN P. On meromorphic functions with finite logarithmic order[J]. Transactions of the American Mathematical Society, 2006, 358(2):473-489.

[6] 曹廷彬. 迭代级亚纯函数的 Borel 方向及其线性微分方程解的复振荡理论[D]. 南昌:江西师范大学,2004.
CAO Tingbin. The Borel direction of meromorphic function with iterated order and the complex oscillation theory of solutions of differential equations[D]. Nanchang: Jiangxi Normal University, 2004.

[7] 刘建明,向旭旭,曾三桂. 关于亚纯函数的[$p,q$]级 Borel 方向、充满圆、例外值[J]. 贵州师范大学学报(自然科学版),2024,42(6):67-73.
LIU Jianming, XIANG Xuxu, ZENG Sangui. On Borel direction, filled circle and exceptional value of [$p,q$] order of meromorphic functions[J]. Journal of Guizhou Normal University(Natural Sciences), 2024, 42(6):67-73.

[8] YU H, LI X M. Results on logarithmic Borel exceptional values of meromorphic functions with their difference operators[J]. Analysis Mathematica, 2022, 48(3):895-909.

[9] 王钦,龙见仁. 有穷 $\varphi$ 级的亚纯函数与线性 Jackson $q$-差分方程[J]. 贵州师范大学学报(自然科学版),2024,42(4):123-128.
WANG Qin, LONG Jianren. Finite $\varphi$-order of meromorphic functions and linear Jackson $q$-divided difference equations[J]. Journal of Guizhou Normal University(Natural Sciences), 2024, 42(4):123-128.

[10] ISHIZAKI K, TOHGE K. On the complex oscillation of some linear differential equations[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1997, 206(2):503-517.

[11] HALBURD R, KORHONEN R, TOHGE K. Holomorphic curves with shift-invariant hyperplane preimages[J]. Transactions of the American Mathematical Society, 2014, 366(8):4267-4298.

[12] BARNETT D C, HALBURD R G, MORGAN W, et al. Nevanlinna theory for the $q$-difference operator and meromorphic solutions of $q$-difference equations[J]. Proceedings of the Royal Society of Edinburgh: Section A Mathematics, 2007, 137(3):457-474.


(编辑:胡春燕)