

一类含有 p -Laplacian 算子的带有参数及分数阶导数的分数阶微分方程边值问题唯一正解的存在性

郑艳萍, 杨慧*, 王文霞

(太原师范学院数学与统计学院, 山西 晋中 030619)

摘要: 研究一类带有偏差量、分数阶导数及两个参数且边界条件中含有非线性积分项的分数阶 p -Laplacian 微分方程边值问题唯一正解的存在性。通过使用锥理论与和算子方法, 获得该边值问题存在唯一正解的最大参数存在区间, 并讨论正解对参数的连续依赖性。最后给出两个具体的例子作为所获结论的应用。

关键词: 分数阶微分方程; 边值问题; p -Laplacian 算子; 唯一解

中图分类号: O175

文献标志码: A

引用格式: 郑艳萍, 杨慧, 王文霞. 一类含有 p -Laplacian 算子的带有参数及分数阶导数的分数阶微分方程边值问题唯一正解的存在性[J]. 山东大学学报(理学版), 2025, 60(12): 110-120.

The existence of unique positive solution for boundary value problems of fractional differential equations with parameters and derivatives involving p -Laplacian operators

ZHENG Yanping, YANG Hui*, WANG Wenxia

(School of Mathematics and Statistics, Taiyuan Normal University, Jinzhong 030619, Shanxi, China)

Abstract: This paper investigates the existence and uniqueness of positive solution for a class of boundary value problems of p -Laplacian fractional differential equations with a deviation and fractional derivatives involving nonlinear fractional integral terms in the boundary conditions and two parameters. Based on the cone theory and method operators, the maximum parameter interval for the existence of the unique positive solution is obtained and continuous dependence of the unique positive solution on parameters is discussed. Finally, two examples are given to illustrate the main results.

Key words: fractional differential equation; boundary value problem; p -Laplacian operator; unique solution

0 引言

相比于整数阶微积分方程, 分数阶微积分方程能更全面地描述物理、生物、医学等领域的众多现象。近年来, 其理论及其应用的研究已成为国内外研究的热点问题之一^[1-8]。作为非牛顿力学、弹性理论等诸多研究领域中的重要数学模型, 带有 p -Laplacian 算子的分数阶微分方程受到越来越多的关注^[9-16]。文献[9-12]利用锥上的不动点理得到分数阶 p -Laplacian 边值问题至少存在一个或两个正解的充分条件。文献[13-16]运用单调迭代技术研究分数阶 p -Laplacian 边值问题最大最小解的存在性。比如文献[15]通过单调迭代技术研究带有 p -Laplacian 算子的 Riemann-Liouville 型分数阶微分方程边值问题存在的最大最小解的充分条件:

收稿日期: 2023-10-16; 网络出版时间: 2024-12-02 15:35:29

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11361047); 山西省基础研究计划项目(20210302124529)

第一作者: 郑艳萍(1978—), 女, 副教授, 硕士, 研究方向为算子理论与微分方程. E-mail: zhengyanping2006@126.com

* 通信作者: 杨慧(1976—), 女, 副教授, 硕士, 研究方向为泛函分析与微分方程. E-mail: yh3f@163.com

$$\begin{cases} -D_{0^+}^\alpha(\phi_p(-D_{0^+}^\beta x(t)))=f(t,x(t),D_{0^+}^\beta x(t)), & t \in (0,1), \\ D_{0^+}^\beta x(0)=0, (\phi_p(-D_{0^+}^\beta x(0)))'=0, \\ D_{0^+}^\gamma(\phi_p(-D_{0^+}^\beta x(1)))=I^\nu(\phi_p(-D_{0^+}^\beta x(\eta))), \\ x(0)=0, D_{0^+}^{\beta-1}x(1)=I^\omega g(\xi,x(\xi))+\mu, \end{cases} \quad (1)$$

其中, $0 < \gamma < 1 < \beta < 2 < \alpha < 3$, $\nu, \omega > 0$, $0 < \xi, \eta < 1$, $\mu \in \mathbf{R}$ 。

文献[16]研究了分数阶 p -Laplacian 边值问题:

$$\begin{cases} (\phi_p(-D_{0^+}^\alpha u(t)))'+\lambda h(t)f(t,u(t),D_{0^+}^\alpha u(t))=0, & t \in (0,1), \\ u(0)=0, D_{0^+}^\alpha u(0)=0, \\ u(1)=\eta \int_0^1 g(\sigma)u(\sigma) d\sigma, \end{cases} \quad (2)$$

其中, $0 < \alpha \leq 2$, $\lambda, \eta > 0$ 。利用单调迭代方法获得了正解的存在性,并建立了逼近正解的单调迭代格式。

一方面,边值问题(1)和(2)中出现的 μ 与 λ 本质上是当作常数处理的。当它们作为参数出现在同一个 p -Laplacian 边值问题中时,这些参数对正解的存在性有怎样的影响也是一个值得研究的问题,但这种研究并不多见。

另一方面,边值问题正解的存在唯一性是非常重要的,但对 p -Laplacian 边值问题来说,这样的研究相对较少。特别是对带有两个参数且非线性项中含有偏差项及分数阶导数项的 p -Laplacian 算子的分数阶微分方程边值问题而言,其唯一正解存在的最大参数区间以及该正解对参数的连续依赖性结果尚未见到。

因此,本文将研究带有参数以及 p -Laplacian 算子的分数阶微分方程的积分边值问题(简记为 BVP):

$$\begin{cases} -D_{0^+}^\alpha(\phi_p(-D_{0^+}^\beta x(t)))=\lambda f(t,x(t),x(\theta(t)),D_{0^+}^\beta x(t)), & t \in (0,1), \\ x(0)=0, D_{0^+}^\beta x(0)=0, (\phi_p(-D_{0^+}^\beta x(0)))'=0, \\ D_{0^+}^\gamma(\phi_p(-D_{0^+}^\beta x(1)))=\lambda I^\nu(\phi_p(x(\eta))), \\ D_{0^+}^{\beta-1}x(1)=I^\omega g(\xi,x(\xi))+\mu, \end{cases} \quad (3)$$

其中, $D_{0^+}^\alpha$ 、 $D_{0^+}^\beta$ 分别是 α 阶和 β 阶 Riemann-Liouville 型分数阶导数, I^ν, I^ω 是 ν, ω 阶分数阶积分, $0 < \gamma < 1 < \beta < 2 < \alpha < 3$, $0 < \rho < \beta - 1$, $\nu, \omega > 0$, $0 < \eta, \xi \leq 1$, $\lambda \geq 0$, $\mu > 0$ 是参数; $f \in C([0, 1] \times [0, +\infty) \times [0, +\infty) \times [0, +\infty))$, $g \in C([0, 1] \times [0, +\infty), [0, +\infty))$, $\theta \in C([0, 1], [0, 1])$; $\phi_p(s) = |s|^{p-2}s$, $p > 1$ 。显然, $(\phi_p)^{-1} = \phi_q$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ 。

本文利用锥理论以及算子不动点定理研究 BVP(3) 唯一正解存在的最大参数区间以及解对参数的连续依赖性。

1 预备知识和引理

定义 1.1^[1-2] 设 $\alpha > 0$ 。函数 $x: (0, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}$ 的 $\alpha > 0$ 阶 Riemann-Liouville 分数积分是指

$$I_{0^+}^\alpha x(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} x(s) ds, \quad (4)$$

只要式(4)右端的积分在 $(0, +\infty)$ 有定义。连续函数 $x: (0, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}$ 的 $\alpha > 0$ 阶 Riemann-Liouville 分数导数为

$$D_{0^+}^\alpha x(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dt}\right)^n \int_0^t (t-s)^{n-\alpha-1} x(s) ds,$$

只要等式右端在 $(0, +\infty)$ 有定义,其中 $n-1 < \alpha \leq n$, $\Gamma(\alpha)$ 为 Gamma 函数。若 $\alpha = n$, 则 $D_{0^+}^\alpha x(t) = x^{(n)}(t)$ 。

定义 1.2 若函数 $x \in C(0, 1]$ 是 BVP(3) 的解, 且 $x(t) > 0$, $t \in (0, 1)$, 称 x 为 BVP(3) 的正解。

引理 1.1^[15] 设 $h \in C[0, 1]$, $\sigma, k \in \mathbf{R}$, $\Gamma(\beta + \omega) \neq \sigma \xi^{\beta + \omega - 1}$ 。则分数阶边值问题

$$\begin{cases} -D_{0^+}^\alpha(\phi_p(-D_{0^+}^\beta x(t)))=h(t), & t \in (0,1), \\ D_{0^+}^\beta x(0)=0, (\phi_p(-D_{0^+}^\beta x(0)))'=0, \\ D_{0^+}^\gamma(\phi_p(-D_{0^+}^\beta x(1)))=l, \\ x(0)=0, D_{0^+}^{\beta-1}x(1)=\sigma I^\omega x(\xi)+\mu. \end{cases} \quad (5)$$

有唯一解

$$x(t) = \int_0^1 H(t,s) \phi_q \left[\int_0^1 G(s,\tau) h(\tau) d\tau + \frac{\Gamma(\alpha-\gamma) l s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \right] ds + \frac{\mu \Gamma(\beta+\omega) t^{\beta-1}}{\Gamma(\beta) (\Gamma(\beta+\omega) - \sigma \xi^{\beta+\omega-1})}, \quad t \in (0,1),$$

其中

$$G(t,s) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \begin{cases} t^{\alpha-1} (1-s)^{\alpha-\gamma-1} - (t-s)^{\alpha-1}, & 0 \leq s \leq t \leq 1, \\ t^{\alpha-1} (1-s)^{\alpha-\gamma-1}, & 0 \leq t \leq s \leq 1, \end{cases} \quad (6)$$

$$H(t,s) = \frac{1}{\Delta} \begin{cases} [\Gamma(\beta+\omega) - \sigma(\xi-s)^{\beta+\omega-1}] t^{\beta-1} \\ - [\Gamma(\beta+\omega) - \sigma \xi^{\beta+\omega-1}] (t-s)^{\beta-1}, & s \leq t, s \leq \xi, \\ [\Gamma(\beta+\omega) - \sigma(\xi-s)^{\beta+\omega-1}] t^{\beta-1}, & t \leq s \leq \xi, \\ \Gamma(\beta+\omega) [t^{\beta-1} - (t-s)^{\beta-1}] + \sigma \xi^{\beta+\omega-1} (t-s)^{\beta-1}, & \xi \leq s \leq t, \\ \Gamma(\beta+\omega) t^{\beta-1}, & s \geq t, s \geq \xi, \end{cases} \quad (7)$$

$$\Delta = \Gamma(\beta) (\Gamma(\beta+\omega) - \sigma \xi^{\beta+\omega-1}).$$

引理 1.2 引理 1.1 中定义的 $G(t,s)$ 和 $H(t,s)$ 满足如下性质:

(i) $0 \leq G(t,s) \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1}, \quad t,s \in [0,1];$

(ii) 当 $\sigma \geq 0$ 且 $\Gamma(\beta+\omega) > \sigma \xi^{\beta+\omega-1}$ 时,

$$0 \leq H(t,s) \leq \frac{\Gamma(\beta+\omega) t^{\beta-1}}{\Delta}, \quad t,s \in [0,1];$$

(iii) 当 $0 < \rho < \beta - 1$ 且 $\Gamma(\beta+\omega) > \sigma \xi^{\beta+\omega-1}$ 时,

$$D_{0+}^{\rho} H(t,s) \leq \frac{\Gamma(\beta+\omega)}{[\Gamma(\beta+\omega) - \sigma \xi^{\beta+\omega-1}] \cdot \Gamma(\beta-\rho)} t^{\beta-\rho-1}.$$

证明 (i)、(ii) 显然, 只证明 (iii)。

运用等式 $D_{0+}^{\rho} t^{\beta-1} = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\rho)} t^{\beta-\rho-1}$ 和式(7)可得

$$D_{0+}^{\rho} H(t,s) = \frac{1}{\Delta} \begin{cases} [\Gamma(\beta+\omega) - \sigma(\xi-s)^{\beta+\omega-1}] \cdot \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\rho)} t^{\beta-\rho-1} \\ - [\Gamma(\beta+\omega) - \sigma \xi^{\beta+\omega-1}] \cdot \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\rho)} (t-s)^{\beta-\rho-1}, & s \leq t, s \leq \xi, \\ [\Gamma(\beta+\omega) - \sigma(\xi-s)^{\beta+\omega-1}] \cdot \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\rho)} t^{\beta-\rho-1}, & t \leq s \leq \xi, \\ \Gamma(\beta+\omega) \cdot \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\rho)} [t^{\beta-\rho-1} - (t-s)^{\beta-\rho-1}] \\ + \sigma \xi^{\beta+\omega-1} \cdot \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\rho)} (t-s)^{\beta-\rho-1}, & \xi \leq s \leq t, \\ \Gamma(\beta+\omega) \cdot \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\rho)} t^{\beta-\rho-1}, & s \geq t, s \geq \xi. \end{cases} \quad (8)$$

由此可知结论 (iii) 成立。证毕。

设 E 是实 Banach 空间, P 是 E 中的锥, θ 是 E 中的零元素。关于锥的相关理论见文献[17]。设 $e > \theta$, 即 $e \in P, e \neq \theta$, 记

$$P_e = \{x \in E \mid \exists l_1 = l_1(x) > 0, l_2 = l_2(x) > 0, l_1 e \leq x \leq l_2 e\}, \quad (9)$$

$$\bar{P}_e = \{x \in E \mid \exists l = l(x) > 0, 0 \leq x \leq l e\}, \quad (10)$$

显然 $P_e \subset \bar{P}_e \subset P$ 。

引理 1.3^[18] 设 P 是 E 中的正规锥, $A, B: P \rightarrow P$ 皆为增算子。若下列条件成立:

(G1) $A(P_e) \subset \bar{P}_e$, 且

$$A(\tau x) \geq \tau Ax, \quad x \in P_e, \quad \tau \in (0, 1);$$

(G2) $B(P_e) \subset P_e$, 且存在 $\delta: (0, 1) \rightarrow (0, 1)$ 使得

$$B(\tau x) \geq \tau^{\delta(\tau)} Bx, \quad x \in P_e, \quad \tau \in (0, 1)。$$

则存在 $\lambda^* > 0$, 使得当 $\lambda \in [0, \lambda^*)$ 时, 算子 $\lambda A + B$ 在 P_e 中有唯一不动点 x_λ ; 而当 $\lambda \geq \lambda^*$ 时, 算子 $\lambda A + B$ 在 P_e 中没有不动点。

特别地, 当 $\lambda \in [0, \lambda^*)$ 时, 算子 $\lambda A + B$ 在 P_e 中的唯一不动点 x_λ 关于 λ 还具有如下性质:

- (i) 对任意的 $x_0 \in P_e$, 迭代序列 $x_n = \lambda A x_{n-1} + B x_{n-1} (n = 1, 2, \dots)$ 收敛于唯一解 x_λ , 即 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|x_n - x_\lambda\| = 0$;
- (ii) x_λ 关于 λ 单调递增;
- (iii) x_λ 关于 λ 连续。

2 主要结论

取 $X = \{x \mid x \in C[0, 1], D_{0^+}^\alpha x \in C[0, 1]\}$ 。对任意的 $x \in X$, 定义其范数为

$$\|x\| = \max \left\{ \max_{t \in [0, 1]} |x(t)|, \max_{t \in [0, 1]} |D_{0^+}^\alpha x(t)| \right\},$$

则 X 为 Banach 空间。再令

$$P = \{x \in X \mid x(t) \geq 0, D_{0^+}^\alpha x(t) \geq 0, t \in (0, 1)\}, \tag{11}$$

则 P 是 X 中的正规锥, 且正规常数为 1。

为了方便, 列出本文使用的条件:

(H1) 对任意的 $0 \leq x_1 \leq x_2, 0 \leq y_1 \leq y_2, 0 \leq z_1 \leq z_2, t \in [0, 1]$, 有

$$f(t, x_1, y_1, z_1) \leq f(t, x_2, y_2, z_2)。$$

(H2) 存在实数 $\sigma \geq 0$, 使得 $\Gamma(\beta + \omega) > \sigma \xi^{\beta + \omega - 1}$ 以及

$$g(t, x_2) - g(t, x_1) \geq \sigma(x_2 - x_1), \quad x_2 \geq x_1 \geq 0, \quad t \in [0, 1],$$

且存在 $[0, 1]$ 上的非负函数 $\varphi(t)$ 满足 $\int_0^\xi (\xi - s)^{\omega - 1} \varphi(s) ds > 0$, 使得

$$g(t, x) - \sigma x \leq \varphi(t), \quad x \geq 0, \quad t \in [0, 1]。$$

(H'2) 对任意的 $0 \leq x_1 \leq x_2, t \in [0, 1]$ 有

$$g(t, x_2) \geq g(t, x_1), \quad x_2 \geq x_1 \geq 0, \quad t \in [0, 1],$$

且存在 $[0, 1]$ 上的非负函数 $\varphi(t)$ 满足 $\int_0^\xi (\xi - s)^{\omega - 1} \varphi(s) ds > 0$, 使得

$$g(t, x) \leq \varphi(t), \quad x \geq 0, \quad t \in [0, 1]。$$

(H3) $f(t, rx, ry, rz) \geq rf(t, x, y, z), r \in (0, 1), t \in [0, 1], x, y, z \in [0, +\infty)$ 。

(H4) $g(t, rx) \geq rg(t, x), r \in (0, 1), t \in [0, 1], x \in [0, +\infty)$ 。

(H5) $f(t, rx, ry, rz) \geq \phi_p(r)f(t, x, y, z), r \in (0, 1), t \in [0, 1], x, y, z \in [0, +\infty)$ 。

注 2.1 在 BVP(3) 中满足条件 (H2) 的非线性函数可以是无界的, 这与文献 [7-8] 中本质上要求其有界是不同的。正是由于使用了条件 (H2), 本文获得与 BVP(3) 等价的算子方程的方法与文献 [7-8] 不同。

定理 2.1 设条件 (H1) — (H4) 成立。若 $p \geq 2$, 则对任意给定的 $\mu > 0$, 存在 $\lambda^*(\mu) > 0$, 使得当 $\lambda \in [0, \lambda^*(\mu))$ 时, BVP(3) 有唯一正解 $x_{(\lambda, \mu)}$, 且存在正数 $l, L > 0$, 使得

$$l t^{\beta - 1} \leq x_{(\lambda, \mu)} \leq L t^{\beta - 1}, \quad t \in [0, 1],$$

而当 $\lambda \geq \lambda^*(\mu)$ 时, BVP(3) 没有正解。

特别地, 当 $\lambda \in [0, \lambda^*(\mu))$ 时, BVP(3) 的唯一正解 $x_{(\lambda, \mu)}$, 关于 λ 还具有如下性质:

- (i) 对任意的 $x_0 \in P$, 做迭代序列

$$x_n(t) = \int_0^1 H(t,s)\phi_q \left[\int_0^1 G(s,\tau)f(\tau,x_{n-1}(\tau),x_{n-1}(\theta(\tau)),D_{0^+}^\rho x_{n-1}(\tau))d\tau + \frac{\lambda\Gamma(\alpha-\gamma)I^\nu(\phi_p x_{n-1}(\eta))s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \right] ds + \frac{\Gamma(\beta+\omega)t^{\beta-1}[I^\omega(g(\xi,x_{n-1}(\xi))-\sigma x_{n-1}(\xi))+\mu]}{\Gamma(\beta)(\Gamma(\beta+\omega)-\sigma\xi^{\beta+\omega-1})}, \quad t \in [0,1], n=1,2,\dots,N,$$

那么 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|x_n - x_{(\lambda,\mu)}\| = 0$;

(ii) $x_{(\lambda,\mu)}$ 关于 λ 单调递增;

(iii) $x_{(\lambda,\mu)}$ 关于 λ 连续。

证明 对任意给定的 $x \in P$, 构造辅助边值问题如下:

$$\begin{cases} -D_{0^+}^\alpha(\phi_p(-D_{0^+}^\beta y(t))) = \lambda f(t,x(t),x(\theta(t)),D_{0^+}^\rho x(t)), & t \in (0,1), \\ y(0) = 0, D_{0^+}^\beta y(0) = 0, (\phi_p(-D_{0^+}^\beta y(0)))' = 0, \\ D_{0^+}^\gamma(\phi_p(-D_{0^+}^\beta y(1))) = \lambda I^\nu(\phi_p(x(\eta))), \\ D_{0^+}^{\beta-1} y(1) = I^\omega(g(\xi,x(\xi)) + \sigma[y(\xi) - x(\xi)]) + \mu. \end{cases} \quad (12)$$

根据引理 1.1, 上述边值问题(12)有唯一解, 其解表示如下:

$$y(t) = \lambda^{\frac{1}{p-1}} \int_0^1 H(t,s)\phi_q \left(\int_0^1 G(s,\tau)f(\tau,x(\tau),x(\theta(\tau)),D_{0^+}^\rho x(\tau))d\tau + \frac{\Gamma(\alpha-\gamma)s^{\alpha-1}I^\nu(\phi_p(x(\eta)))}{\Gamma(\alpha)} \right) ds + \frac{\Gamma(\beta+\omega)[I^\omega(g(\xi,x(\xi))-\sigma x(\xi))+\mu]t^{\beta-1}}{\Delta}, \quad t \in [0,1]. \quad (13)$$

定义锥 P 上的算子 A 和 B_μ 如下: 对任意的 $x \in P$,

$$\begin{aligned} (Ax)(t) &= \int_0^1 H(t,s)\phi_q \left(\int_0^1 G(s,\tau)f(\tau,x(\tau),x(\theta(\tau)),D_{0^+}^\rho x(\tau))d\tau + \frac{\Gamma(\alpha-\gamma)s^{\alpha-1}I^\nu(\phi_p(x(\eta)))}{\Gamma(\alpha)} \right) ds, \quad t \in [0,1], \\ (B_\mu x)(t) &= \frac{\Gamma(\beta+\omega)t^{\beta-1}[I^\omega(g(\xi,x(\xi))-\sigma x(\xi))+\mu]}{\Delta}, \quad t \in [0,1]. \end{aligned}$$

由 BVP(12)及式(13)可知, 如果 $x_{(\lambda,\mu)} \in P$ 是算子 $\lambda^{\frac{1}{p-1}}A+B_\mu$ 的不动点, 则 $x_{(\lambda,\mu)}$ 为 BVP(3)在 P 中的解, 反之亦然。

以下证明 A 和 B_μ 满足引理 1.3 的所有条件。

首先, 对任意 $x_1, x_2 \in P, x_1 \leq x_2$, 有 $0 \leq x_1(t) \leq x_2(t), 0 \leq D_{0^+}^\rho x_1(t) \leq D_{0^+}^\rho x_2(t)$ 。注意到 $x_1(\theta(t)) \leq x_2(\theta(t))$, 根据条件(H1)、(H2)可得

$$\begin{aligned} 0 \leq f(t,x_1(t),x_1(\theta(t)),D_{0^+}^\rho x_1(t)) &\leq f(t,x_2(t),x_2(\theta(t)),D_{0^+}^\rho x_2(t)), \\ 0 \leq g(t,0) \leq g(t,x_1(t)) - \sigma x_1(t) &\leq g(t,x_2(t)) - \sigma x_2(t), \quad t \in [0,1]. \end{aligned}$$

于是根据引理 1.2 可知 $A, B_\mu: P \rightarrow P$ 皆为增算子。

其次, 令 $e = e(t) = t^{\beta-1}, t \in [0,1]$, 则 $D_{0^+}^\rho e(t) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\rho)} t^{\beta-\rho-1}$ 。显然有 $e \in P$, 且 $e \neq \theta$ 。定义 P_e 和 \bar{P}_e 分别如式(9)及式(10)。对任意的 $x \in P$, 由(H1)、(H2)可得

$$\begin{aligned} (Ax)(t) &= \int_0^1 H(t,s)\phi_q \left[\int_0^1 G(s,\tau)f(\tau,x(\tau),x(\theta(\tau)),D_{0^+}^\rho x(\tau))d\tau + \frac{\Gamma(\alpha-\gamma)s^{\alpha-1}I^\nu(\phi_p(x(\eta)))}{\Gamma(\alpha)} \right] ds \\ &\leq \frac{\Gamma(\beta+\omega)t^{\beta-1}}{\Delta} \int_0^1 \phi_q \left[\int_0^1 G(s,\tau)f(\tau,\|x\|,\|x\|,\|x\|)d\tau + \frac{\Gamma(\alpha-\gamma)s^{\alpha-1}\phi_p(\|x\|)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\nu+1)} \right] ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \frac{\Gamma(\beta+\omega)}{\Delta} \phi_q \left[\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 f(\tau, \|x\|, \|x\|, \|x\|) d\tau + \frac{\Gamma(\alpha-\gamma)\phi_p(\|x\|)}{\alpha\Gamma(\alpha)\Gamma(\nu+1)} \right] t^{\beta-1}, \quad t \in [0,1]. \\ D_{0^+}^\rho(Ax)(t) &= \int_0^1 D_{0^+}^\rho H(t,s) \phi_q \left[\int_0^1 G(s,\tau) f(\tau, x(\tau), x(\theta(\tau)), D_{0^+}^\rho x(\tau)) d\tau \right. \\ &\quad \left. + \frac{\Gamma(\alpha-\gamma)s^{\alpha-1}I^\nu(\phi_p(x(\eta)))}{\Gamma(\alpha)} \right] ds \\ &\leq \frac{\Gamma(\beta+\omega)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\rho)\Delta} t^{\beta-\rho-1} \int_0^1 \phi_q \left[\int_0^1 G(s,\tau) f(\tau, \|x\|, \|x\|, \|x\|) d\tau \right. \\ &\quad \left. + \frac{\Gamma(\alpha-\gamma)s^{\alpha-1}\phi_p(\|x\|)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\nu+1)} \right] ds \\ &\leq \frac{\Gamma(\beta+\omega)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\rho)\Delta} \phi_q \left[\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 f(\tau, \|x\|, \|x\|, \|x\|) d\tau \right. \\ &\quad \left. + \frac{\Gamma(\alpha-\gamma)\phi_p(\|x\|)}{\alpha\Gamma(\alpha)\Gamma(\nu+1)} \right] t^{\beta-\rho-1}, \quad t \in [0,1]. \end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma(\beta+\omega)\mu t^{\beta-1}}{\Delta} &\leq (B_\mu x)(t) = \frac{\Gamma(\beta+\omega)t^{\beta-1}[I^\omega(g(\xi, x(\xi)) - \sigma x(\xi)) + \mu]}{\Delta} \\ &\leq \frac{\Gamma(\beta+\omega) \left[\frac{1}{\Gamma(\omega)} \int_0^\xi (\xi-s)^{\omega-1} \varphi(s) ds + \mu \right]}{\Delta} t^{\beta-1}, \quad t \in [0,1]. \\ \frac{\Gamma(\beta+\omega)\Gamma(\beta)\mu}{\Gamma(\beta-\rho)\Delta} t^{\beta-\rho-1} &\leq D_{0^+}^\rho(B_\mu x)(t) = \frac{\Gamma(\beta+\omega)\Gamma(\beta)[I^\omega(g(\xi, x(\xi)) - \sigma x(\xi)) + \mu]}{\Gamma(\beta-\rho)\Delta} t^{\beta-\rho-1} \\ &\leq \frac{\Gamma(\beta+\omega)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\rho)\Delta} \left[\frac{1}{\Gamma(\omega)} \int_0^\xi (\xi-s)^{\omega-1} \varphi(s) ds + \mu \right] t^{\beta-\rho-1}, \quad t \in [0,1]. \end{aligned}$$

此即 $A(P) \subset \bar{P}_e, B_\mu(P) \subset P_e$.

再次,根据条件(H3)以及 $\varphi_p(r) = r^{p-1} \leq r, p \geq 2$,对任意的 $r \in (0,1)$ 和 $x \in P_e$,有

$$\begin{aligned} A(rx)(t) &= \int_0^1 H(t,s) \phi_q \left[\int_0^1 G(s,\tau) f(\tau, rx(\tau), rx(\theta(\tau)), rD_{0^+}^\rho x(\tau)) d\tau \right. \\ &\quad \left. + \frac{\Gamma(\alpha-\gamma)s^{\alpha-1}I^\nu(\phi_p(rx(\eta)))}{\Gamma(\alpha)} \right] ds \\ &\geq \int_0^1 H(t,s) \phi_q \left[r \int_0^1 G(s,\tau) f(\tau, x(\tau), x(\theta(\tau)), D_{0^+}^\rho x(\tau)) d\tau \right. \\ &\quad \left. + \frac{\phi_p(r)\Gamma(\alpha-\gamma)s^{\alpha-1}I^\nu(\phi_p(x(\eta)))}{\Gamma(\alpha)} \right] ds \\ &\geq \int_0^1 H(t,s) \phi_q \left[\phi_p(r) \left(\int_0^1 G(s,\tau) f(\tau, x(\tau), x(\theta(\tau)), D_{0^+}^\rho x(\tau)) d\tau \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{\Gamma(\alpha-\gamma)s^{\alpha-1}I^\nu(\phi_p(x(\eta)))}{\Gamma(\alpha)} \right) \right] ds \\ &\geq r \int_0^1 H(t,s) \phi_q \left[\int_0^1 G(s,\tau) f(\tau, x(\tau), x(\theta(\tau)), D_{0^+}^\rho x(\tau)) d\tau \right. \\ &\quad \left. + \frac{\Gamma(\alpha-\gamma)s^{\alpha-1}I^\nu(\phi_p(x(\eta)))}{\Gamma(\alpha)} \right] ds \\ &\geq rAx(t), \quad t \in [0,1]. \end{aligned}$$

此即

$$A(rx) \geq rAx, \quad r \in (0,1), \quad x \in P_e.$$

故算子 A 满足引理 1.3 中的条件(G1)。

再考察算子 B_μ 。对任意的 $r \in (0, 1)$, 令

$$\delta(r) = \frac{\ln\left(\mu + r/\Gamma(\omega) \int_0^\xi (\xi - s)^{\omega-1} \varphi(s) ds\right) - \ln\left(\mu + 1/\Gamma(\omega) \int_0^\xi (\xi - s)^{\omega-1} \varphi(s) ds\right)}{\ln r}。$$

因为 $\mu > 0$ 和 $\int_0^\xi (\xi - s)^{\omega-1} \varphi(s) ds > 0$, 故 $0 < \delta(r) < 1$, 且

$$r^{\delta(r)} = \frac{\mu + r/\Gamma(\omega) \int_0^\xi (\xi - s)^{\omega-1} \varphi(s) ds}{\mu + 1/\Gamma(\omega) \int_0^\xi (\xi - s)^{\omega-1} \varphi(s) ds}。$$

于是, 对任意的 $r \in (0, 1)$, $x \in P$,

$$\begin{aligned} (1 - r^{\delta(r)})\mu &= \frac{r^{\delta(r)} - r}{\Gamma(\omega)} \int_0^\xi (\xi - s)^{\omega-1} \varphi(s) ds \\ &\geq \frac{r^{\delta(r)} - r}{\Gamma(\omega)} \int_0^\xi (\xi - s)^{\omega-1} [g(s, x(s)) - \sigma x(s)] ds \\ &= (r^{\delta(r)} - r)I^\omega(g(\xi, x(\xi)) - \sigma x(\xi)), \end{aligned}$$

此即

$$rI^\omega(g(\xi, x(\xi)) - \sigma x(\xi)) + \mu \geq r^{\delta(r)}(\mu + I^\omega(g(\xi, x(\xi)) - \sigma x(\xi)))。$$

进而由条件(H4)可得

$$\begin{aligned} B_\mu(rx)(t) &= \frac{\Gamma(\beta + \omega)t^{\beta-1} [I^\omega(g(\xi, rx(\xi)) - \sigma rx(\xi)) + \mu]}{\Delta} \\ &\geq \frac{\Gamma(\beta + \omega)t^{\beta-1} [rI^\omega(g(\xi, x(\xi)) - \sigma x(\xi)) + \mu]}{\Delta} \\ &\geq \frac{r^{\delta(r)}\Gamma(\beta + \omega)t^{\beta-1} [\mu + I^\omega(g(\xi, x(\xi)) - \sigma x(\xi))]}{\Delta} \\ &= r^{\delta(r)}(B_\mu x)(t), \quad r \in (0, 1), x \in P_e, t \in (0, 1]。 \end{aligned}$$

此即

$$B_\mu(rx) \geq r^{\delta(r)} B_\mu x, \quad r \in (0, 1), x \in P_e。 \tag{14}$$

所以, 引理 1.3 中条件(G2)成立。

既然引理 1.3 中所有条件皆成立, 根据引理 1.3 可知: 对任意的 $\mu > 0$, 存在 $\lambda^*(\mu) > 0$, 使得当 $\lambda \in [0, \lambda^*(\mu))$ 时, $\lambda^{\frac{1}{p-1}}A + B_\mu$ 在 P_e 中有唯一不动点 $x_{(\lambda, \mu)}$; 而当 $\lambda \geq \lambda^*(\mu)$ 时, $\lambda^{\frac{1}{p-1}}A + B_\mu$ 在 P_e 中没有不动点。

特别地, 当 $\lambda \in [0, \lambda^*(\mu))$ 时, $\lambda^{\frac{1}{p-1}}A + B_\mu$ 在 P_e 中的唯一不动点 $x_{(\lambda, \mu)}$ 关于 λ 还具有如下性质:

- (i) 对任意的 $x_0 \in P_e$, 迭代序列 $x_n = \lambda^{\frac{1}{p-1}}Ax_{n-1} + B_\mu x_{n-1} (n = 1, 2, \dots)$ 收敛于唯一解 $x_{(\lambda, \mu)}$, 即 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|x_n - x_{(\lambda, \mu)}\| = 0$;
- (ii) $x_{(\lambda, \mu)}$ 关于 λ 单调递增;
- (iii) $x_{(\lambda, \mu)}$ 关于 λ 连续。

再注意到 $(\lambda^{\frac{1}{p-1}}A + B_\mu)(P) \subset P_e$, 故 $\lambda^{\frac{1}{p-1}}A + B_\mu$ 在 P_e 中的唯一不动点 $x_{(\lambda, \mu)}$ 就是 BVP(3) 的唯一正解, 本结论成立。证毕。

定理 2.2 设条件(H1)、(H2)、(H4)及(H5)成立, 对任意给定的 $\mu > 0$, 存在 $\lambda^*(\mu) > 0$, 使得当 $\lambda \in [0, \lambda^*(\mu))$ 时, BVP(3)有唯一正解 $x_{(\lambda, \mu)}$, 且 $x_{(\lambda, \mu)} \in P_e$; 而当 $\lambda \geq \lambda^*(\mu)$ 时 BVP(3)没有正解。

特别地, 当 $\lambda \in [0, \lambda^*(\mu))$ 时, BVP(3)的唯一正解 $x_{(\lambda, \mu)}$ 关于 λ 还满足定理 2.1 中的性质(i)、(ii)、(iii)。

证明 根据定理 2.1 的证明, 只需证明

$$A(rx) \geq rAx, \quad r \in (0, 1), x \in P_e。 \tag{15}$$

事实上, 对任意的 $r \in (0, 1)$ 和 $x \in P_e$, 根据条件(H5)及 $p > 1$, 可得

$$\begin{aligned}
 A(rx)(t) &= \int_0^1 H(t,s)\phi_q \left[\int_0^1 G(s,\tau)f(\tau,rx(\tau),rx(\theta(\tau)),rD_{0^+}^\rho x(\tau))d\tau \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\Gamma(\alpha-\gamma)s^{\alpha-1}I^\nu(\phi_p(rx(\eta)))}{\Gamma(\alpha)} \right] ds \\
 &\geq \int_0^1 H(t,s)\phi_q \left[\phi_p(r) \int_0^1 G(s,\tau)f(\tau,x(\tau),x(\theta(\tau)),D_{0^+}^\rho x(\tau))d\tau \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\phi_p(r)\Gamma(\alpha-\gamma)s^{\alpha-1}I^\nu(\phi_p(x(\eta)))}{\Gamma(\alpha)} \right] ds \\
 &= r \int_0^1 H(t,s)\phi_q \left[\int_0^1 G(s,\tau)f(\tau,x(\tau),x(\theta(\tau)),D_{0^+}^\rho x(\tau))d\tau \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\Gamma(\alpha-\gamma)s^{\alpha-1}I^\nu(\phi_p(x(\eta)))}{\Gamma(\alpha)} \right] ds \\
 &\geq rAx(t), \quad t \in [0,1].
 \end{aligned}$$

此即式(15)成立。证毕。

由定理 2.1 及 2.2 易知下列结论成立。

推论 2.1 设条件(H1)、(H'2)、(H3)及(H4)成立。若 $p \geq 2$, 则定理 2.1 中的结论成立。

推论 2.2 设条件(H1)、(H'2)、(H3)及(H5)成立,则定理 2.2 中的结论成立。

注 2.2 推论 2.1 及 2.2 是定理 2.1 和 2.2 中 $\sigma=0$ 时的特殊情形。即便如此,类似的结果作者仍未见到。

3 例子

例 3.1 考虑如下边值问题

$$\begin{cases}
 -D_{0^+}^{\frac{5}{2}}(\phi_{\frac{10}{3}}(-D_{0^+}^{\frac{3}{2}}(x(t)))) \\
 = \lambda \left[(t + \sin t)(x(t))^{\frac{7}{6}} + \frac{\cos t}{1 + \cos t}x(t) + (x(\sin t))^{\frac{3}{4}} + D_{0^+}^{\frac{1}{4}}x(t) \right], \quad t \in (0,1), \\
 x(0) = 0, D_{0^+}^{\frac{3}{2}}x(0) = 0, (\phi_{\frac{10}{3}}(-D_{0^+}^{\frac{3}{2}}x(0)))' = 0, \\
 D_{0^+}^{\frac{1}{2}}(\phi_{\frac{10}{3}}(-D_{0^+}^{\frac{3}{2}}x(1))) = \frac{\lambda}{\Gamma(7/2)} \int_0^{\frac{1}{4}} \left(\frac{1}{4} - s\right)^{\frac{5}{2}} \phi_{\frac{10}{3}}(x(s)) ds, \\
 D_{0^+}^{\frac{1}{2}}x(1) = \frac{1}{\Gamma(1/3)} \int_0^{\frac{3}{4}} \frac{(3/4 - s)^{-\frac{2}{3}} [x^2(s) + (2s + 3)x(s)]}{4(1 + x(s))} ds + \mu,
 \end{cases} \tag{16}$$

即在 BVP(3)中, $\alpha = \frac{5}{2}, \beta = \frac{3}{2}, \gamma = \frac{1}{2}, \nu = \frac{7}{2}, \omega = \frac{1}{3}, \xi = \frac{3}{4}, \eta = \frac{1}{4}, p = \frac{10}{3}$;

$$f(t,x,y,z) = (t + \sin t)x^{\frac{7}{6}} + \frac{\cos t}{1 + \cos t}x + y^{\frac{3}{4}} + z, \quad t \in [0,1], \quad x,y,z \in [0,+\infty),$$

$$g(t,x) = \frac{x^2 + (2t + 3)x}{4(1 + x)}, \quad t \in [0,1], \quad x \in [0,+\infty),$$

显然有 $f \in C([0,1] \times [0,+\infty) \times [0,+\infty) \times [0,+\infty), [0,+\infty))$, $g \in C([0,1] \times [0,+\infty), [0,+\infty))$ 。容易看

到 $f(t,x,y,z)$ 关于 x,y,z 不减。取 $\sigma = \frac{1}{4}$, 于是

$$\Gamma(\beta + \omega) = \Gamma\left(\frac{11}{6}\right) = 0.9433 > \frac{1}{4} = \sigma > \sigma \xi^{\beta + \omega - 1}.$$

对任意的 $0 \leq x_1 \leq x_2$, 有

$$g(t,x_2) - g(t,x_1) = \frac{1}{4}(x_2 - x_1) + \frac{t+1}{2} \left(\frac{x_2}{1+x_2} - \frac{x_1}{1+x_1} \right) \geq \sigma(x_2 - x_1), \quad t \in [0,1].$$

再取 $\varphi(t) = \frac{t+1}{2}, t \in [0, 1]$, 则 $\int_0^\xi (\xi-s)^{\omega-1} \varphi(s) ds = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{3}{4}} \left(\frac{3}{4}-s\right)^{-\frac{2}{3}} (1+s) ds > 0$, 且

$$g(t, x) - \sigma x = \frac{x^2 + (2t+3)x}{4(1+x)} - \frac{1}{4}x = \frac{(1+t)x}{2(1+x)} \leq \varphi(t), \quad t \in [0, 1], \quad x \geq 0.$$

这就证明了条件(H1)、(H2)成立。

此外, 对任意的 $r \in (0, 1)$, 有

$$\begin{aligned} g(t, x) - \frac{1}{4}(rx) &= \frac{(rx)^2 + (2t+3)(rx)}{4(1+rx)} - \frac{1}{4}(rx) = \frac{r(1+t)x}{2(1+rx)} \geq \frac{r(1+t)x}{2(1+x)} \\ &= r \left(g(t, x) - \frac{1}{4}x \right), \quad t \in [0, 1], \quad x \in [0, +\infty), \end{aligned}$$

从而

$$g(t, rx) \geq rg(t, x), \quad t \in [0, 1], \quad x \in [0, +\infty);$$

此外, 容易得到

$$f(t, rx, ry, rz) = (t + \sin t) (rx)^{\frac{7}{6}} + \frac{\cos t}{1 + \cos t} (rx) + (ry)^{\frac{3}{4}} + rz \geq rf(t, x, y, z).$$

故条件(H3)、(H4)皆成立。

综上, 定理 2.1 中所有条件皆满足。从而根据定理 2.1 可知, 对任意给定的 $\mu > 0$, 存在 $\lambda^*(\mu) > 0$, 使得当 $\lambda \geq \lambda^*(\mu)$ 时 BVP(16) 没有正解, 当 $\lambda \in [0, \lambda^*(\mu))$ 时, BVP(16) 有唯一正解 $x_{(\lambda, \mu)}$, 且存在正数 $l, L > 0$, 使得

$$lt^{\beta-1} \leq x_{(\lambda, \mu)}(t) \leq Lt^{\beta-1}, \quad t \in [0, 1];$$

特别地, 唯一正解 $x_{(\lambda, \mu)}$ 还满足如下性质:

(i) 对任意的 $x_0 \in P$, 令

$$\begin{aligned} x_n(t) &= \int_0^1 H(t, s) \phi_q \left[\lambda \int_0^1 G(s, \tau) \left((\tau + \sin \tau) (x_{n-1}(\tau))^{\frac{7}{6}} + \frac{\cos \tau}{1 + \cos \tau} x_{n-1}(\tau) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (x_{n-1}(\sin \tau))^{\frac{3}{4}} + D_{0^+}^{\frac{1}{4}} x_{n-1}(\tau) \right) d\tau + \frac{\lambda \Gamma(\alpha - \gamma) s^{\alpha-1} I^\nu(\phi_p(x_{n-1}(\eta)))}{\Gamma(\alpha)} \right] ds \\ &\quad + \frac{\Gamma(\beta + \omega) t^{\beta-1} \{ I^\omega [((1 + \xi) x_{n-1}(\xi)) / (2(1 + x_{n-1}(\xi)))] + \mu \}}{\Gamma(\beta) (\Gamma(\beta + \omega) - \sigma \xi^{\beta + \omega - 1})} \\ &= \int_0^1 H(t, s) \phi_{\frac{10}{7}} \left[\lambda \int_0^1 G(s, \tau) \left((\tau + \sin \tau) (x_{n-1}(\tau))^{\frac{7}{6}} + \frac{\cos \tau}{1 + \cos \tau} x_{n-1}(\tau) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (x_{n-1}(\sin \tau))^{\frac{3}{4}} + D_{0^+}^{\frac{1}{4}} x_{n-1}(\tau) \right) d\tau + \frac{\lambda s^{\frac{3}{2}} I^{\frac{7}{2}}(\phi_{\frac{10}{3}}(x_{n-1}(1/4)))}{\Gamma(5/2)} \right] ds \\ &\quad + \frac{\Gamma(11/6) t^{\frac{1}{2}} \{ I^{\frac{1}{3}} [((7/4) x_{n-1}(3/4)) / (2(1 + x_{n-1}(3/4)))] + \mu \}}{\Gamma(3/2) (\Gamma(11/6) - (1/4)(3/4)^{\frac{5}{6}})}, \end{aligned}$$

其中, $t \in [0, 1], n = 1, 2, \dots$, 那么 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|x_n - x_{(\lambda, \mu)}\| = 0$;

(ii) $x_{(\lambda, \mu)}$ 关于 λ 单调递增;

(iii) $x_{(\lambda, \mu)}$ 关于 λ 连续。

例 3.2 考虑如下边值问题:

$$\begin{cases} -D_{0^+}^{\frac{5}{2}}(\phi_{\frac{9}{4}}(-D_{0^+}^{\frac{3}{2}}(x(t)))) = \lambda \left[\frac{t}{1+t} x^{\frac{3}{2}} + (x(\sin t))^{\frac{2}{3}} + (D_{0^+}^{\frac{1}{3}} x(t))^{\frac{3}{4}} \right], & t \in (0, 1), \\ x(0) = 0, D_{0^+}^{\frac{3}{2}} x(0) = 0, (\phi_{\frac{9}{4}}(-D_{0^+}^{\frac{3}{2}} x(0)))' = 0, \\ D_{0^+}^{\frac{1}{2}}(\phi_{\frac{9}{4}}(-D_{0^+}^{\frac{3}{2}}(x(1)))) = \frac{\lambda}{\Gamma(7/2)} \int_0^{\frac{1}{4}} \left(\frac{1}{4} - s\right)^{\frac{5}{2}} \phi_{\frac{9}{4}}(x(s)) ds, \\ D_{0^+}^{\frac{1}{2}} x(1) = \frac{1}{\Gamma(1/3)} \int_0^{\frac{3}{4}} \frac{(3/4 - s)^{-\frac{2}{3}} [x^2(s) + (2s+3)x(s)]}{4(1+x(s))} ds + \mu, \end{cases} \quad (17)$$

即在 BVP(3) 中, $\alpha = \frac{5}{2}, \beta = \frac{3}{2}, \gamma = \frac{1}{2}, \nu = \frac{7}{2}, \omega = \frac{1}{3}, \xi = \frac{3}{4}, \eta = \frac{1}{4}, p = \frac{9}{4}$;

$$f(t, x, y, z) = \frac{t}{1+t} x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} + z^{\frac{3}{4}}, \quad t \in [0, 1], \quad x, y, z \in [0, +\infty),$$

$$g(t, x) = \frac{x^2 + (2t+3)x}{4(1+x)}, \quad t \in [0, 1], \quad x \in [0, +\infty).$$

显然有

$$f \in C([0, 1] \times [0, +\infty) \times [0, +\infty) \times [0, +\infty), [0, +\infty)), \quad g \in C([0, 1] \times [0, +\infty), [0, +\infty)).$$

根据例 3.1, 显然有条件 (H1)、(H2)、(H4) 成立。此外, 对任意的 $r \in (0, 1)$, 有

$$f(t, rx, ry, rz) = \frac{t}{1+t} (rx)^{\frac{2}{3}} + (ry)^{\frac{2}{3}} + (rz)^{\frac{3}{4}} \geq r^{\frac{5}{4}} \left(\frac{t}{1+t} x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} + z^{\frac{3}{4}} \right)$$

$$= \phi_{\frac{4}{5}}(r) f(t, x, y, z),$$

故条件 (H5) 成立。于是根据定理 2.2 可得, 对任意给定的 $\mu > 0$, 存在 $\lambda^*(\mu) > 0$, 使得当 $\lambda \geq \lambda^*(\mu)$ 时, BVP (17) 没有正解; 当 $\lambda \in [0, \lambda^*(\mu))$ 时, BVP (17) 有唯一正解 $x_{(\lambda, \mu)}$, 且存在正数 $l, L > 0$, 使得

$$lt^{\beta-1} \leq x_{(\lambda, \mu)}(t) \leq Lt^{\beta-1}, \quad t \in [0, 1].$$

进而, 唯一正解 $x_{(\lambda, \mu)}$ 还满足如下性质:

(i) 对任意的 $x_0 \in P$, 令

$$x_n(t) = \int_0^1 H(t, s) \phi_q \left[\lambda \int_0^1 G(s, \tau) \left(\frac{\tau}{1+\tau} x_{n-1}^{\frac{2}{3}}(\tau) + (x_{n-1} \sin(\tau))^{\frac{2}{3}} + (D_{0+}^{\frac{1}{3}} x_{n-1}(\tau))^{\frac{3}{4}} \right) d\tau \right. \\ \left. + \frac{\lambda \Gamma(\alpha-\gamma) s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \cdot I^\nu(\phi_p(x_{n-1}(\eta))) \right] ds + \frac{\Gamma(\beta+\omega) t^{\beta-1} \{ I^\omega [((1+\xi)x_{n-1}(\xi)) / (2(1+x_{n-1}(\xi)))] + \mu \}}{\Gamma(\beta) (\Gamma(\beta+\omega) - \sigma \xi^{\beta+\omega-1})}$$

$$= \int_0^1 H(t, s) \phi_{\frac{9}{5}} \left[\lambda \int_0^1 G(s, \tau) \left(\frac{\tau}{1+\tau} x_{n-1}^{\frac{2}{3}}(\tau) + x_{n-1}(\sin(\tau)) + (D_{0+}^{\frac{1}{3}} x_{n-1}(\tau))^{\frac{3}{4}} \right) d\tau \right. \\ \left. + \frac{\lambda s^{\frac{3}{2}}}{\Gamma(5/2)} \cdot I^{\frac{7}{2}} \left(\phi_{\frac{9}{4}} \left(x_{n-1} \left(\frac{1}{4} \right) \right) \right) \right] ds + \frac{\Gamma(11/6) t^{\frac{1}{2}} \{ I^{\frac{1}{3}} [((7/4)x_{n-1}(3/4)) / (2(1+x_{n-1}(3/4)))] + \mu \}}{\Gamma(3/2) [\Gamma(11/6) - (1/4)(3/4)^{\frac{5}{6}}]},$$

其中, $t \in [0, 1], n = 1, 2, \dots$, 那么 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|x_n - x_{(\lambda, \mu)}\| = 0$;

(ii) $x_{(\lambda, \mu)}$ 关于 λ 单调递增;

(iii) $x_{(\lambda, \mu)}$ 关于 λ 连续。

注 3.1 在上述两例中, 非线性函数 $g(t, x)$ 是无界函数, 因此它们不能用类似文献 [7-8] 中的方法与结论处理。

参考文献:

[1] KILBAS A A, SRIVASTAVA H M, TRUJILLO J J. Theory and applications of differential equations [M]. Amsterdam: Elsevier, 2006:69-70.

[2] 白占兵. 分数阶微分方程边值问题理论及应用 [M]. 北京: 中国科学技术出版社, 2013:3-4.

BAI Zhanbing. Theory and applications of boundary value problems for fractional order differential equations [M]. Beijing: Science and Technology of China Press, 2013:3-4.

[3] LIANG S H, ZHANG J H. Existence of multiple positive solutions for m -point fractional boundary value problems on an infinite interval [J]. Mathematical and Computer Modelling, 2011, 54(5/6):1334-1346.

[4] LU H L, HAN Z L, SUN S R, et al. Existence on positive solutions for boundary value problems of nonlinear fractional differential equations with p -Laplacian [J]. Advances in Difference Equations, 2013, (1):1-16.

[5] ZHAI C B, XU L. Properties of positive solutions to a class of four-point boundary value problem of Caputo fractional differential equations with a parameter [J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2014, 19(8):2820-2827.

[6] WANG G T. Explicit iteration and unbounded solutions for fractional integral boundary value problem on an infinite interval [J]. Applied Mathematics Letters, 2015, 47:1-7.

- [7] WANG W X, GUO X T. Eigenvalue problem for fractional differential equations with nonlinear integral and disturbance parameter in boundary conditions[J]. *Boundary Value Problems*, 2016(1):42.
- [8] ZHANG L L, TIAN H M. Existence and uniqueness of positive solutions for a class of nonlinear fractional differential equations [J]. *Advances in Difference Equations*, 2017(1):114.
- [9] ZHANG X G, LIU L S, WIWATANAPATAPHEE B, et al. The eigenvalue for a class of singular p -Laplacian fractional differential equations involving the Riemann-Stieltjes integral boundary condition[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2014, 235:412-422.
- [10] LIU X P, JIA M. The positive solutions for integral boundary value problem of fractional p -Laplacian equation with mixed derivatives[J]. *Mediterranean Journal of Mathematics*, 2017, 14(2):94.
- [11] 田元生,李小平,葛渭高. p -Laplacian 分数阶微分方程边值问题正解的存在性[J]. *应用数学学报*, 2018, 41(4):529-539.
TIAN Yuansheng, LI Xiaoping, GE Weigao. Existence of positive solutions to boundary value problem of fractional differential equation with p -Laplacian[J]. *Acta Mathematicae Applicatae Sinica*, 2018, 41(4):529-539.
- [12] JONG K, CHOI H, RI Y. Existence of positive solutions of a class of multi-point boundary value problems for p -Laplacian fractional differential equations with singular source terms [J]. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2019, 72:272-281.
- [13] TIAN Y S, BAI Z B, SUN S J. Positive solutions for a boundary value problem of fractional differential equation with p -Laplacian operator[J]. *Advances in Difference Equations*, 2019(1):349.
- [14] DING Y Z, WEI Z L, XU J F, et al. Extremal solutions for nonlinear fractional boundary value problems with p -Laplacian [J]. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2015, 288:151-158.
- [15] HE Y. Extremal solutions for p -Laplacian fractional differential systems involving the Riemann-Liouville integral boundary conditions[J]. *Advances in Difference Equations*, 2018, 2018(3):1-11.
- [16] 王文霞,段佳艳,郭晓珍. 一类带有 p -Laplacian 算子的分数阶积分边值问题的正解与逐次迭代方法[J]. *应用数学*, 2022, 35(1):147-155.
WANG Wenxia, DUAN Jiayan, GUO Xiaozhen. Successive iteration and positive solutions for fractional integral boundary value problem with p -Laplacian operator[J]. *Mathematica Applicata*, 2022, 35(1):147-155.
- [17] 郭大钧. 非线性泛函分析[M]. 3版. 北京:高等教育出版社, 2015:181-182.
GUO Dajun. *Nonlinear Functional Analysis*[M]. 3rd ed. Beijing: Higher Education Press, 2015:181-182.
- [18] WANG W X, LIU X L, SHI P P. Nonlinear sum operator equations with a parameter and application to second-order three-point BVPs[J]. *Abstract and Applied Analysis*, 2014(1): 1085-3375.

(编辑:胡春燕)

(上接第109页)

- [9] LI Q, LI Y X. Monotone iterative technique for second order delayed periodic problem in Banach spaces [J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2015, 270:654-664.
- [10] GOU H D. Existence of ω -periodic solutions for second order delay differential equation in Banach spaces[J]. *Filomat*, 2022, 36(16):5347-5358.
- [11] LI Y X, GUO L J. Odd periodic solutions of fully second-order ordinary differential equations with superlinear nonlinearities [J]. *Journal of Function Spaces*, 2017, 5:4247365.
- [12] ZU J. Existence and uniqueness of periodic solution for nonlinear second-order ordinary differential equations[J]. *Boundary Value Problems*, 2011, 11:192156.
- [13] 李永祥,张丽娟. 完全二阶常微分方程的奇周期解[J]. *数学学报(中文版)*, 2022, 65(2):287-300.
LI Yongxiang, ZHANG Lijuan. Singular periodic solution of fully second order ordinary differential equations [J]. *Acta Mathematicae (Chinese Version)*, 2022, 65(2):287-300.
- [14] 刘晓明,李永祥. 具有非线性导数项的二阶常微分方程的正周期解[J]. *吉林大学学报(理学版)*, 2023, 61(6):1243-1250.
LIU Xiaoming, LI Yongxiang. Positive periodic solutions of second-order ordinary differential equations with nonlinear derivative terms[J]. *Journal of Jilin University(Natural Science)*, 2023, 61(6):1243-1250.
- [15] LI Y X. Positive periodic solutions of first and second-order ordinary differential equations[J]. *Chinese Annals of Mathematics (Series B)*, 2004, 25(3):413-420.

(编辑:胡春燕)