文章编号:1671-9352(2025)11-0101-08 DOI:10.6040/j.issn.1671-9352.0.2024.038

$\mathrm{COS}_n^{\cdot}$ 中基于半环格林关系的子簇

王爱法,胡玉
(重庆理工大学数学科学学院, 重庆 400054)

摘要:研究半环簇 $\mathrm{COS}_n^{\cdot}$ 中半环的格林关系,给出此类半环的 $\dot{L}\vee\overset{+}{D}$、$\dot{L}\vee\overset{+}{L}$、$\dot{L}\vee\overset{+}{R}$、$\overset{+}{L}\vee\dot{D}$ 关系的等价刻画,得到上述关系为同余的充分必要条件,证明由以上同余关系决定的半环类都是 $\mathrm{COS}_n^{\cdot}$ 的子簇,并给出上述子簇的 Mal′cev 积分解。

关键词:半环;格林关系;Mal′cev 积;簇
中图分类号:O153.3 **文献标志码**:A
引用格式:王爱法,胡玉. $\mathrm{COS}_n^{\cdot}$ 中基于半环格林关系的子簇[J]. 山东大学学报(理学版),2025,60(11):101-108.

Subvarieties based on the semiring Green's relation in $\mathrm{COS}_n^{\cdot}$

WANG Aifa, HU Yu
(School of Mathematical Sciences, Chongqing University of Technology, Chongqing 400054, China)

Abstract: The Green′s relations $\dot{L}\vee\overset{+}{D}$, $\dot{L}\vee\overset{+}{L}$, $\dot{L}\vee\overset{+}{R}$, $\overset{+}{L}\vee\dot{D}$ of semirings are studied, and equivalent characterizations for these relations within semirings are provided. The necessary and sufficient conditions for these relations to constitute congruences are obtained. It is proven that the semiring classes determined by the aforementioned congruence relation are subvarieties. The Mal′cev product decomposition of these subvarieties is given.

Key words: semiring; Green relations; Mal′cev product; variety

0 引言

设$(S,+,\cdot)$是一个$(2,2)$-型代数,则称$(S,+,\cdot)$是半环,简记为 S,若它满足以下 3 个条件:

(1) $(S,+)$是半群;

(2) $(S,\cdot)$是半群;

(3) $(S,+,\cdot)$满足恒等式 $x(y+z)\approx xy+xz$ 和$(x+y)z\approx xz+yz$。

若 V 为同型代数类,并对子代数、同态像、以及直积封闭,则称 V 为簇[1-2]。由 Birkhoff 定理知,一个同型代数类是簇当且仅当这个代数类是等式类[2]。

众所周知,格林关系在半群代数理论研究中发挥着重要作用,早在 1995 年,Howie[2]对半群上的格林关系进行梳理,随后国内外许多半群学者对其作了一系列推广。完全正则半群是半群代数中一类重要的研究对象。1999 年,Petrich 等[3]对完全正则半群相关理论进行了系统的研究,并基于格林关系给出了完全正则半群的分类。

由半环的定义知,半环可以看作由分配律连接着的同一非空集合上的 2 个半群,这 2 个半群相互联系,相互制约,因此,可利用半群上的格林关系来研究半环上的格林关系[4-5]。文献[6-7]分别对幂等元半环簇的 L-子簇和 D-子簇进行了研究,得到 L-(D-)子簇之间的 Mal′cev 积,并给出其格林关系是同余的充分必

收稿日期:2024-01-30;**网络出版时间**:2024-12-11 11:19:39
基金项目:国家自然科学基金资助项目(12371024);重庆市教委科学技术研究项目资助项目(KJZD-K202401102);重庆市自然科学基金创新发展联合基金项目(CSTB2025NSCQ-LZX0067)
第一作者:王爱法(1980—),男,副教授,硕士生导师,博士,研究方向为代数学. E-mail:wangaf@cqut.edu.cn

要条件。Pastijin 等[8]研究幂等元半环乘法半群上的格林 D 关系，给出上述格林 D 关系是半环同余的等价条件。

许多学者开始关注并研究幂等元半环上的格林关系。Ren 等[9]研究满足附加恒等式 $x^n\approx x$ 的幂等元半环簇，得到这些簇中半环的乘法半群的格林关系是同余的充要条件。Cheng 等[10]研究一类幂等元半环的乘法半群上的格林关系的开同余，得到此类半环簇的子簇之间的关系，并给出其 Mal′cev 积。练利锋[11]研究乘法半群是完全正则半群，加法半群是带的半环的格林关系，对其 $\dot{D}\wedge\overset{+}{D}$、$\dot{D}\wedge\overset{+}{L}$、$\dot{D}\wedge\overset{+}{R}$、$\dot{D}\wedge\overset{+}{D}$ 关系进行刻画。文献[12]给出 $\dot{L}\wedge\overset{+}{D}$、$\dot{L}\wedge\overset{+}{R}$、$\dot{L}\wedge\overset{+}{L}$ 是同余的充分必要条件。王爱法[13]探究乘法半群为完全正则半群加法半群为幂等元半群的半环簇上的格林关系，给出 $\dot{L}\vee\overset{+}{D}$、$\dot{L}\vee\overset{+}{R}$、$\dot{L}\vee\overset{+}{L}$、$\dot{D}\vee\overset{+}{L}$ 关系的刻画。一些学者开始研究乘法幂等元半环簇中半环的格林关系，如付钰琛等[14]讨论加法半群是可换的 Clifford 半群，乘法半群是纯正群的半环上的 $\overset{+}{H}\wedge\dot{L}$、$\overset{+}{H}\wedge\dot{R}$、$\overset{+}{H}\wedge\dot{D}$、$\dot{L}\wedge\overset{+}{L}$、$\dot{L}\wedge\overset{+}{D}$、$\overset{+}{L}\wedge\dot{D}$、$\overset{+}{H}\vee\dot{R}$、$\overset{+}{H}\vee\dot{D}$ 关系，得到这些关系为同余关系的充分必要条件，并证明由上述同余所确定的半环类都是簇。

本文主要刻画以下 12 类与 L 关系相关的半环类，并且证明它们都是半环簇 $\mathrm{COS}_n^{\cdot}$ 的子簇，最后得到这些子簇之间的 Mal′cev 积：

$$\{S\in\mathrm{COS}_n^{\cdot}:\dot{L}\vee\overset{+}{D}=\Delta\},\quad \{S\in\mathrm{COS}_n^{\cdot}:\dot{L}\vee\overset{+}{D}=\nabla\},\quad \{S\in\mathrm{COS}_n^{\cdot}:\dot{L}\vee\overset{+}{D}\in\mathrm{Con}(S)\},$$
$$\{S\in\mathrm{COS}_n^{\cdot}:\dot{L}\vee\overset{+}{L}=\Delta\},\quad \{S\in\mathrm{COS}_n^{\cdot}:\dot{L}\vee\overset{+}{L}=\nabla\},\quad \{S\in\mathrm{COS}_n^{\cdot}:\dot{L}\vee\overset{+}{L}\in\mathrm{Con}(S)\},$$
$$\{S\in\mathrm{COS}_n^{\cdot}:\dot{L}\vee\overset{+}{R}=\Delta\},\quad \{S\in\mathrm{COS}_n^{\cdot}:\dot{L}\vee\overset{+}{R}=\nabla\},\quad \{S\in\mathrm{COS}_n^{\cdot}:\dot{L}\vee\overset{+}{R}\in\mathrm{Con}(S)\},$$
$$\{S\in\mathrm{COS}_n^{\cdot}:\overset{+}{L}\vee\dot{D}=\Delta\},\quad \{S\in\mathrm{COS}_n^{\cdot}:\overset{+}{L}\vee\dot{D}=\nabla\},\quad \{S\in\mathrm{COS}_n^{\cdot}:\overset{+}{L}\vee\dot{D}\in\mathrm{Con}(S)\}。$$

注　这里 Δ、∇ 分别表示半环 S 上的恒等关系和泛关系。

1　预备知识

设半环 S 满足下列附加恒等式：

$$x^n\approx x,\tag{1}$$
$$(2^n-1)x\approx x,\tag{2}$$
$$(x+y)^{n-1}\approx x^{n-1}+y^{n-1},\tag{3}$$
$$(xy)^{n-1}\approx x^{n-1}y^{n-1},\tag{4}$$

则对任意 $a\in S$，由 $aa^{n-2}=a^{n-1}=a^{n-2}a$ 可知，$(S,\cdot)$ 是完全正则半群。显然，所有满足式(1)—(4)的半环类构成一个簇，记为$\mathrm{COS}_n^{\cdot}$。$\dot{L}$、$\dot{R}$、$\dot{D}$ 分别表示半环 S 的乘法半群$(S,\cdot)$上的格林 L、R、D 关系，用符号 $\overset{+}{L}$、$\overset{+}{R}$、$\overset{+}{D}$ 分别表示半环 S 的加法半群$(S,+)$上的格林 L、R、D 关系。

对任意 $S\in\mathrm{COS}_n^{\cdot}$，分别定义其加法半群和乘法半群的 $\overset{+}{L}$、$\overset{+}{R}$、$\overset{+}{D}$、$\dot{L}$、$\dot{R}$、$\dot{D}$ 关系[14]：

$$(\forall a,b\in S)\ a\overset{+}{L}b\Leftrightarrow a=a+2b,\ b=b+2a,$$
$$(\forall a,b\in S)\ a\overset{+}{R}b\Leftrightarrow a=2b+a,\ b=2a+b,$$
$$(\forall a,b\in S)\ a\overset{+}{D}b\Leftrightarrow a=a+2b+2a,\ b=b+2a+2b,$$
$$(\forall a,b\in S)\ a\dot{L}b\Leftrightarrow a=ab^{n-1},\ b=ba^{n-1},$$
$$(\forall a,b\in S)\ a\dot{R}b\Leftrightarrow a=b^{n-1}a,\ b=a^{n-1}b,$$
$$(\forall a,b\in S)\ a\dot{D}b\Leftrightarrow a=ab^{n-1}a^{n-1},\ b=ba^{n-1}b^{n-1}。$$

类似文献[6]，容易验证引理 1、2 成立。

引理 1　对任意 $S\in\mathrm{COS}_n^{\cdot}$，下列式子成立：

$$\dot{L}\vee\overset{+}{D}=\overset{+}{D}\dot{L}\overset{+}{D},\tag{5}$$
$$\dot{L}\vee\overset{+}{L}=\overset{+}{L}\dot{L}\overset{+}{L},\tag{6}$$

$$\dot{L}\vee\overset{+}{R}=\overset{+}{R}\dot{L}\overset{+}{R}, \tag{7}$$

$$\overset{+}{L}\vee\dot{D}=\overset{+}{L}\dot{D}\overset{+}{L}。 \tag{8}$$

引理 2 设 $S\in COS_n^{\cdot}$,则对任意 $a,b\in S$,有

(1) $a\overset{+}{L}b\Leftrightarrow(\exists u,v\in S)\ a=u+2v+2u,\ b=v+2u$,

(2) $a\overset{+}{R}b\Leftrightarrow(\exists u,v\in S)\ a=2u+2v+u,\ b=2u+v$,

(3) $a\overset{+}{D}b\Leftrightarrow(\exists u,v\in S)\ a=u+2v,\ b=v+2u$,

(4) $a\dot{L}b\Leftrightarrow(\exists u,v\in S)\ a=uv^{n-1}u^{n-1},\ b=vu^{n-1}$,

(5) $a\dot{R}b\Leftrightarrow(\exists u,v\in S)\ a=u^{n-1}v^{n-1}u,\ b=u^{n-1}v$,

(6) $a\dot{D}b\Leftrightarrow(\exists u,v\in S)\ a=uv^{n-1}u^{n-1},\ b=vu^{n-1}v^{n-1}$。

引理 3 设 $S\in COS_n^{\cdot}$,则对任意 $a,b\in S$,有

(1) $a(\dot{L}\vee\overset{+}{D})b\Leftrightarrow\overset{+}{D}_{ab^{n-1}}=\overset{+}{D}_a,\ \overset{+}{D}_{ba^{n-1}}=\overset{+}{D}_b$,

(2) $a(\dot{L}\vee\overset{+}{L})b\Leftrightarrow\overset{+}{L}_{ab^{n-1}}=\overset{+}{L}_a,\ \overset{+}{L}_{ba^{n-1}}=\overset{+}{L}_b$,

(3) $a(\dot{L}\vee\overset{+}{R})b\Leftrightarrow\overset{+}{R}_{ab^{n-1}}=\overset{+}{R}_a,\ \overset{+}{R}_{ba^{n-1}}=\overset{+}{R}_b$,

(4) $a(\overset{+}{L}\vee\dot{D})b\Leftrightarrow\overset{+}{L}_{ab^{n-1}a^{n-1}}=\overset{+}{L}_a,\ \overset{+}{L}_{ba^{n-1}b^{n-1}}=\overset{+}{L}_b$。

证明 引理3(1),其他情况类似可证。设 $S\in COS_n^{\cdot}$,对任意 $a,b\in S$,若 $a(\dot{L}\vee\overset{+}{D})b$,则由式(5)可知,存在 $u,v\in S$ 使得 $a\overset{+}{D}u\dot{L}v\overset{+}{D}b$。因为 $\overset{+}{D}$ 是 $(S,+,\cdot)$ 上的同余且 $a\overset{+}{D}u$,所以 $ab^{n-1}\overset{+}{D}ub^{n-1}$。又 $u\dot{L}v\overset{+}{D}b$,从而 $u=uv^{n-1}\overset{+}{D}ub^{n-1}$,即 $a\overset{+}{D}u=uv^{n-1}\overset{+}{D}ub^{n-1}\overset{+}{D}ab^{n-1}$,因此 $\overset{+}{D}_{ab^{n-1}}=\overset{+}{D}_a$。类似可证 $\overset{+}{D}_{ba^{n-1}}=\overset{+}{D}_b$。

反之,对 $a,b\in S$,若 $\overset{+}{D}_{ab^{n-1}}=\overset{+}{D}_a,\ \overset{+}{D}_{ba^{n-1}}=\overset{+}{D}_b$,则有 $a\overset{+}{D}ab^{n-1}\overset{+}{D}ab^{n-1}a^{n-1}\dot{L}ba^{n-1}\overset{+}{D}b$,因此 $a(\dot{L}\vee\overset{+}{D})b$。

2 主要结果

由引理 1、2、3,容易得到下面的引理 4、5。

引理 4 设 $S\in COS_n^{\cdot}$,则有

(1) 满足 $\dot{L}\vee\overset{+}{D}=\nabla\Leftrightarrow\forall a,b\in S,\ \overset{+}{D}_{ab^{n-1}}=\overset{+}{D}_a$,即 S 满足

$$x\approx x+2xy^{n-1}+2x,$$
$$xy^{n-1}\approx xy^{n-1}+2x+2xy^{n-1}。$$

(2) 满足 $\dot{L}\vee\overset{+}{L}=\nabla\Leftrightarrow\forall a,b\in S,\ \overset{+}{L}_{ab^{n-1}}=\overset{+}{L}_a$,即 S 满足

$$x\approx x+2xy^{n-1},$$
$$xy^{n-1}\approx xy^{n-1}+2x。$$

(3) 满足 $\dot{L}\vee\overset{+}{R}=\nabla\Leftrightarrow\forall a,b\in S,\ \overset{+}{R}_{ab^{n-1}}=\overset{+}{R}_a$,即 S 满足

$$xy^{n-1}\approx 2x+xy^{n-1},$$
$$x\approx 2xy^{n-1}+x。$$

(4) 满足 $\overset{+}{L}\vee\dot{D}=\nabla\Leftrightarrow\forall a,b\in S,\ \overset{+}{L}_{ab^{n-1}a^{n-1}}=\overset{+}{L}_a$,即 S 满足

$$x\approx x+2xy^{n-1}x^{n-1},$$
$$xy^{n-1}x^{n-1}\approx xy^{n-1}x^{n-1}+2x。$$

由引理 4 知,上述半环类的集合都构成簇$COS_n^{\cdot}$ 的子簇,用 $\bar{L}_{d_1}$、$\bar{L}_{l_1}$、$\bar{L}_{r_1}$和 $\bar{L}_{d_1^*}$ 分别表示上述子簇。

引理 5 设 $S\in COS_n^{\cdot}$,则有

(1) S 满足 $\dot{L}\vee\overset{+}{D}=\Delta\Leftrightarrow S$ 满足

$$x+2y\approx y+2x, \tag{9}$$

$$xy^{n-1}x^{n-1}\approx yx^{n-1}。 \tag{10}$$

(2) S 满足 $\dot{L}\vee\overset{+}{L}=\Delta\Leftrightarrow S$ 满足

$$x+2y+2x\approx y+2x,$$
$$xy^{n-1}x^{n-1}\approx yx^{n-1}。$$

(3) S 满足 $\dot{L}\vee\overset{+}{R}=\Delta\Leftrightarrow S$ 满足

$$2x+2y+x\approx 2x+y,$$
$$xy^{n-1}x^{n-1}\approx yx^{n-1}。$$

(4) S 满足 $\overset{+}{L}\vee\dot{D}=\Delta\Leftrightarrow S$ 满足

$$x+2y+2x\approx y+2x,$$
$$xy^{n-1}x^{n-1}\approx yx^{n-1}y^{n-1}。$$

显然,上述半环类的集合也构成簇$\mathbf{COS}_n^{\cdot}$ 的子簇,$\overline{L}_{d_0}$、$\overline{L}_{l_0}$、$\overline{L}_{r_0}$和 $\overline{L}_{d_0^*}$分别表示上述子簇。

$\overline{L}_d$、$\overline{L}_l$、$\overline{L}_r$ 和 $\overline{L}_{d^*}$分别表示下列半环类的集合

$$\{S\in\mathbf{COS}_n^{\cdot}:\dot{L}\vee\overset{+}{D}\in\mathrm{Con}(S)\},$$
$$\{S\in\mathbf{COS}_n^{\cdot}:\dot{L}\vee\overset{+}{L}\in\mathrm{Con}(S)\},$$
$$\{S\in\mathbf{COS}_n^{\cdot}:\dot{L}\vee\overset{+}{R}\in\mathrm{Con}(S)\},$$
$$\{S\in\mathbf{COS}_n^{\cdot}:\overset{+}{L}\vee\dot{D}\in\mathrm{Con}(S)\}。$$

定理 1 设 $S\in\mathbf{COS}_n^{\cdot}$,则以下式子成立:

(1) $\overline{L}_d=\overline{L}_{d_1}\circ\overline{L}_{d_0}$,

(2) $\overline{L}_l=\overline{L}_{l_1}\circ\overline{L}_{l_0}$,

(3) $\overline{L}_r=\overline{L}_{r_1}\circ\overline{L}_{r_0}$,

(4) $\overline{L}_{d^*}=\overline{L}_{d_1^*}\circ\overline{L}_{d_0^*}$。

证明 定理1(1),其他等式类似可证。

设 $S\in\overline{L}_d$且 $\rho=\dot{L}\vee\overset{+}{D}\in\mathrm{Con}(S)$,对任意 $u,v\in S$,若$(u,v)\in\rho$,则$(u^2,uv)\in\rho$。又因为$(u^2,u)\in\dot{L}\subseteq\dot{L}\vee\overset{+}{D}=\rho$,所以$(u,uv)\in\rho$,即$\rho_u$ 对乘法封闭。同理,ρ_u 对加法也封闭。因此$(\rho_u,+,\cdot)$构成 S 的一个子半环,$\rho_u\in\overline{L}_{d_1}$。对任意 $a,b\in S$,由 $\dot{L}\subseteq\rho$ 和 $\dot{L}_{ab^{n-1}a^{n-1}}=\dot{L}_{ba^{n-1}}$,可得$\rho_{ab^{n-1}a^{n-1}}=\rho_{ba^{n-1}}$,即$\rho_a\rho_{b^{n-1}}\rho_{a^{n-1}}=\rho_b\rho_{a^{n-1}}$。由此可知 S/ρ 满足式(10)。对任意 $a,b\in S$,由 $\overset{+}{D}\subseteq\rho$ 和 $\overset{+}{D}_{a+2b}=\overset{+}{D}_{b+2a}$,可得 $\rho_{a+2b}=\rho_{b+2a}$,即 $\rho_a+\rho_{2b}=\rho_b+\rho_{2a}$,因此,$S/\rho$ 满足式(9)。由引理5(1),$S\in\overline{L}_{d_1}\circ\overline{L}_{d_0}$,即 $\overline{L}_d\subseteq\overline{L}_{d_1}\circ\overline{L}_{d_0}$。

反之,如果 $S\in\overline{L}_{d_1}\circ\overline{L}_{d_0}$,则对任意 $u\in S$,存在$\rho\in\mathrm{Con}(S)$使得$\rho_u\in\overline{L}_{d_1}$, $S/\rho\in\overline{L}_{d_0}$。由$\rho_u\in\overline{L}_{d_1}$,可得$\rho\subseteq\dot{L}\vee\overset{+}{D}$。由 $S/\rho\in\overline{L}_{d_0}$,可得 S/ρ 满足式(9)、(10),因此 $\dot{L}\vee\overset{+}{D}\subseteq\rho$,即$\rho=\dot{L}\vee\overset{+}{D}$,于是 $S\in\overline{L}_d$,从而 $\overline{L}_{d_1}\circ\overline{L}_{d_0}\subseteq\overline{L}_d$。

定理 2 $\overline{L}_d$ 是由下列式子确定的$\mathbf{COS}_n^{\cdot}$ 的子簇:

$$xy^{n-1}x^{n-1}+z\approx xy^{n-1}x^{n-1}+z+2(xy^{n-1}x^{n-1}+z)(yx^{n-1}+z)^{n-1}+2(xy^{n-1}x^{n-1}+z),\tag{11}$$

$$(xy^{n-1}x^{n-1}+z)(yx^{n-1}+z)^{n-1}\approx(xy^{n-1}x^{n-1}+z)(yx^{n-1}+z)^{n-1}+2(xy^{n-1}x^{n-1}+z)+2(xy^{n-1}x^{n-1}+z)(yx^{n-1}+z)^{n-1},\tag{12}$$

$$zxy^{n-1}x^{n-1}\approx zxy^{n-1}x^{n-1}+2zxy^{n-1}x^{n-1}(zyx^{n-1})^{n-1}+2zxy^{n-1}x^{n-1},\tag{13}$$

$$zxy^{n-1}x^{n-1}(zyx^{n-1})^{n-1}\approx zxy^{n-1}x^{n-1}(zyx^{n-1})^{n-1}+2zxy^{n-1}x^{n-1}+2zxy^{n-1}x^{n-1}(zyx^{n-1})^{n-1}\tag{14}$$

证明 设 $S\in\overline{L}_d$且 $\rho=\dot{L}\vee\overset{+}{D}\in\mathrm{Con}(S)$,由定理1,对任意 $u\in S$, $\rho_u\in\overline{L}_{d_1}$, $S/\rho\in\overline{L}_{d_0}$。因为 $S/\rho\in\overline{L}_{d_0}$,所以由引理5(1)可知,对任意 $a,b\in S$, $\rho_{ab^{n-1}a^{n-1}}=\rho_{ba^{n-1}}$。又因为$\rho$ 是 S 上的同余,所以

$$\rho_{ab^{n-1}a^{n-1}+c}=\rho_{ba^{n-1}+c},\quad \rho_{cab^{n-1}a^{n-1}}=\rho_{cba^{n-1}}。$$

进一步地,由引理4(1),可得

$$ab^{n-1}a^{n-1}+c=ab^{n-1}a^{n-1}+c+2(ab^{n-1}a^{n-1}+c)(ba^{n-1}+c)^{n-1}+2(ab^{n-1}a^{n-1}+c),$$
$$(ab^{n-1}a^{n-1}+c)(ba^{n-1}+c)^{n-1}=(ab^{n-1}a^{n-1}+c)(ba^{n-1}+c)^{n-1}+2(ab^{n-1}a^{n-1}+c)$$

$$+2(ab^{n-1}a^{n-1}+c)(ba^{n-1}+c)^{n-1},$$
$$cab^{n-1}a^{n-1}=cab^{n-1}a^{n-1}+2cab^{n-1}a^{n-1}(cba^{n-1})^{n-1}+2cab^{n-1}a^{n-1},$$
$$cab^{n-1}a^{n-1}(cba^{n-1})^{n-1}=cab^{n-1}a^{n-1}(cba^{n-1})^{n-1}+2cab^{n-1}a^{n-1}+2cab^{n-1}a^{n-1}(cba^{n-1})^{n-1}。$$

因此 S 满足式(11)—(14)。

反之,设 $S\in \mathrm{COS}_n^{\cdot}$ 且满足式(11)—(14),对任意的 $a,b\in S$ 且 $a(\dot{L}\vee \overset{+}{D})b$,由 $\dot{L}\vee \overset{+}{D}=\overset{+}{D}\dot{L}\overset{+}{D}$可知,存在 c,$d\in S$使得 $a\overset{+}{D}c\dot{L}d\overset{+}{D}b$。首先证明 $\dot{L}\vee \overset{+}{D}$ 是$(S,+)$上的同余,由式(11)、(12),可得

$$(cd^{n-1}c^{n-1}+w)\overset{+}{D}(cd^{n-1}c^{n-1}+w)(dc^{n-1}+w)^{n-1}。$$

因为 $c\dot{L}d$,所以 $cd^{n-1}=c$,从而$(c+w)\overset{+}{D}(c+w)(d+w)^{n-1}$。同理可得

$$(d+w)\overset{+}{D}(d+w)(c+w)^{n-1},$$

因此

$$(a+w)\overset{+}{D}(c+w)\overset{+}{D}(c+w)(d+w)^{n-1}\overset{+}{D}(c+w)(d+w)^{n-1}(c+w)^{n-1}\dot{L}(d+w)(c+w)^{n-1}\overset{+}{D}(d+w)\overset{+}{D}(b+w),$$

即$(a+w)(\dot{L}\vee \overset{+}{D})(b+w)$。同理可证$(w+a)(\dot{L}\vee \overset{+}{D})(w+b)$。由式(13)、(14),可得

$$wcd^{n-1}c^{n-1}\overset{+}{D}wcd^{n-1}c^{n-1}(wdc^{n-1})^{n-1}。$$

由 $c\dot{L}d$,可得 $cd^{n-1}=c$ 和 $c^{n-1}d^{n-1}=c^{n-1}$,进一步地,有 $wc\overset{+}{D}wcw^{n-1}d^{n-1}$。交换 c、d,得 $wd\overset{+}{D}wdw^{n-1}c^{n-1}$。又因为 $\overset{+}{D}$ 是 S 上的同余,所以

$$wa\overset{+}{D}wc\overset{+}{D}wcw^{n-1}d^{n-1}\overset{+}{D}wcw^{n-1}d^{n-1}w^{n-1}c^{n-1}\dot{L}w^{n-1}d^{n-1}w^{n-1}c^{n-1}\dot{L}wdw^{n-1}c^{n-1}\overset{+}{D}wd\overset{+}{D}wb。$$

因此 $wa(\dot{L}\vee \overset{+}{D})wb$,即 $\dot{L}\vee \overset{+}{D}$ 是$(S,\cdot)$上的左同余。又因为 $\dot{L}$ 是$(S,\cdot)$上的右同余,$\overset{+}{D}$ 是 S 上的同余,所以 $\dot{L}\vee \overset{+}{D}$是 S 上的同余。

定理 3　$\overline{L}_l$ 是由下列式子确定的$\mathrm{COS}_n^{\cdot}$ 的子簇:

$$xy^{n-1}x^{n-1}+z\approx(xy^{n-1}x^{n-1}+z)+2(xy^{n-1}x^{n-1}+z)(yx^{n-1}+z)^{n-1},\tag{15}$$
$$(xy^{n-1}x^{n-1}+z)(yx^{n-1}+z)^{n-1}\approx(xy^{n-1}x^{n-1}+z)(yx^{n-1}+z)^{n-1}+2(xy^{n-1}x^{n-1}+z),\tag{16}$$
$$z+xy^{n-1}x^{n-1}\approx(z+xy^{n-1}x^{n-1})+2(z+xy^{n-1}x^{n-1})(z+yx^{n-1})^{n-1},\tag{17}$$
$$(z+xy^{n-1}x^{n-1})(z+yx^{n-1})^{n-1}\approx(z+xy^{n-1}x^{n-1})(z+yx^{n-1})^{n-1}+2(z+xy^{n-1}x^{n-1}),\tag{18}$$
$$z+x+2y+2x\approx(z+x+2y+2x)+2(z+x+2y+2x)(z+y+2x)^{n-1}\tag{19}$$
$$(z+x+2y+2x)(z+y+2x)^{n-1}\approx(z+x+2y+2x)(z+y+2x)^{n-1}+2(z+x+2y+2x)\tag{20}$$
$$zxy^{n-1}x^{n-1}\approx zxy^{n-1}x^{n-1}+2zxy^{n-1}x^{n-1}(zyx^{n-1})^{n-1},\tag{21}$$
$$zxy^{n-1}x^{n-1}(zyx^{n-1})^{n-1}\approx zxy^{n-1}x^{n-1}(zyx^{n-1})^{n-1}+2zxy^{n-1}x^{n-1}。\tag{22}$$

证明　设 $S\in\overline{L}_l$且 $\rho=\dot{L}\vee \overset{+}{L}\in \mathrm{Con}(S)$,则对任意 $u\in S$,由定理 1 知,$\rho_u\in\overline{L}_{l_1}$, $S/\rho\in\overline{L}_{l_0}$。因为 $S/\rho\in\overline{L}_{l_0}$,所以由引理 5(2)可知,对任意 $a,b\in S$,

$$\rho_{ab^{n-1}a^{n-1}}=\rho_{ba^{n-1}},\quad \rho_{a+2b+2a}=\rho_{b+2a}。$$

因为 ρ 是 S 上的同余,所以

$$\rho_{ab^{n-1}a^{n-1}+w}=\rho_{ba^{n-1}+w},\quad \rho_{w+ab^{n-1}a^{n-1}}=\rho_{w+ba^{n-1}},$$
$$\rho_{w+a+2b+2a}=\rho_{w+b+2a},\quad \rho_{wab^{n-1}a^{n-1}}=\rho_{wba^{n-1}}。$$

又因为$\rho_u\in\overline{L}_{l_1}$,所以对任意 $u\in S$,由引理 4(2),可得

$$ab^{n-1}a^{n-1}+w=(ab^{n-1}a^{n-1}+w)+2(ab^{n-1}a^{n-1}+w)(ba^{n-1}+w)^{n-1},$$
$$(ab^{n-1}a^{n-1}+w)(ba^{n-1}+w)^{n-1}=(ab^{n-1}a^{n-1}+w)(ba^{n-1}+w)^{n-1}+2(ab^{n-1}a^{n-1}+w),$$
$$w+ab^{n-1}a^{n-1}=(w+ab^{n-1}a^{n-1})+2(w+ab^{n-1}a^{n-1})(w+ba^{n-1})^{n-1},$$
$$(w+ab^{n-1}a^{n-1})(w+ba^{n-1})^{n-1}=(w+ab^{n-1}a^{n-1})(w+ba^{n-1})^{n-1}+2(w+ab^{n-1}a^{n-1}),$$
$$w+a+2b+2a=(w+a+2b+2a)+2(w+a+2b+2a)(w+b+2a)^{n-1},$$
$$(w+a+2b+2a)(w+b+2a)^{n-1}=(w+a+2b+2a)(w+b+2a)^{n-1}+2(w+a+2b+2a),$$
$$wab^{n-1}a^{n-1}=wab^{n-1}a^{n-1}+2wab^{n-1}a^{n-1}(wba^{n-1})^{n-1},$$

$$wab^{n-1}a^{n-1}(wba^{n-1})^{n-1}=wab^{n-1}a^{n-1}(wba^{n-1})^{n-1}+2wab^{n-1}a^{n-1}。$$

因此 S 满足式(15)—(22)。

反之,假设 S 满足式(15)—(22)。对任意的 $a,b\in S$,若 $a(\dot{L}\vee\overset{+}{L})b$,则存在 $c,d\in S$ 使得 $a\overset{+}{L}c\dot{L}d\overset{+}{L}b$。由式(15)、(16)可得

$$(cd^{n-1}c^{n-1}+w)\overset{+}{L}(cd^{n-1}c^{n-1}+w)(dc^{n-1}+w)^{n-1}。$$

由 $c\dot{L}d$ 知 $cd^{n-1}=c$ 和 $dc^{n-1}=d$,因此 $(c+w)\overset{+}{L}(c+w)(d+w)^{n-1}$。交换 c、d,有 $(d+w)\overset{+}{L}(d+w)(c+w)^{n-1}$。又因为 $\overset{+}{L}$ 是 $(S,+)$ 上的右同余,$(S,\cdot)$ 上的同余,所以

$$(a+w)\overset{+}{L}(c+w)\overset{+}{L}(c+w)(d+w)^{n-1}\overset{+}{L}(c+w)(d+w)^{n-1}(c+w)^{n-1}\dot{L}(d+w)(c+w)^{n-1}\overset{+}{L}(d+w)\overset{+}{L}(b+w),$$

即 $(a+w)(\dot{L}\vee\overset{+}{L})(b+w)$,因此,$\dot{L}\vee\overset{+}{L}$ 是 $(S,+)$ 上的右同余。由式(17)、(18)可得

$$(w+c)\overset{+}{L}(w+c)(w+d)^{n-1},$$

$$(w+d)\overset{+}{L}(w+d)(w+c)^{n-1}。$$

由式(19)、(20)可得

$$(w+a)\overset{+}{L}(w+a)(w+c)^{n-1},$$

$$(w+d)\overset{+}{L}(w+d)(w+b)^{n-1},$$

$$(w+c)(w+a)^{n-1}\overset{+}{L}(w+c),$$

$$(w+b)(w+d)^{n-1}\overset{+}{L}(w+b)。$$

因此

$$(w+a)\overset{+}{L}(w+a)(w+c)^{n-1}\overset{+}{L}(w+a)(w+c)^{n-1}(w+a)^{n-1}\dot{L}(w+c)(w+a)^{n-1}\overset{+}{L}(w+c),$$

$$(w+c)\overset{+}{L}(w+c)(w+d)^{n-1}\overset{+}{L}(w+c)(w+d)^{n-1}(w+c)^{n-1}\dot{L}(w+d)(w+c)^{n-1}\overset{+}{L}(w+d),$$

$$(w+d)\overset{+}{L}(w+d)(w+b)^{n-1}\overset{+}{L}(w+d)(w+b)^{n-1}(w+d)^{n-1}\dot{L}(w+b)(w+d)^{n-1}\overset{+}{L}(w+b)。$$

即 $(w+a)(\dot{L}\vee\overset{+}{L})(w+b)$,从而 $\dot{L}\vee\overset{+}{L}$ 是 $(S,+)$ 上的左同余。由式(21)、(22),可得

$$wcd^{n-1}c^{n-1}\overset{+}{L}wcd^{n-1}c^{n-1}(wdc^{n-1})^{n-1},$$

$$wdc^{n-1}d^{n-1}\overset{+}{L}wdc^{n-1}d^{n-1}(wcd^{n-1})^{n-1}。$$

即

$$wc\overset{+}{L}wcw^{n-1}d^{n-1},$$

$$wd\overset{+}{L}wdw^{n-1}c^{n-1}。$$

又因为 $\overset{+}{L}$ 是 $(S,\cdot)$ 上的同余,所以

$$wa\overset{+}{L}wc\overset{+}{L}wcw^{n-1}d^{n-1}\overset{+}{L}wcw^{n-1}d^{n-1}(wc)^{n-1}\dot{L}wdw^{n-1}c^{n-1}\overset{+}{L}wd\overset{+}{L}wb,$$

即 $(wa)(\dot{L}\vee\overset{+}{L})(wb)$,因此 $\dot{L}\vee\overset{+}{L}$ 是 $(S,\cdot)$ 上的左同余。又因为 $\overset{+}{L}$ 是 $(S,\cdot)$ 上的同余,$\dot{L}$ 是 $(S,\cdot)$ 上的右同余,所以 $\dot{L}\vee\overset{+}{L}$ 是 $(S,\cdot)$ 上的右同余,因此,$\dot{L}\vee\overset{+}{L}\in\mathrm{Con}(S)$。

类似定理 2、3 可得如下定理。

定理 4 $\bar{L}r$ 是由下列式子确定的 $\mathrm{COS}_n^{\cdot}$ 的子簇:

$$(z+xy^{n-1}x^{n-1})(z+yx^{n-1})^{n-1}\approx 2(z+xy^{n-1}x^{n-1})+(z+xy^{n-1}x^{n-1})(z+yx^{n-1})^{n-1},$$

$$z+xy^{n-1}x^{n-1}\approx 2(z+xy^{n-1}x^{n-1})(z+yx^{n-1})^{n-1}+(z+xy^{n-1}x^{n-1}),$$

$$(xy^{n-1}x^{n-1}+z)(yx^{n-1}+z)^{n-1}\approx 2(xy^{n-1}x^{n-1}+z)+(xy^{n-1}x^{n-1}+z)(yx^{n-1}+z)^{n-1},$$

$$xy^{n-1}x^{n-1}+z\approx 2(xy^{n-1}x^{n-1}+z)(yx^{n-1}+z)^{n-1}+(xy^{n-1}x^{n-1}+z),$$

$$(2x+2y+x+z)(2x+y+z)^{n-1}\approx 2(2x+2y+x+z)+(2x+2y+x+z)(2x+y+z)^{n-1},$$

$$2x+2y+x+z\approx 2(2x+2y+x+z)(2x+y+z)^{n-1}+(2x+2y+x+z),$$

$$zxy^{n-1}x^{n-1}(zyx^{n-1})^{n-1}\approx 2zxy^{n-1}x^{n-1}+zxy^{n-1}x^{n-1}(zyx^{n-1})^{n-1},$$
$$zxy^{n-1}x^{n-1}\approx 2zxy^{n-1}x^{n-1}(zyx^{n-1})^{n-1}+zxy^{n-1}x^{n-1}。$$

定理 5　$\bar{L}_{d^*}$是由下列式子确定的$\mathrm{COS}_n^{\cdot}$的子簇：

$$z+xy^{n-1}x^{n-1}\approx(z+xy^{n-1}x^{n-1})+2(z+xy^{n-1}x^{n-1})(z+yx^{n-1}y^{n-1})^{n-1}(z+xy^{n-1}x^{n-1})^{n-1},$$
$$(z+xy^{n-1}x^{n-1})(z+yx^{n-1}y^{n-1})^{n-1}(z+xy^{n-1}x^{n-1})^{n-1}\approx(z+xy^{n-1}x^{n-1})(z+yx^{n-1}y^{n-1})^{n-1}(z+xy^{n-1}x^{n-1})^{n-1}+2(z+xy^{n-1}x^{n-1}),$$
$$xy^{n-1}x^{n-1}+z\approx(xy^{n-1}x^{n-1}+z)+2(xy^{n-1}x^{n-1}+z)(yx^{n-1}y^{n-1}+z)^{n-1}(xy^{n-1}x^{n-1}+z)^{n-1},$$
$$(xy^{n-1}x^{n-1}+z)(yx^{n-1}y^{n-1}+z)^{n-1}(xy^{n-1}x^{n-1}+z)^{n-1}\approx(xy^{n-1}x^{n-1}+z)(yx^{n-1}y^{n-1}+z)^{n-1}(xy^{n-1}x^{n-1}+z)^{n-1}+2(xy^{n-1}x^{n-1}+z),$$
$$z+x+2y+2x\approx(z+x+2y+2x)+2(z+x+2y+2x)(z+y+2x)^{n-1}(z+x+2y+2x)^{n-1},$$
$$(z+x+2y+2x)(z+y+2x)^{n-1}(z+x+2y+2x)^{n-1}\approx(z+x+2y+2x)(z+y+2x)^{n-1}(z+x+2y+2x)^{n-1}+2(z+x+2y+2x)。$$

$\dot{L}_0$、$\dot{L}_1$、$\dot{L}$、$\overset{+}{L}_0$、$\overset{+}{L}_1$ 和 $\overset{+}{L}$ 分别表示下列半环类的集合：

$$\dot{L}_0=\{S\in\mathrm{COS}_n^{\cdot}:\dot{L}=\Delta\},\qquad \overset{+}{L}_0=\{S\in\mathrm{COS}_n^{\cdot}:\overset{+}{L}=\Delta\},$$
$$\dot{L}_1=\{S\in\mathrm{COS}_n^{\cdot}:\dot{L}=\nabla\},\qquad \overset{+}{L}_1=\{S\in\mathrm{COS}_n^{\cdot}:\overset{+}{L}=\nabla\},$$
$$\dot{L}=\{S\in\mathrm{COS}_n^{\cdot}:\dot{L}\in\mathrm{Con}(S)\},\qquad \overset{+}{L}=\{S\in\mathrm{COS}_n^{\cdot}:\overset{+}{L}\in\mathrm{Con}(S)\}。$$

由引理 2 等容易得到下列定理成立。

定理 6　（1）$\dot{L}_0$ 是由式子 $xy^{n-1}\approx yx^{n-1}y^{n-1}$所确定的$\mathrm{COS}_n^{\cdot}$ 的子簇；

（2）$\dot{L}_1$是由式子 $xy^{n-1}\approx x$ 所确定的$\mathrm{COS}_n^{\cdot}$ 的子簇；

（3）$\dot{L}$ 是由以下式子所确定的$\mathrm{COS}_n^{\cdot}$ 的子簇

$$(xy^{n-1}+z)(yx^{n-1}y^{n-1}+z)^{n-1}\approx xy^{n-1}+z,$$
$$(z+xy^{n-1})(z+yx^{n-1}y^{n-1})^{n-1}\approx z+xy^{n-1},$$
$$zxy^{n-1}(zyx^{n-1}y^{n-1})^{n-1}\approx zxy^{n-1}。$$

（4）$\dot{L}=\dot{L}_1\circ\dot{L}_0$。

推论 1　（1）$\overset{+}{L}_0$ 是由式子 $x+2y+2x\approx y+2x$ 所确定的$\mathrm{COS}_n^{\cdot}$ 的子簇；

（2）$\overset{+}{L}_1$ 是由式子 $x+2y\approx x$ 所确定的$\mathrm{COS}_n^{\cdot}$ 的子簇；

（3）$\overset{+}{L}$ 是由以下式子所确定的$\mathrm{COS}_n^{\cdot}$ 的子簇 $z+x+2y+2x+2(z+y+2x)\approx z+x+2y+2x$。

（4）$\overset{+}{L}=\overset{+}{L}_1\circ\overset{+}{L}_0$。

参考文献：

[1] BURRIS S, SANKAPPANAVAR H P. A course in universal algebra[M]. New York: Springer, 1981:60-62.

[2] HOWIE J M. Fundamentals of semigroup theory[M]. Oxford: Oxford Science Publication, 1995:109-127.

[3] PETRICH M, REILLY N R. Completely regular semigroup[M]. New York: Wiley, 1999:1-496.

[4] SEN M K, BHUNIYA A K. On additive idempotent k-regular semirings[J]. Bulletin of the Calcutta Mathematical Society, 2001, 93(5):371-384.

[5] DANMLJANOVIĆ N, ĆIRIĆM, BOGDANOVIĆ S. Congruence openings of additive Green's relations on a semiring[J]. Semigroup Forum, 2011, 82(3):437-454.

[6] ZHAO Xianzhong, SHUM K P, GUO Yuqi. L-subvarieties of the variety of idempotent semirings[J]. Algebra Universalis, 2001, 46(1/2):75-96.

[7] ZHAO Xianzhong, GUO Yuqi, SHUM K P. D-subvarieties of the variety of idempotent semirings[J]. Algebra Colloquium, 2002, 9:15-28.

[8] PASTIJIN F, ZHAO Xianzhong. Green's D-relation for the multiplication reduct of an idempotent semiring[J]. Archivum Mathematicum, 2000, 36(2):77-93.

[9] REN Miaomiao, ZHAO Xianzhong, SHAO Yong. On a variety of Burnside ai-semirings satisfying $x^n\approx x$[J]. Semigroup

Forum, 2016, 93(3):501-515.

[10] CHENG Yanliang, SHAO Yong. Semiring varieties related to multiplicative Green's relations on a semiring[J]. Semigroup Forum, 2020, 101(3):571-584.

[11] 练利锋. 半环类 $CR(n,1)$ 上的格林 D-关系[J]. 兰州理工大学学报, 2019, 45(3):164-167.
LIAN Lifeng. Green's D-relations on a semiring $CR(n,1)$[J]. Journal of Lanzhou University of Technology, 2019, 45(3): 164-167.

[12] 练利锋,任苗苗, 陈益智. 关于一类半环上的格林关系的若干研究[J]. 纯粹数学与应用数学, 2014, 30(4):420-427.
LIAN Lifeng, REN Miaomiao, CHEN Yizhi. Several studies of Green's relations on a class of semiring[J]. Pure and Applied Mathematics, 2014, 30(4):420-427.

[13] 王爱法. 满足某些恒等式的半环上的格林关系[J]. 西南大学学报(自然科学版), 2017, 39(12):67-73.
WANG Aifa. Green's relations in semirings satisfying some identities[J]. Journal of Southwest University (Natural Science Edition), 2017, 39(12):67-73.

[14] 付钰琛,邵勇. 半环簇 $\mathrm{COS}_n^{\cdot}$ 的一些子簇[J]. 山东大学学报(理学版), 2024, 59(4):31-37.
FU Yuchen, SHAO Yong. Some subvarieties of semirings variety $\mathrm{COS}_n^{\cdot}$ [J]. Journal of Shandong University (Natural Science), 2024, 59(4):31-37.

(编辑:陈丽萍)

(上接第100页)

(2) ${}_A\mathrm{Coker}(g) \cong {}_A\mathrm{Im}(f)$, ${}_A\mathrm{Coker}(f) \cong {}_A\mathrm{Im}(g)/IX$, ${}_AIX \cong {}_AI \otimes_A \mathrm{Coker}(g)$,
则(X,Y,f,g)是强 Gorenstein 投射模。

证明 由定理1易得。

参考文献:

[1] AUSLANDER M, BRIDGER M. Stable module theory[M]. Providence: American Mathematical Society, 1969:94.

[2] ENOCHS E E, JENDA O M G. Gorenstein injective and projective modules[J]. Mathematische Zeitschrift, 1995, 220(4): 611-633.

[3] ENOCHS E E, JENDA O M G. Relative homological algebra[M]. Berlin: Walter De Gruyter, 2000.

[4] HOLM H. Gorenstein homological dimensions[J]. Journal of Pure and Applied Algebra, 2004, 189(1/3):167-193.

[5] BENNIS D, MAHDOU N. Strongly Gorenstein projective, injective, and flat modules[J]. Journal of Pure and Applied Algebra, 2007, 210(2):437-445.

[6] BASS H. The Morita theorems, mimeographed notes[M]. Oregon: University of Oregon, 1962.

[7] GREEN E L. On the representation theory of rings in matrix form[J]. Pacific Journal of Mathematics, 1982, 100(1):123-138.

[8] GAO Nan, PSAROUDAKIS C. Gorenstein homological aspects of monomorphism categories via Morita rings[J]. Algebras and Representation Theory, 2017, 20(2):487-529.

[9] GUO Qianqian, XI Changchang. Gorenstein projective modules over rings of Morita contexts[J]. Science China Mathematics, 2023, 66, https://doi.org/10.1007/s11425-022-2206-8.

[10] GREEN E L, PSAROUDAKIS C. On Artin algebras arising from Morita contexts[J]. Algebras and Representation Theory, 2014, 17(5):1485-1525.

(编辑:陈丽萍)