山东大学学报(理学版)2025 年 11 月 第 60 卷 第 11 期
Journal of Shandong University(*Natural Science*), Vol.60, No.11, 2025 http://lxbwk.njournal.sdu.edu.cn

文章编号:1671-9352(2025)11-0087-08 DOI:10.6040/j.issn.1671-9352.0.2023.486

对称群 S_3 表示环的广义逆

曹刘峰[1,2],魏俊潮[2],胡佳伟[2*]
(1.盐城工学院数理学院, 江苏 盐城 224001; 2.扬州大学数学学院, 江苏 扬州 225002)

摘要:利用 Frobenius-Perron 维数计算 6 阶对称群 S_3 表示环 $r(S_3)$ 的正则元,刻画 $r(S_3)$ 的可逆元、MP-逆元、群逆元、EP 元和 SEP 元。

关键词:表示环;广义逆;Frobenius-Perron 维数;融合环;对称群
中图分类号:O153.3 **文献标志码**:A
引用格式:曹刘峰,魏俊潮,胡佳伟. 对称群 S_3 表示环的广义逆[J]. 山东大学学报(理学版),2025,60(11):87-94.

Generalized inverses in the representation ring of symmetric group S_3

CAO Liufeng[1,2], WEI Junchao[2], HU Jiawei[2*]
(1. Department of Mathematics, Yancheng Institute of Technology, Yancheng 224001, Jiangsu, China; 2. School of Mathematics, Yangzhou University, Yangzhou 225002, Jiangsu, China)

Abstract: By using Frobenius-Perron dimension, all regular elements in the representation ring $r(S_3)$ of the symmetric group S_3 of order 6 are determined, and all invertible elements, MP-inverses, group invertible elements, EP and SEP elements in $r(S_3)$ are described.

Key words: representation ring; generalized inverse; Frobenius-Perron dimension; fusion ring; symmetric group

0 引言

令 R 是一个有单位元 1 的结合环,映射 $*:R\to R$ 称为 R 的一个对合,如果 $\forall a,b\in R$,有

$$(a^*)^*=a,\quad (a+b)^*=a^*+b^*,\quad (ab)^*=b^*a^*。$$

具有对合的环 R 被称为对合环。

关于对合环的广义逆工作已有丰富的结果。如 Cao 等[1]给出多项式环商环 $\mathbf{Z}[x]/(x^2+x)$ 一个对合映射,并计算该对合环上的所有 EP 元。文献[2-4]考虑对合环的 MP-逆元、Hermitian 元等,文献[5-7]给出对合环中 EP、SEP 元素的许多新的刻画。

Etingof 等[8]介绍融合环、Frobenius-Perron 定理和 Frobenius-Perron 维数的概念。近年来,关于融合环的研究也有许多的工作成果。如文献[9-11]考虑融合代数的相关问题。

Hopf 代数(群代数、量子群等)在复数域 $\mathbf{C}$ 上的表示环 $r(H)$[12]是由有限维 H-模 V 的同构类模去关系$[M\oplus V]=[M]+[V]$生成的阿贝尔群。$r(H)$ 的乘法结构由 H-模的张量积给出,即,$[M][V]=[M\otimes V]$。$r(H)$ 是一个具有单位元$[\mathbf{C}]$的结合环,其中 $\mathbf{C}$ 是平凡 H-模。注意到 $r(H)$ 有一组 $\mathbf{Z}$-基$\{[V]\mid V\in \mathrm{ind}(H)\}$,其中 $\mathrm{ind}(H)$ 表示所有有限维不可分解 H-模同构类构成的集合。Hopf 代数的表示环及相关工作也是研究热点之一[13-18]。特别地,有限群代数 $\mathbf{C}G$ 的表示环是一个融合环,此时 $r(\mathbf{C}G)$ 的 $\mathbf{Z}$-基是所有互不同构的单 $\mathbf{C}G$-模同构类构成的集合。

收稿日期:2023-11-21; **网络出版时间**:2024-11-04 09:41:45
基金项目:国家自然科学基金资助项目(12371041); 江苏省青年基金资助项目(BK20210783);盐城工学院高层次人才科研启动项目(xjr2025009)
第一作者:曹刘峰(1995—),男,讲师,博士,研究方向为 Hopf 代数与广义逆. E-mail:1204719495@qq.com
* **通信作者**:胡佳伟(1990—),男,讲师,博士,研究方向为 Hopf 代数偏作用. E-mail:ohujiaweio@163.com

本文中,指出融合环是具有某些性质的对合环,利用 Frobenius-Perron 维数,研究了 6 阶对称群 S_3 的表示环 $r(S_3)$ 的正则元、可逆元、MP-逆元、群逆元、EP 元和 SEP 元。

1　预备知识

本文中,符号 $\mathbf{Z}$、$\mathbf{Z}_+$、$\mathbf{Z}_{>0}$、$\mathbf{R}$ 和 $\mathbf{C}$ 分别表示整数环、非负整数集、正整数集、实数域和复数域。

定义 1[2]　对合环 R 中的元素 a 称为一个 Hermitian 元,如果 $a^*=a$, R^{Her} 表示 R 中所有 Hermitian 元构成的集合。

定义 2　对合环 R 中的元素 $a^\dagger$ 称为 a 的 Moore-Penrose 逆元(MP-逆元),如果

$$aa^\dagger a=a,\quad a^\dagger aa^\dagger=a^\dagger,\quad (aa^\dagger)^*=aa^\dagger,\quad (a^\dagger a)^*=a^\dagger a,$$

此时称 a 是 MP 可逆元。如果 $a^\dagger$ 存在,则其是唯一的。R 的所有 Moore-Penrose 可逆元构成的集合记为 $R^\dagger$。

定义 3　环 R 中的元素 e 称为一个幂等元,如果 $e^2=e$。$E(R)$ 表示 R 的所有幂等元构成的集合。

定义 4　对合环 R 中的幂等元 e 称作一个投射元,如果 $e^*=e$。R 中所有投射元构成的集合记为 R^{proj}。

定义 5　环 R 中的元素 a 称为正则的,如果存在 R 中的某个元素 a^-(称为 a 的内逆元)使得

$$aa^-a=a。\tag{1}$$

R^{reg} 表示 R 中所有正则元构成的集合,如果 $a\in R^{\mathrm{reg}}$,a 的内逆元不是唯一的。a 的所有内逆元构成的集合记为 $a\{1\}$。

定义 6　环 R 中的元素 $a^\#$ 称为 a 的群逆元,如果

$$a=aa^\#a,\quad a^\#=a^\#aa^\#,\quad aa^\#=a^\#a。$$

此时 a 称为群可逆元。如果 $a^\#$ 存在,则其是唯一的。R 中所有群可逆元构成的集合记为 $R^\#$。不难看出 $U(R)\subseteq R^\#$ 以及 $E(R)\subseteq R^\#$,其中 $U(R)$ 是 R 中所有可逆元构成的集合。特别地,如果 R 是交换环,则 $R^\#=R^{\mathrm{reg}}$。

定义 7[2]　元素 $a\in R^\#\cap R^\dagger$ 称为一个 EP 元,如果 $a^\#=a^\dagger$。R^{EP} 表示 R 中所有 EP 元构成的集合。

定义 8[2]　R^{EP} 中的元素 a 称为一个强 EP(SEP)元,如果 $a^\dagger=a^*$。R 中所有 SEP 元构成的集合记为 R^{SEP}。

引理 1　在对合环 R 中,以下结论成立:

(1) 如果 $a\in R^{\mathrm{reg}}$,则 $a\{1\}=\{a^-+b-a^-abaa^-\mid b\in R\}$,其中 a^- 是 a 的某个固定的内逆元;

(2) $U(R)\subseteq R^\#\cap R^\dagger\subseteq R^{\mathrm{reg}}$。若 $a\in U(R)$,则 $a^\#=a^\dagger=a^{-1}$ 且 $a\{1\}=\{a^{-1}\}$;

(3) $R^{\mathrm{proj}}=E(R)\cap R^{\mathrm{Her}}$。

回顾融合环的定义,Frobenius-Perron 维数以及相关的结论和性质。令 $B=\{b_i\mid 1\leqslant i\leqslant n\}$ 是环 R 的一组 $\mathbf{Z}$-基,B 称为 R 的一组 $\mathbf{Z}_+$-基,如果对 $\forall\, 1\leqslant i,\ j\leqslant n$,

$$b_ib_j=\sum_{1\leqslant k\leqslant n}N_{ij}^k b_k,$$

其中 $N_{ij}^k\in\mathbf{Z}_+$。

定义 9[8]　令 R 是一个环,且 $B=\{b_i\mid 1\leqslant i\leqslant n\}$ 是 R 的一组 $\mathbf{Z}_+$-基。R 称为一个融合环,如果

(1) $b_1=1\in B$;

(2) 存在指标集 $\{1,2,\cdots,n\}$ 上的一个映射 $i\mapsto i^*$,使得其诱导的映射 $*:R\to R$,

$$a=\sum_{i\in I}a_ib_i\mapsto a^*=\sum_{i\in I}a_ib_{i^*},\quad a_i\in\mathbf{Z},$$

满足对 $\forall\, a,b\in R$,

$$(a^*)^*=a,\quad (a+b)^*=a^*+b^*,\quad (ab)^*=b^*a^*;$$

(3) 存在如下群同态

$$\tau(b_i)=\begin{cases}1, & i=1,\\ 0, & i\neq 1,\end{cases}$$

使得

$$\tau(b_ib_j)=\delta_{ij^*},$$

其中 δ_{ij^*} 为 Kronecker 符号。

由定义 9 可以看出在 $*$ 的意义下,任一融合环是对合环。在下文中,为了符号的简洁,在融合环中,记 $*$ 为 $*$。上述基 $\{b_i\}_{1\leqslant i\leqslant n}$ 和 $\{b_{i^*}\}_{1\leqslant i^*\leqslant n}$ 称为 R 的一组对偶基。R 中基元 b_i 称为自对偶的,如果 $b_{i^*}=b_i$。等价地,b_i 是自对偶的当且仅当单位元 1 出现在 b_i^2 的分解式中。

引理 2[8]　令 $M\in \mathrm{Mat}_{k\times k}(\mathbf{R}_{\geqslant 0})$,则存在非负实数 λ,使得

(1) λ 是 M 的一个特征值。

(2) 任意其它的特征值 $\mu\in\mathbf{C}$ 满足 $|\mu|\leqslant\lambda$。

令 R 是一个融合环且有一组 $\mathbf{Z}_+$-基 $B=\{b_i|1\leqslant i\leqslant n\}$。定义如下的一个群同态 $\mathrm{FPdim}:R\to\mathbf{C}$:对 $\forall b_i\in B$,令 $\mathrm{FPdim}(b_i)$ 为 b_i 左乘 $b_1,b_2\cdots,b_n$ 对应矩阵的最大非负特征值,即

$$b_i(b_1,b_2,\cdots,b_n)=(b_1,b_2,\cdots,b_n)[\boldsymbol{b}_i],$$

其中 $[\boldsymbol{b}_i]$ 为 b_i 左乘基元对应的矩阵。$\mathrm{FPdim}(b_i)$ 的存在性由 Frobenius-Perron 定理保证。

定义 10　对 $\forall b_i\in B$, $\mathrm{FPdim}(b_i)$ 称为 b_i 的 Frobenius-Perron 维数。

根据加法,将群同态 FPdim 从集合 B 拓展到环 R,则有以下结论。

引理 3[8]　令 R,B,FPdim 如上述定义,则

(1) $\mathrm{FPdim}:R\to\mathbf{C}$ 是一个环同态。

(2) 对 $\forall b_i\in B$, $\mathrm{FPdim}(b_i)$ 是一个代数整数,且 $\mathrm{FPdim}(b_i)\geqslant 1$。

(3) FPdim 是 $*$ 不变的,即对 $\forall a\in R$, $\mathrm{FPdim}(a)=\mathrm{FPdim}(a^*)$。

下面给出一个研究具体的融合环中正则元简单却有效的结论。

命题 1　令 R 是一个融合环且 $b\in R^{\mathrm{reg}}$,则 $\mathrm{FPdim}(b)=0$ 或 $\mathrm{FPdim}(b)\neq 0$ 且 $\mathrm{FPdim}(b)\mathrm{FPdim}(c)=1$,其中 $c\in b\{1\}$。

证明　命题 1 易证,略。

6 阶对称群 $S_3=\{(1),(12),(13),(23),(123),(132)\}$ 是由 (12) 和 (123) 生成的非交换群,S_3 在复数域 $\mathbf{C}$ 上由如下有限维不可约表示 ρ_1、ρ_2 和 ρ_3。具体作用如下:

$$\rho_1:(12)\mapsto 1,\ (123)\mapsto 1;\quad \rho_2:(12)\mapsto -1,\ (123)\mapsto 1;$$

$$\rho_3:(12)\mapsto\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix},\ (123)\mapsto\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}。$$

此外,ρ_1、ρ_2、ρ_3 的张量积直和分解公式如下:

$$\rho_1^{\otimes 2}=\rho_2^{\otimes 2}=\rho_1,\quad \rho_1\otimes\rho_2=\rho_2\otimes\rho_1=\rho_2,\quad \rho_1\otimes\rho_3=\rho_3\otimes\rho_1=\rho_2\otimes\rho_3=\rho_3\otimes\rho_2=\rho_3,$$

$$\rho_3^{\otimes 2}=\rho_1\oplus\rho_2\oplus ho_3。$$

有限群在复数域 $\mathbf{C}$ 上的表示环是一个融合环,因此,表示环 $r(S_3)$ 可以看成一个具有 $\mathbf{Z}_+$-基 $\{1,g,X\}$ 的交换融合环,且融合法则为

$$g^2=1,\quad gX=X,\quad X^2=1+g+X,$$

其中,环同构如下:$\rho_1\mapsto 1$、$\rho_2\mapsto g$ 以及 $\rho_3\mapsto X$。基元 1、g、X 是自对偶的,以及 $\mathrm{FPdim}(1)=\mathrm{FPdim}(g)=1$、$\mathrm{FPdim}(X)=2$。

2　$r(S_3)$ 的广义逆

本章中计算 $r(S_3)$ 的正则元,刻画了 $r(S_3)$ 的幂等元、投射元、可逆元、MP-逆元、群可逆元、EP 元和 SEP 元。

引理 4　令 $a=\alpha_0+\alpha_1 g+\alpha_2 X\in(r(S_3))^{\mathrm{reg}}$,其中 $\alpha_i\in\mathbf{Z}$, $i=0,1,2$,则 $\alpha_0+\alpha_1+2\alpha_2=0$ 或 $\alpha_0+\alpha_1+2\alpha_2=1$ 或 $\alpha_0+\alpha_1+2\alpha_2=-1$。

证明　容易看出 $\mathrm{FPdim}(a)=\alpha_0+\alpha_1+2\alpha_2$,则由命题 1,有 $\mathrm{FPdim}(a)=0$ 或 $\mathrm{FPdim}(a)\neq 0$ 且 $\mathrm{FPdim}(a)\mathrm{FPdim}(b)=1$,其中 $b\in a\{1\}$。因为 $\mathrm{FPdim}(a)$, $\mathrm{FPdim}(b)\in\mathbf{Z}$,所以 $\mathrm{FPdim}(a)=0$ 或 $\mathrm{FPdim}(a)=1$ 或 $\mathrm{FPdim}(a)=-1$。证毕。

定理 1 $(r(S_3))^{\text{reg}}=\{0,1,-1,g,-g\}$。

证明 设 $a=\alpha_0+\alpha_1 g+\alpha_2 X\in(r(S_3))^{\text{reg}}$,其中 $\alpha_i\in\mathbf{Z}$, $i=0,1,2$,则由引理 4,$\alpha_0+\alpha_1+2\alpha_2=0$ 或 $\alpha_0+\alpha_1+2\alpha_2=1$或 $\alpha_0+\alpha_1+2\alpha_2=-1$。假设 $b=a_0+\beta_1 g+\beta_2 X\in r(S_3)$,其中 $\beta_0,\beta_1,\beta_2\in\mathbf{Z}$ 且 $b\in a\{1\}$。

在下文中,令 $\alpha_0+\alpha_1=r$, $\alpha_0^2+\alpha_1^2=s$, $2\alpha_0\alpha_1=t$,其中 $r,s,t\in\mathbf{Z}$,则易有 $r^2=s+t$。

情形 I $\alpha_0+\alpha_1+2\alpha_2=0$。此时 $\alpha_2=-\dfrac{1}{2}(\alpha_0+\alpha_1)$,且

$$
\begin{aligned}
a^2&=\left(\alpha_0+\alpha_1 g-\frac{1}{2}(\alpha_0+\alpha_1)X\right)^2\\
&=\alpha_0^2+\alpha_1^2+\frac{1}{4}(\alpha_0+\alpha_1)^2(1+g+X)+2\alpha_0\alpha_1 g-\alpha_0(\alpha_0+\alpha_1)X-\alpha_1(\alpha_0+\alpha_1)X\\
&=\left(\alpha_0^2+\alpha_1^2+\frac{1}{4}(\alpha_0+\alpha_1)^2\right)+\left(2\alpha_0\alpha_1+\frac{1}{4}(\alpha_0+\alpha_1)^2\right)g-\frac{3}{4}(\alpha_0+\alpha_1)^2X,
\end{aligned}
$$

则

$$
\begin{aligned}
aba=a^2b&=\left(\left(s+\frac{1}{4}r^2\right)+\left(t+\frac{1}{4}r^2\right)g-\frac{3}{4}r^2X\right)(\beta_0+\beta_1 g+\beta_2 X)\\
&=\left(s+\frac{1}{4}r^2\right)\beta_0+\left(t+\frac{1}{4}r^2\right)\beta_1-\frac{3}{4}r^2\beta_2\\
&\quad+\left(\left(s+\frac{1}{4}r^2\right)\beta_1+\left(t+\frac{1}{4}r^2\right)\beta_0-\frac{3}{4}r^2\beta_2\right)g\\
&\quad+\left(\left(s+\frac{1}{4}r^2\right)\beta_2+\left(t+\frac{1}{4}r^2\right)\beta_2-\frac{3}{4}r^2(\beta_0+\beta_1+\beta_2)\right)X。
\end{aligned}
$$

因此

$$
\begin{cases}
\left(s+\frac{1}{4}r^2\right)\beta_0+\left(t+\frac{1}{4}r^2\right)\beta_1-\frac{3}{4}r^2\beta_2=\alpha_0,\\
\left(s+\frac{1}{4}r^2\right)\beta_1+\left(t+\frac{1}{4}r^2\right)\beta_0-\frac{3}{4}r^2\beta_2=\alpha_1,\\
\left(s+\frac{1}{4}r^2\right)\beta_2+\left(t+\frac{1}{4}r^2\right)\beta_2-\frac{3}{4}r^2(\beta_0+\beta_1+\beta_2)=-\frac{1}{2}r。
\end{cases}
$$

注意到

$$
\begin{aligned}
&\beta_2\left(s+\frac{1}{4}r^2+t+\frac{1}{4}r^2\right)-\frac{3}{4}r^2(\beta_0+\beta_1+\beta_2)\\
&=\frac{3}{2}r^2\beta_2-\frac{3}{4}r^2(\beta_0+\beta_1+\beta_2)\\
&=-\frac{3}{4}r^2(\beta_0+\beta_1-\beta_2),
\end{aligned}
$$

因此$\dfrac{3}{4}r^2(\beta_0+\beta_1-\beta_2)=\dfrac{1}{2}r$。注意到 $r,\beta_0,\beta_1,\beta_2\in\mathbf{Z}$,所以$\dfrac{3}{2}r(\beta_0+\beta_1-\beta_2)\neq 1$。如果 $r=0$,则 $\alpha_0=-\alpha_1$,此时

$$
\begin{aligned}
&\left(s+\frac{1}{4}r^2\right)(\beta_0-\beta_1)+\left(t+\frac{1}{4}r^2\right)(\beta_1-\beta_0)\\
&=\left(s+\frac{1}{4}r^2-t-\frac{1}{4}r^2\right)(\beta_0-\beta_1)\\
&=(s-t)(\beta_0-\beta_1)\\
&=(\alpha_0-\alpha_1)^2(\beta_0-\beta_1)\\
&=4\alpha_0^2(\beta_0-\beta_1)\\
&=2\alpha_0。
\end{aligned}
$$

如果 $\alpha_0=0$,则 $a=0$,这表明 $0\in(r(S_3))^{\text{reg}}$,且 $0\{1\}=r(S_3)$。如果 $\alpha_0\neq 0$,则 $2\alpha_0(\beta_0-\beta_1)=1$。因为 $\alpha_0,\beta_0,$

$\beta_1 \in \mathbf{Z}$,所以 $2\alpha_0(\beta_0-\beta_1)\neq 1$,矛盾。

情形 Ⅱ　$\alpha_0+\alpha_1+2\alpha_2=1$。此时,$\alpha_2=\frac{1}{2}(1-\alpha_0-\alpha_1)$,并且根据 $\alpha_2\in\mathbf{Z}$,有 $\alpha_0-\alpha_1$ 是奇数。直接计算可得,

$$\begin{aligned}a^2&=\left(\alpha_0+\alpha_1 g+\frac{1}{2}(1-\alpha_0-\alpha_1)X\right)^2\\&=\alpha_0^2+\alpha_1^2+\frac{1}{4}(1-\alpha_0-\alpha_1)^2(1+g+X)\\&\quad+2\alpha_0\alpha_1 g+\alpha_0(1-\alpha_0-\alpha_1)X+\alpha_1(1-\alpha_0-\alpha_1)X\\&=\alpha_0^2+\alpha_1^2+\frac{1}{4}(1-\alpha_0-\alpha_1)^2\\&\quad+\left(2\alpha_0\alpha_1+\frac{1}{4}(1-\alpha_0-\alpha_1)^2\right)g\\&\quad+\left((\alpha_0+\alpha_1)(1-\alpha_0-\alpha_1)+\frac{1}{4}(1-\alpha_0-\alpha_1)^2\right)X。\end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned}aba&=a^2b=\left(\left(s+\frac{1}{4}(1-r)^2\right)+\left(t+\frac{1}{4}(1-r)^2\right)g+\left(r(1-r)+\frac{1}{4}(1-r)^2\right)X\right)(\beta_0+\beta_1 g+\beta_2 X)\\&=\left(s+\frac{1}{4}(1-r)^2\right)\beta_0+\left(t+\frac{1}{4}(1-r)^2\right)\beta_1+\left(r(1-r)+\frac{1}{4}(1-r)^2\right)\beta_2\\&\quad+\left(\left(s+\frac{1}{4}(1-r)^2\right)\beta_1+\left(t+\frac{1}{4}(1-r)^2\right)\beta_0+\left(r(1-r)+\frac{1}{4}(1-r)^2\right)\beta_2\right)g\\&\quad+\left(\left(s+\frac{1}{4}(1-r)^2\right)\beta_2+\left(t+\frac{1}{4}(1-r)^2\right)\beta_2+\left(r(1-r)+\frac{1}{4}(1-r)^2\right)(\beta_0+\beta_1+\beta_2)\right)X。\end{aligned}$$

因此

$$\begin{cases}\left(s+\frac{1}{4}(1-r)^2\right)\beta_0+\left(t+\frac{1}{4}(1-r)^2\right)\beta_1+\left(r(1-r)+\frac{1}{4}(1-r)^2\right)\beta_2=\alpha_0,\\\left(s+\frac{1}{4}(1-r)^2\right)\beta_1+\left(t+\frac{1}{4}(1-r)^2\right)\beta_0+\left(r(1-r)+\frac{1}{4}(1-r)^2\right)\beta_2=\alpha_1,\\\left(s+\frac{1}{4}(1-r)^2\right)\beta_2+\left(t+\frac{1}{4}(1-r)^2\right)\beta_2+\left(r(1-r)+\frac{1}{4}(1-r)^2\right)(\beta_0+\beta_1+\beta_2)=\frac{1}{2}(1-r)。\end{cases}\tag{2}$$

由式(2),有

$$(\beta_0-\beta_1)\left(s+\frac{1}{4}(1-r)^2-t-\frac{1}{4}(1-r)^2\right)=(\beta_0-\beta_1)(\alpha_0-\alpha_1)^2=\alpha_0-\alpha_1。$$

注意到 $\alpha_0-\alpha_1$ 是奇数,所以 $\alpha_0-\alpha_1\neq 0$,因此 $\alpha_0-\alpha_1=1=\beta_0-\beta_1$ 或 $\alpha_0-\alpha_1=-1=\beta_0-\beta_1$。

① $\alpha_0-\alpha_1=1=\beta_0-\beta_1$。此时,$a=\alpha_0+(\alpha_0-1)g+(1-\alpha_0)X$ 且 $b=\beta_0+(\beta_0-1)g+\beta_2 X$。由命题 1,$\mathrm{FPdim}(b)=\beta_0+\beta_0-1+2\beta_2=1\Rightarrow\beta_2=1-\beta_0$。方程组(2)中的第 3 个等式如下:

$$\begin{aligned}&(1-\beta_0)\left(s+\frac{1}{4}(1-r)^2+t+\frac{1}{4}(1-r)^2\right)+\left(r(1-r)+\frac{1}{4}(1-r)^2\right)(\beta_0+\beta_0-1+1-\beta_0)\\&=(1-\beta_0)\left(r^2+\frac{1}{2}(1-r)^2\right)+\left(r(1-r)+\frac{1}{4}(1-r)^2\right)\beta_0\\&=(1-\beta_0)\left(\frac{3}{2}r^2-r+\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{3}{4}r^2-\frac{1}{2}r-\frac{1}{4}\right)\beta_0\\&=\frac{3}{2}r^2-r+\frac{1}{2}-\beta_0\left(\frac{9}{4}r^2-\frac{3}{2}r+\frac{1}{4}\right)\\&=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}r,\end{aligned}$$

于是,有

$$-\beta_0\left(\frac{9}{4}r^2-\frac{3}{2}r+\frac{1}{4}\right)=-\beta_0\ \frac{1}{4}(3r-1)^2=-\frac{1}{2}r(3r-1)。\tag{3}$$

因为 $r\in\mathbf{Z}$,所以 $3r-1\neq 0$。由式(3),得 $\beta_0=\frac{2r}{3r-1}$。注意到 $r=\alpha_0+\alpha_1=2\alpha_0-1$ 是奇数,且当 $r\leqslant -1$, $r\geqslant 3$ 时,有 $0\neq |2r|<|3r-1|$,即 $\frac{2r}{3r-1}\notin\mathbf{Z}$。因此,当 $r=1$,即 $\alpha_0=1$ 时,$\beta_0=1$。于是 $1\in(r(S_3))^{\mathrm{reg}}$,且 $1\{1\}=\{1\}$。

② $\alpha_0-\alpha_1=-1=\beta_0-\beta_1$。此时,$a=\alpha_0+(1+\alpha_0)g-\alpha_0X$, $b=\beta_0+(1+\beta_0)g+\beta_2X$。由命题1,得 $\beta_0+1+\beta_0+2\beta_2=1\Rightarrow\beta_2=-\beta_0$。该情形时方程组(2)中第3个等式如下:

$$\begin{aligned}&-\beta_0\left(s+\frac{1}{4}(1-r)^2+t+\frac{1}{4}(1-r)^2\right)+\left(r(1-r)+\frac{1}{4}(1-r)^2\right)(\beta_0+1+\beta_0-\beta_0)\\&=-\beta_0\left(\frac{3}{2}r^2-r+\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{3}{4}r^2-\frac{1}{2}r-\frac{1}{4}\right)(1+\beta_0)\\&=-\beta_0\left(\frac{9}{4}r^2-\frac{3}{2}r+\frac{1}{4}\right)-\frac{3}{4}r^2+\frac{1}{2}r+\frac{1}{4}\\&=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}r,\end{aligned}$$

得

$$-\frac{1}{4}\beta_0(3r-1)^2=\frac{1}{4}(3r-1)(r-1)。\tag{4}$$

因为 $r\in\mathbf{Z}$,所以 $3r-1\neq 0$。式(4)表明 $\beta_0=-\frac{r-1}{3r-1}$ 注意到 $r=\alpha_0+\alpha_1=2\alpha_0+1$ 是奇数,且当 $r\leqslant -1$, $r\geqslant 3$ 时,$0\neq |r-1|<|3r-1|$,即 $-\frac{r-1}{3r-1}\notin\mathbf{Z}$。当 $r=1$,即 $\alpha_0=0$ 时,有 $\beta_0=0$,因此 $g\in(r(S_3))^{\mathrm{reg}}$ 且 $g\{1\}=\{g\}$。

情形 Ⅲ $\alpha_0+\alpha_1+2\alpha_2=-1$。此时,由 $\alpha_2=-\frac{1}{2}(1+\alpha_0+\alpha_1)$ 和 $\alpha_2\in\mathbf{Z}$,得 $\alpha_0+\alpha_1$ 是奇数。计算可得

$$\begin{aligned}a^2&=\left(\alpha_0+\alpha_1 g-\frac{1}{2}(1+\alpha_0+\alpha_1)X\right)^2\\&=\alpha_0^2+\alpha_1^2+\frac{1}{4}(1+\alpha_0+\alpha_1)^2(1+g+X)\\&\quad+2\alpha_0\alpha_1 g-\alpha_0(1+\alpha_0+\alpha_1)X-\alpha_1(1+\alpha_0+\alpha_1)X\\&=\alpha_0^2+\alpha_1^2+\frac{1}{4}(1+\alpha_0+\alpha_1)^2\\&\quad+\left(2\alpha_0\alpha_1+\frac{1}{4}(1+\alpha_0+\alpha_1)^2\right)g\\&\quad-\left((\alpha_0+\alpha_1)(1+\alpha_0+\alpha_1)-\frac{1}{4}(1+\alpha_0+\alpha_1)^2\right)X。\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}aba&=a^2b=\left(\left(s+\frac{1}{4}(1+r)^2\right)+\left(t+\frac{1}{4}(1+r)^2\right)g-\left(r(1+r)-\frac{1}{4}(1+r)^2\right)X\right)(\beta_0+\beta_1 g+\beta_2 X)\\&=\left(s+\frac{1}{4}(1+r)^2\right)\beta_0+\left(t+\frac{1}{4}(1+r)^2\right)\beta_1-\left(r(1+r)-\frac{1}{4}(1+r)^2\right)\beta_2\\&\quad+\left(\left(s+\frac{1}{4}(1+r)^2\right)\beta_1+\left(t+\frac{1}{4}(1+r)^2\right)\beta_0-\left(r(1+r)-\frac{1}{4}(1+r)^2\right)\beta_2\right)g\\&\quad+\left(\left(s+\frac{1}{4}(1+r)^2\right)\beta_2+\left(t+\frac{1}{4}(1+r)^2\right)\beta_2-\left(r(1+r)-\frac{1}{4}(1+r)^2\right)(\beta_0+\beta_1+\beta_2)\right)X。\end{aligned}$$

因此

$$\begin{cases}\left(s+\frac{1}{4}(1+r)^2\right)\beta_0+\left(t+\frac{1}{4}(1+r)^2\right)\beta_1-\left(r(1+r)-\frac{1}{4}(1+r)^2\right)\beta_2=\alpha_0,\\ \left(s+\frac{1}{4}(1+r)^2\right)\beta_1+\left(t+\frac{1}{4}(1+r)^2\right)\beta_0-\left(r(1+r)-\frac{1}{4}(1+r)^2\right)\beta_2=\alpha_1,\\ \left(s+\frac{1}{4}(1+r)^2\right)\beta_2+\left(t+\frac{1}{4}(1+r)^2\right)\beta_2-\left(r(1+r)-\frac{1}{4}(1+r)^2\right)(\beta_0+\beta_1+\beta_2)=-\frac{1}{2}(1+r)。\end{cases} \tag{5}$$

由方程组(5),得

$$(\beta_0-\beta_1)\left(s+\frac{1}{4}(1+r)^2-t-\frac{1}{4}(1+r)^2\right)=(\beta_0-\beta_1)(\alpha_0-\alpha_1)^2=\alpha_0-\alpha_1。$$

因为 $\alpha_0-\alpha_1$ 是奇数,所以 $\alpha_0-\alpha_1\neq 0$,得 $\alpha_0-\alpha_1=1=\beta_0-\beta_1$ 或 $\alpha_0-\alpha_1=-1=\beta_0-\beta_1$。

③ $\alpha_0-\alpha_1=1=\beta_0-\beta_1$,此时,$a=\alpha_0+(\alpha_0-1)g-\alpha_0X$ 且 $b=\beta_0+(\beta_0-1)g+\beta_2X$。由命题 1,有 $\mathrm{FPdim}(b)=\beta_0+\beta_0-1+2\beta_2=-1\Rightarrow\beta_2=-\beta_0$。方程组(5)中第 3 个等式如下:

$$\begin{aligned}&-\beta_0\left(s+\frac{1}{4}(1+r)^2+t+\frac{1}{4}(1+r)^2\right)-\left(r(1+r)-\frac{1}{4}(1+r)^2\right)(\beta_0+\beta_0-1-\beta_0)\\ &=-\beta_0\left(\frac{3}{2}r^2+r+\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{3}{4}r^2+\frac{1}{2}r-\frac{1}{4}\right)(\beta_0-1)\\ &=-\beta_0\left(\frac{9}{4}r^2+\frac{3}{2}r+\frac{1}{4}\right)+\frac{3}{4}r^2+\frac{1}{2}r-\frac{1}{4}\\ &=-\alpha_0。\end{aligned}$$

由 $r=\alpha_0+\alpha_1=2\alpha_0-1$,得

$$-\beta_0(9\alpha_0^2-6\alpha_0+1)=-\beta_0(3\alpha_0-1)^2=-3\alpha_0^2+\alpha_0=-\alpha_0(3\alpha_0-1)。$$

因为$\alpha_0\in\mathbf{Z}$,所以 $3\alpha_0-1\neq 0$,因此 $\beta_0=\dfrac{\alpha_0}{3\alpha_0-1}$。当 $\alpha_0\leqslant-1$, $\alpha_0\geqslant 1$ 时,$0\neq|\alpha_0|<|3\alpha_0-1|$,即 $\dfrac{\alpha_0}{3\alpha_0-1}\notin\mathbf{Z}$。如果 $\alpha_0=0$,则 $\beta_0=0$,这表明$-g\in(r(S_3))^{\mathrm{reg}}$且$-g\{1\}=\{-g\}$。

④ $\alpha_0-\alpha_1=-1=\beta_0-\beta_1$。此时,$a=\alpha_0+(1+\alpha_0)g-(1+\alpha_0)X$,$b=\beta_0+(1+\beta_0)g+\beta_2X$。根据命题 1,得 $\mathrm{FPdim}(b)=\beta_0+1+\beta_0+2\beta_2=-1\Rightarrow\beta_2=-1-\beta_0$。方程组(5)中第 3 个等式如下:

$$\begin{aligned}&-(1+\beta_0)\left(s+\frac{1}{4}(1+r)^2+t+\frac{1}{4}(1+r)^2\right)-\left(r(1+r)-\frac{1}{4}(1+r)^2\right)(\beta_0+1+\beta_0-1-\beta_0)\\ &=-(1+\beta_0)\left(\frac{3}{2}r^2+r+\frac{1}{2}\right)-\beta_0\left(\frac{3}{4}r^2+\frac{1}{2}r-\frac{1}{4}\right)\\ &=-\beta_0\left(\frac{9}{4}r^2+\frac{3}{2}r+\frac{1}{4}\right)-\frac{3}{2}r^2-r-\frac{1}{2}\\ &=-\alpha_0-1。\end{aligned}$$

因为 $r=\alpha_0+\alpha_1=2\alpha_0+1$,所以

$$-\beta_0(9\alpha_0^2+12\alpha_0+4)=-\beta_0(3\alpha_0+2)^2=6\alpha_0^2+7\alpha_0+2=(3\alpha_0+2)(2\alpha_0+1)。\tag{6}$$

注意到$\alpha_0\in\mathbf{Z}$,因此 $3\alpha_0+2\neq 0$,则根据式(6),有 $\beta_0=-\dfrac{2\alpha_0+1}{3\alpha_0+2}$。当 $\alpha_0\leqslant-2$, $\alpha_0\geqslant 0$ 时,$0\neq|2\alpha_0+1|<|3\alpha_0+2|$。当 $\alpha_0=-1$ 时,有 $\beta_0=-1$。因此,$-1\in(r(S_3))^{\mathrm{reg}}$且$-1\{1\}=\{-1\}$。综上所述,有$(r(S_3))^{\mathrm{reg}}=\{0,1,-1,g,-g\}$。证毕。

由定理 1,有如下结论。

命题 2　如下结论成立:

(1) $E(r(S_3))=\{0,1\}$。

(2) $(r(S_3))^{\mathrm{proj}}=\{0,1\}$。

(3) $U(r(S_3))=\{1,-1,g,-g\}$,且 $a^{-1}=a$ 对$\forall a\in U(r(S_3))$。

(4) $(r(S_3))^{\dagger}=(r(S_3))^{\#}=\{0,1,-1,g,-g\}$,且 $a^{\dagger}=a^{\#}=a$ 对$\forall a\in(r(S_3))^{\dagger}$。

(5) $(r(S_3))^{\mathrm{EP}}=(r(S_3))^{\mathrm{SEP}}=\{0,1,-1,g,-g\}$。

证明 (1) 注意到 $E(r(S_3))\subseteq(r(S_3))^{\mathrm{reg}}=\{0,1,-1,g,-g\}$,且容易计算 $0^2=0$, $1^2=1$, $(-1)^2=1\neq-1$, $g^2=1\neq g$ 及 $(-g)^2=1\neq-g$,因此 $E(r(S_3))=\{0,1\}$。

(2) 因为 $r(S_3)$ 中的对合映射 $*$ 是恒等映射,所以 $(r(S_3))^{\mathrm{Her}}=r(S_3)$。由引理 1(3),有 $(r(S_3))^{\mathrm{proj}}=E(r(S_3))\cap(r(S_3))^{\mathrm{Her}}=\{0,1\}$。

(3) 由引理 1(1),有 $U(r(S_3))\subseteq(r(S_3))^{\mathrm{reg}}$,易得 $(-1)^2=g^2=(-g)^2=1$。

(4) 根据引理 1(1),得 $(r(S_3))^{\dagger}=(r(S_3))^{\#}\subseteq(r(S_3))^{\mathrm{reg}}$。并且 $(r(S_3))^{\mathrm{reg}}$ 中的非零元都是可逆元,因此再由引理 1(1),有 $(r(S_3))^{\dagger}=(r(S_3))^{\#}=\{0,1,-1,g,-g\}$ 且 $a^{\dagger}=a^{\#}=a$ 对 $\forall a\in(r(S_3))^{\dagger}$。

(5) 由(4)可简单证得。证毕。

参考文献:

[1] CAO Liufeng, YOU Lan, WEI Junchao. EP elements of $\mathbf{Z}[x]/(x^2+x)$[J]. Filomat, 2023, 37(22):7467-7478.

[2] MOSIĆ D. Generalized inverses[M]. Niš: University of Niš, 2018.

[3] MOSIĆ D, DJORDJEVIĆ D S. Moore-Penrose-invertible normal and Hermitian elements in rings[J]. Linear Algebra and Its Applications, 2009, 431:732-745.

[4] MOSIĆ D, DJORDJEVIĆ D S. New characterizations of EP, generalized normal and generalized Hermitian elements in rings [J]. Applied Mathematics and Computation, 2012, 218(12):6702-6710.

[5] SHI Liyan, WEI Junchao. Some new characterizations of normal elements[J]. Filomat, 2019, 33(13):4115-4120.

[6] XU Zhicheng, TANG Ruijun, WEI Junchao. Strongly EP elements in a ring with involution[J]. Filomat, 2020, 34(6):2101-2107.

[7] ZHAO Danan, WEI Junchao. Some new characterizations of partial isometries in rings with involution[J]. International Electronic Jouranl of Algebra, 2021, 30:304-311.

[8] ETINGOF P, GELAKI S, NIKSHYCH D, et al. Tensor categories[M]. Providence: AMS, 2015.

[9] 曹刘峰,周芯雨,李立斌. CMS 融合代数的不可约表示[J]. 数学的实践与认识,2020,50(24):189-195.
CAO Liufeng, ZHOU Xinyu, LI Libin. The irreducible representations of CMS fusion ring[J]. Mathematics in Practice and Theory, 2020, 50(24):189-195.

[10] 曹刘峰. 二面体群 Grothendieck 代数的 Maschke 定理[J]. 山东大学学报(理学版),2023,58(2):44-50.
CAO Liufeng. The Maschke theorem for the Grothendieck algebra of dihedral group[J]. Journal of Shandong University (Natural Science), 2023, 58(2):44-50.

[11] CAO Liufeng, CHEN Huixiang. Special modules for $R(\mathrm{PSL}(2,q))$[J]. Czechoslovak Mathematical Journal, 2023, 73(4): 1301-1317.

[12] GREEN J A. The modular representation algebra of a finite group[J]. Illinois Journal of Mathematics, 1962, 6(4):607-619.

[13] 曹刘峰,周灵睿,李立斌. 二面体群 D_5 上的表示环[J]. 扬州大学学报(自然科学版),2020,23(6):13-17.
CAO Liufeng, ZHOU Lingrui, LI Libin. The representation ring of dihedral group D_5[J]. Journal of Yangzhou University (Natural Science Edition), 2020, 23(6):13-17.

[14] CAO Liufeng, CHEN Huixiang, LI Libin. The cell modules of the Green algebra of Drinfeld quantum double $D(H_4)$[J]. Acta Mathematic Sinica (English Series), 2022, 6(38):1116-1132.

[15] CAO Liufeng, CHEN Huixiang, LI Libin. McKay matrix for indecomposable module of finite representation type Hopf algebra[J]. Communications in Algebra, 2022, 50(10):4560-4576.

[16] CAO Liufeng, SU Dong, YAO Hua. Automorphism group of green algebra of weak Hopf algebra corresponding to Sweedler Hopf algebra[J]. Czechoslovak Mathematical Journal, 2023, 73(148):101-115.

[17] CAO Liufeng, XIA Xuejun, LI Libin. McKay matrices for pointed rank one Hopf algebras of nilpotent type[J]. Algebra Colloquium, 2023, 30(3):467-480.

[18] CAO Liufeng. Representations over Green algebras of weak Hopf algebras based on Taft algebras[J]. Bulletin of The Korean Mathematical Society, 2023, 60(6):1687-1695.

(编辑:陈丽萍)