山东大学学报(理学版)2025 年 11 月 第 60 卷 第 11 期
Journal of Shandong University(Natural Science), Vol.60, No.11, 2025 http://lxbwk.njournal.sdu.edu.cn

文章编号:1671-9352(2025)11-0115-07 DOI:10.6040/j.issn.1671-9352.0.2023.391

一类合冲无限的自内射代数

周建国[1],刘雨喆[1*],章超[1],张亚峰[2]

(1.贵州大学数学与统计学院, 贵州 贵阳 550025; 2.兰州财经大学信息工程学院, 甘肃 兰州 730020)

摘要:对于一个定义在代数闭域 $\boldsymbol{k}$ 上的有限维 $\boldsymbol{k}$-代数 Λ,如果 Λ 是合冲有限的,则利用它是 n-Igusa-Todorov 代数,可知其有限维数有限。利用一类 Nakayama 代数的包络代数来指出该命题的逆不成立,即存在有限维数有限的代数,其合冲无限。

关键词:箭图表示;张量代数;包络代数;有限维数;自内射维数

中图分类号:O154; O153.3 **文献标志码**:A

引用格式:周建国,刘雨喆,章超,等. 一类合冲无限的自内射代数[J]. 山东大学学报(理学版),2025,60(11):115-121.

A syzygy-infinite self-injective algebras

ZHOU Jianguo[1], LIU Yuzhe[1*], ZHANG Chao[1], ZHANG Yafeng[2]

(1. School of Mathematics and Statistics, Guizhou University, Guiyang 550025, Guizhou, China; 2. School of Information Engineering, Lanzhou University of Finance and Economics, Lanzhou 730020, Gansu, China)

Abstract: Let Λ be a finite dimensional $\boldsymbol{k}$-algebra with an algebraically closed field $\boldsymbol{k}$. It is well-known that if Λ is syzygy-finite then, by using that Λ is an n-Igusa-Todorov algebra, its finitistic dimension is finite. This paper shows that the inverse of the above proposition is false by the enveloping algebra of some Nakayama algebras, that is, there exists an algebra with finite finitistic dimension such that it is a syzygy-infinite algebra.

Key words: quiver representation; tensor algebra; enveloping algebra; finitistic dimension; self-injective dimension

0 引言

有限维 $\boldsymbol{k}$-代数 Λ 的同调维数(包括整体维数 gl.dim Λ、自内射维数[1] inj.dim Λ 和有限维数[2] fin.dim Λ 等)是代数与几何领域中的重要概念。在代数几何中,Auslander-Buchsbaum-Serre 定理就指出整体维数可以描述代数簇的几何性质,具体地说,一个代数簇是光滑的充分必要条件是它的坐标环具有有限的整体维数[3-4];另一方面,有限维代数的同调复杂度在一定程度上可以通过其同调维数反映。例如,整体维数的有限性与 Cartan 矩阵关系密切[5-6],后者可以给出同调群的描述[7];整体维数可以反映代数与遗传代数之间的“距离”,其大小在一定程度上描述了导出范畴的复杂程度[8]。

相对于 Λ 的整体维数而言,其有限维数可以更好地反映此代数的同调复杂度。通常情形下,有 fin.dim $\Lambda\leqslant$ inj.dim $\Lambda\leqslant$ gl.dim Λ,当 Λ 的整体维数有限时,Λ 的有限维数、自内射维数与整体维数都相等。Bass[2] 对有限维数展开了细致研究,并指出 Rosenberg 和 Zelilsk 最先提出有限维数猜想,即对任意有限维代数 Λ,有 inj.dim $\Lambda<\infty$。代数学家们发现有限维数猜想与代数领域中许多同调猜想关系密切[9-11],这使得有限维数猜想受到了广泛关注。Happel[12] 证明了 Gorenstein 代数(即自内射维数有限的代数)的自内射维数与它的有限维数相等。随后,包括 Beligiannis[13]、Reiten 等[14]、Green 等[15]、Mochizuki[16]、Wei[17]、Liu 等[18]等都考虑过对特定代数的有限维数(或与之密切相关的 Gorenstein 整体维数)进行计算或者描述。特别地,Wei 证明

收稿日期:2023-09-05; **网络出版时间**:2024-10-24 13:47:21

基金项目:国家自然科学基金资助项目(12171207,12061001); 贵州大学引进人才科研启动基金资助项目(贵大人基合字(2022)53 号,(2022)65 号)

第一作者:周建国(1997—),男,硕士研究生,研究方向为代数表示论与同调代数. E-mail:14785841291@163.com

* **通信作者**:刘雨喆(1992—),男,讲师,博士,研究方向为代数表示论与同调代数. E-mail:liuyz@gzu.edu.cn

了 n-Igusa-Todorov 代数上有限维数猜想成立[17]。这里,n-Igusa-Todorov 代数指的是满足下述条件的有限维 $\boldsymbol{k}$-代数 Λ:对任意右 Λ-模 M,存在右 Λ-模 V 使得有短正和列 $0\to V_1\to V_2\to\Omega^n(M)\oplus P\to 0$,其中,$\Omega^n(M)$表示 M 的 n 次合冲(定义见小节 2.2),V_1 和 V_2 同构于 V 的某些直和项的直和,P 是某个投射模。该定理表明,n-合冲有限(见定义 3)代数上的有限维数猜想成立。这是因为,只要取$V=\Lambda\oplus\oplus_{X\in\Omega^n(\mathrm{mod}\,\Lambda)}X$,则对任意右 Λ-模 M,有短正和列:

$$0\to V_2=0\longrightarrow V_1=\Omega^n(M)\oplus\Lambda\longrightarrow\Omega^n(M)\oplus\Lambda\to 0,$$

由此可知 n-合冲有限代数是 n-Igusa-Todorov 代数。自然地可以考虑如下问题:

问题 1　有限维数有限的有限维 $\boldsymbol{k}$-代数是否 n-合冲有限?

本文将证明下述定理,进而对问题 1 给出否定回答。

定理 1　存在有限维代数 Ξ,其有限维数有限,但是对任意 $n\in\mathbf{N}$,它总是 n-合冲无限的。

具体地说,本文考虑了一类 Nakayama 代数的包络代数,记为 Ξ,证明了 Ξ 是自内射代数(即自内射维数为 0,见引理 4),同时对任意右 Ξ-单模 S,将看到它的 i-次合冲 $\Omega^i(S)$ 和 j-次合冲 $\Omega^j(S)$($\forall\, i\neq j$)总是不同构的,进而得到 Ξ 是 n-合冲无限代数(见命题 3)。

1　包络代数与特殊双列代数

本文中总是假设 $\boldsymbol{k}$ 是代数闭域,箭图 Q 是四元组 $Q=(Q_0,Q_1,s,t)$,其中,Q_0 是顶点集,Q_1 是箭向集,s 和 t 是分别是形如 $Q_1\to Q_0$ 的函数,其将任意箭向 $\alpha\in Q_1$分别映射为 α 的起点和终点。对任意 $v\in Q_0$,v 在 s 下的原像集 $s^{-1}(v)$是全体以 v 为起点的箭向构成的集合;在 t 下的原像集 $t^{-1}(v)$则是全体以 v 为终点的箭向构成的集合。本文还约定箭向 α 和 β 的复合是 $\alpha\beta$,如果 $t(\alpha)=s(\beta)$,否则为 0。令 Λ 是有限维 $\boldsymbol{k}$-代数,记号 $\mathrm{mod}\,\Lambda$ 表示其对应的有限生成右模范畴,记号 $\mathrm{ind}(\mathrm{mod}\,\Lambda)$ 表示 $\mathrm{mod}\,\Lambda$ 中全体不可分解对象的同构类做成的集合。对任意集合 S,记号$\#S$ 表示集合 S 的元素个数。

由于对任意有限维 $\boldsymbol{k}$-代数 Λ,存在箭图 Q 以及路代数 $\boldsymbol{k}Q$ 的理想 I,使得 Λ 等价于 $\boldsymbol{k}Q/I$。并且,当 Q 不是连通箭图时,Q 可以写为若干个子箭图 $Q^{(1)},Q^{(2)},\cdots,Q^{(t)}$ 的不交并,此时 $\boldsymbol{k}Q/I\cong\boldsymbol{k}Q^{(1)}/I^{(1)}\times\cdots\times\boldsymbol{k}Q^{(t)}/I^{(t)}$,进而 $\boldsymbol{k}Q/I$ 的模范畴可以由 $\boldsymbol{k}Q^{(i)}/I^{(i)}$($1\leqslant i\leqslant t$)描述[7]。因此,本文总假设 Λ 是定义在 $\boldsymbol{k}$ 上的有限维连通 basic 代数,即 $\Lambda\cong\boldsymbol{k}Q/I$,其中 Q 是有限且连通的箭图,I 是 $\boldsymbol{k}Q$ 的理想,且 $\boldsymbol{k}Q/I$ 诱导的二元组(Q,I)称作 $\boldsymbol{k}Q/I$ 的有界箭图。习惯上,也将(Q,I)称作 Λ 的有界箭图,这是因为(Q,I)的第一分量 Q 具有唯一性(此唯一性由 I 是理想得到,注意 I 的存在性一般来说是不唯一的,但这并不影响本文讨论的内容)。

1.1　张量代数

任意 2 个有限维 $\boldsymbol{k}$-代数 A 和 B 作为 $\boldsymbol{k}$-向量空间的张量 $A\otimes_{\boldsymbol{k}}B$ 称为 $\boldsymbol{k}$-张量,它也是一个有限维 $\boldsymbol{k}$-代数。Herschend 就对 $\boldsymbol{k}$-张量代数上的重要问题(包括 Clebsch-Gordon 问题和 $\boldsymbol{k}$-张量代数的箭图表示等)展开了详细的研究[19-21]。此外,通过 $A\otimes_{\boldsymbol{k}}B$ 的性质来反映 A 与 B 的性质也是可行的[22-23]。下面构造给出了此张量代数的箭图表示。

命题 1[21]　设 $A=\boldsymbol{k}Q_A/I_A$ 和 $B=\boldsymbol{k}Q_B/I_B$ 是有限维 $\boldsymbol{k}$-代数,其作为 $\boldsymbol{k}$-向量空间的张量 $A\otimes_{\boldsymbol{k}}B$ 的箭图 $(Q_0^{\otimes},Q_1^{\otimes},s,t)$可按下述方式计算:

(1) $Q_0^{\otimes}=(Q_A)_0\times(Q_B)_0=\{(i,j):i\in(Q_A)_0,\ j\in(Q_B)_0\}$;

(2) $Q_1^{\otimes}=\{e_x\otimes y:x\in(Q_A)_0,\ y\in(Q_B)_1\}\cup\{x\otimes e_y:x\in(Q_A)_1,\ y\in(Q_B)_0\}$;

(3) $s:Q_1^{\otimes}\to Q_0^{\otimes}$ 分别将箭向 $e_x\otimes y$ 和 $x\otimes e_y$ 映射为$(x,s(y))$和$(s(x),y)$;

(4) $t:Q_1^{\otimes}\to Q_0^{\otimes}$ 分别将箭向 $e_x\otimes y$ 和 $x\otimes e_y$ 映射为$(x,t(y))$和$(t(x),y)$。

理想 $I^{\otimes}$可通过 I_A、I_B 以及张量积的运算性质诱导,即 $I^{\otimes}$由下面 3 类元素生成:

(1) $e_x\otimes\wp_B(x\in(Q_A)_0)$,其中$\wp_B$ 是 I_B 的生成元;

(2) $\wp_A\otimes e_y(y\in(Q_B)_0)$,其中$\wp_A$ 是 I_A 的生成元;

(3) $(e_i\otimes\beta)(\alpha\times e_{j'})-(\alpha\otimes e_{i'})(e_j\otimes\beta)$,其中 $\alpha:i\to j$ 是$(Q_A)_1$ 中的箭向,$\beta:i'\to j'$是$(Q_B)_1$ 中的箭向,换言之,$Q_{A\otimes_{\boldsymbol{k}}B}$的子箭图交换为

$$\begin{tikzcd}
(i,j') \arrow[r, "\alpha\otimes e_{j'}"] & (j,j') \\
(i,i') \arrow[u, "e_i\otimes\beta"] \arrow[r, "\alpha\otimes e_{i'}"'] & (j,i') \arrow[u, "e_j\otimes\beta"']
\end{tikzcd}$$

定义 1　有限维 $\boldsymbol{k}$-代数 Λ 的包络代数定义为 Λ 与其反代数 Λ^{op} 的 $\boldsymbol{k}$-张量 $\Lambda\otimes_k\Lambda^{\mathrm{op}}$。

1.2　特殊双列代数。

定义 2　当 $\Lambda\cong\boldsymbol{k}Q/I$ 的理想 I 由 Q 上的路生成时,称 Λ 是单项式代数。进一步地,如果 Λ 满足下述条件,则称它是一个特殊双列代数。

(1) 对任意 $v\in Q_0$,有$\#s^{-1}(v)\leqslant 2$ 和$\#t^{-1}(v)\leqslant 2$;

(2) 对任意 $v\in Q_0$,如果存在 $\alpha_1,\alpha_2\in t^{-1}(v)$ 和 $\beta\in s^{-1}(v)$,则 $\alpha_1\beta\in I$ 与 $\alpha_2\beta\in I$ 至少满足其中之一;

(3) 对任意 $v\in Q_0$,如果存在$\alpha_1\in t^{-1}(v)$ 和$\beta_1,\beta_2\in s^{-1}(v)$,则 $\alpha\beta_1\in I$ 与 $\alpha\beta_2\in I$ 至少满足其中之一。

例 1　用记号 X_n 表示线性定向的 $\widetilde{\boldsymbol{A}}_n$ 型的 Euclid 箭图:

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r, "a_1"] & 2 \arrow[r, "a_2"] & \cdots \arrow[r, "a_{n-1}"] & n \arrow[lll, bend left, "a_n"]
\end{tikzcd}$$

该箭图对应的路代数 $\boldsymbol{k}X_n$ 记作 A_n。再记 $r=\mathrm{rad}\ A_n$。则包络代数 $(A_n/r^2)^e=(A_n/r^2)\otimes_{\boldsymbol{k}}(A_n/r^2)^{\mathrm{op}}\cong(A_n/r^2)\otimes_{\boldsymbol{k}}(A_n/r^2)$是特殊双列代数。

对每个特殊双列代数 Λ,Wald 和 Waschbüsch 通过 Λ 的箭图引入了 V-序列[24]。设 $\Lambda=\boldsymbol{k}Q/I$,对每个箭向 $\alpha\in Q_1$,定义它的形式逆是一个形式上的记号 α^{-1},使得 $s(\alpha^{-1})=t(\alpha)$, $t(\alpha^{-1})=s(\alpha)$。并令 Q_1^{-1} 是全体形式逆构成的集合。箭图 Q 上的一个长度 l 的步是一个序列 $\omega=\omega_1\omega_2\cdots\omega_l$,其中 $\omega_i\in Q_1\cup Q_1^{-1}$, $t(\omega_i)=s(\omega_{i+1})$ $(1\leqslant i<l)$,并记 $l=\ell(\omega)$。满足下述条件的步 ω 被称为 V-序列[24]:

(1) ω 没有 aa^{-1}形式的子序列($a\in Q_1\cup Q_1^{-1}$);

(2) 对 ω 上的任何一条路径,它作为 Λ 中的元素时,该路径不为零。

设 ω 和 ω'是 2 个 V-序列。如果二者满足下述条件之一,则称二者等价。

· 对任意　$1\leqslant i\leqslant\ell(\omega)=\ell(\omega')$,都有 $\omega_i=\omega_i'$;

· 对任意 $1\leqslant i\leqslant\ell(\omega)=\ell(\omega')$,都有 $\omega_i=(\omega_i')^{-1}$。

满足下述条件的步 $\omega=\omega_1\omega_2\cdots\omega_l$ 被称为本原 V-序列(primitive V-sequence)[24]:

(1) $t(\omega)=s(\omega)$(即 $t(\omega_l)=s(\omega_1)$);

(2) 对任意正整数 m,ω^m 是一个 V-序列;

(3) ω 不是任何一个 V-序列的非平凡幂,精确地说,对任意 V-序列 α 和正整数 n,$\omega\neq\alpha^n$。

对于给定的本原 V-序列 $\omega=\omega_1\omega_2\cdots\omega_n$,用记号 $\omega[t]$ $(0\leqslant t\leqslant n)$表示:

$$\omega_t\omega_{t+1}\cdots\omega_n\omega_1\cdots\omega_{t-1}。$$

设 ω 和 ω'是两个本原 V-序列。如果二者满足下述条件之一,则称二者等价。

· 存在 $0\leqslant t\leqslant\ell(\omega)=\ell(\omega')$使得 $\omega=\omega'[t]$;

· 存在 $0\leqslant t\leqslant\ell(\omega)=\ell(\omega')$使得 $\omega=(\omega'[t])^{-1}$。

与 V-序列(或本原 V-序列)ω 等价的全体 V-序列(或本原 V-序列)构成的等价类记作$[\omega]$。下面定理指出,V-序列的等价类与本原 V-序列的等价类完全刻画了特殊双列代数上的不可分解模。

定理 2[24]　设 Λ 是特殊双列代数,则存在满射:

$$M:\mathrm{V}(\Lambda)\cup(\mathrm{pV}(\Lambda)\times\mathscr{J})\to\mathrm{ind}(\mathrm{mod}\ \Lambda),$$

使得 $\mathrm{im}(M|_{\mathrm{V}(\Lambda)})\cap\mathrm{im}(M|_{\mathrm{pV}(\Lambda)\times\mathscr{J}})=\varnothing$。其中,$\mathrm{V}(\Lambda)$是全体 V-序列的等价类构成的集合,$\mathrm{pV}(\Lambda)$是全体 V-序列的等价类构成的集合,$\mathscr{J}$是全体特征值非零的 Jordan 块构成的集合。

注记 1　考虑这样的特殊双列代数 $\Lambda=\boldsymbol{k}Q/I$, admissible 理想 I 的生成元包含 2 类:一者是长度$\geqslant 2$ 的路径,另一者则是一些具有相同起终点的 2 条长度$\geqslant 2$ 的路径$\wp_1$ 和$\wp_2$ 决定的交换关系$\wp_1+\wp_2$。则对 V-序列 $\omega=\omega_1\omega_2\cdots\omega_n\in\mathrm{V}(\Lambda)$,如果 ω 与 ω^{-1}的任何一条子路径都不是 I 的生成元的求和项(即对任意$\wp_1+\wp_2$ 的分量

$\wp_1(i\in\{1,2\})$,始终有$\wp_1\neq\omega_u\cdots\omega_{u+4}$, $1\leqslant u<u+r\leqslant l$),则称$\wp$是一条弦。特别地,当 V-序列 ω 不是弦时,$M(\omega)=0$,当 V-序列 ω 是弦时,其对应的不可分解模 $M(\omega)$ 称为弦模。

2　$(A_n/r^2)^e$ 是合冲无限代数

设 $\Xi=(A_n/r^2)^e=\boldsymbol{k}Q^{\otimes}/I^{\otimes}$。本节证明 Ξ 是合冲无限的。

2.1　$(A_n/r^2)^e$ 上的不可分解模

Λ 的有界箭图$(Q^{\otimes},I^{\otimes})$可按如下给出:

(1) $Q^{\otimes}$是 A_n 与自身的图张量(见图 1);

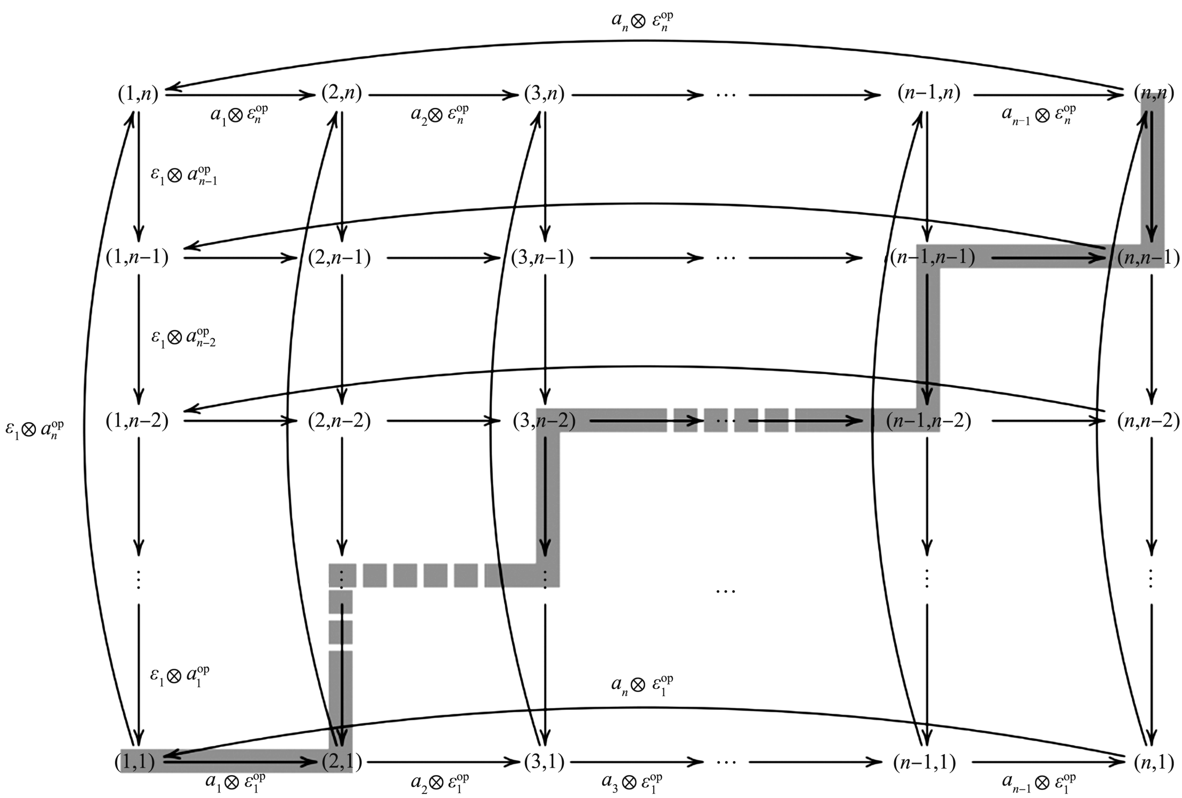

图 1　箭图 $Q^{\otimes}$
Fig.1　quiver $Q^{\otimes}$

(2) $I^{\otimes}$的生成元包括三类:$(a_{\bar{i}}\otimes\varepsilon_j^{\mathrm{op}})(a_{\overline{i+1}}\otimes\varepsilon_j^{\mathrm{op}})$;$(\varepsilon_{\bar{i}}\otimes a_j^{\mathrm{op}})(\varepsilon_{\bar{i}}\otimes a_{\overline{j-1}}^{\mathrm{op}})$;$(\varepsilon_{\bar{i}}\otimes a_j^{\mathrm{op}})(a_{\bar{i}}\otimes\varepsilon_j^{\mathrm{op}})-(a_{\bar{i}}\otimes\varepsilon_{\overline{j+1}}^{\mathrm{op}})(e_{\overline{i+1}}\otimes a_j^{\mathrm{op}})$,其中,记号 $\bar{t}$ 表示 t 对 n 取余数后再加 1。

易见 $\mathrm{V}(\Xi)$中的元素 $\tilde{\omega}$ 可以分为如下 3 种:

(1) $\tilde{\omega}=\omega$ 是 V-序列,且存在属于$[\omega]$的某个 V-序列,其包含至少一条形如$(\varepsilon_{\bar{i}}\otimes a_j^{\mathrm{op}})(a_{\bar{i}}\otimes\varepsilon_j^{\mathrm{op}})$或者$(a_{\bar{i}}\otimes\varepsilon_{\overline{j+1}}^{\mathrm{op}})(\varepsilon_{\overline{i+1}}\otimes a_j^{\mathrm{op}})$的子路径。

(2) $\tilde{\omega}=\omega=\omega_1\omega_2\cdots\omega_t$ 是 V-序列,且当 $t\geqslant 2$ 时,其使得下面条件有且仅有其中之一成立:

$$\omega_{\bar{i}}\in Q_1^{\otimes}\text{ 且 }\omega_{\overline{i+1}}\in(Q_1^{\otimes})^{-1},\quad\forall i\in\mathbf{Z};\quad\omega_{\bar{i}}\in(Q_1^{\otimes})^{-1}\text{ 且 }\omega_{\overline{i+1}}\in(Q_1^{\otimes}),\quad\forall i\in\mathbf{Z}。$$

(3) $\tilde{\omega}=(\omega,\boldsymbol{J}_n(\lambda\neq 0))$,其中 ω 是本原 V-序列。

用记号 $\mathrm{V}_t(\Lambda)$($t\in\{1,2,3\}$)表示全体属于第(t)种的 V-序列的等价类做成的集合。下面引理给出了 Ξ 上的弦模的完全刻画。

引理 1　设 ω 是包络代数 Ξ 的有界箭图$(Q^{\otimes},I^{\otimes})$上的一条 V-序列,则

(1) $\mathrm{im}(M|_{\mathrm{V}_1(\Lambda)})=\{0\}$,且 $M(\omega)\neq 0$ 当且仅当 ω 是弦;

(2) $M|_{\mathrm{V}_2(\Xi)}$是单射。

证明　显然,$\mathrm{V}(\Xi)=\mathrm{V}_1(\Xi)\cup\mathrm{V}_2(\Xi)$, $\mathrm{V}_3(\Xi)=\mathrm{pV}(\Xi)$。由定理 2 和注记 1,可知

$$\mathrm{im}(M|_{\mathrm{V}_1(\Xi)})=\{0\},\quad \mathrm{im}(M|_{\mathrm{V}_2(\Xi)})=\{\Xi\text{ 上的弦模}\},\quad \mathrm{im}(M|_{\mathrm{V}_3(\Xi)\times\mathscr{J}})=\varnothing。$$

注意 $\mathrm{V}(\Xi)=\mathrm{V}_1(\Xi)\cup\mathrm{V}_2(\Xi)$ 是不交并,故结论(1)成立。接下来证明结论(2)。

对任意$[\omega]\in\mathrm{V}_2(\Xi)$,不妨取 $\omega=\omega_1\omega_2\cdots\omega_t\in[\omega]$使得 $\omega\in Q_1^{\otimes}$,记 $s(\omega_1)=v_1$, $s(\omega_2)=v_2,\cdots,s(\omega_t)=v_t$, $t(\omega_t)=v_{t+1}$,则 $M(\omega)$所对应的箭图表示$(M(\omega)\varepsilon_v,\varphi_a)_{v\in Q_0^{\otimes},\ a\in Q_1^{\otimes}}$可按下面方式得到:

- $M(\omega)\varepsilon_v$ 作为 $\boldsymbol{k}$-模同构于 $\boldsymbol{k}^{\oplus n_v}$,其中 $n_v=\#\{v_r=v\mid 1\leqslant r\leqslant t+1\}$;
- $\varphi_a=((\varphi_a)_{ij})_{n_{t(a)}\times n_{s(a)}}$是形如 $M(\omega)\varepsilon_{s(a)}\to M(\omega)\varepsilon_{t(a)}$ 的 $\boldsymbol{k}$-模同态,其分量$(\varphi_a)_{ij}$由 ω 上的箭向自然诱导。精确地说,设 $M(\omega)\varepsilon_{s(a)}=\oplus_{i\in I}M_{v_i}$, $M(\omega)\varepsilon_{t(a)}=\oplus_{j\in J}M_{v_j}$(其中,$M_{v_i}$表示 ω 的顶点 $v_i(1\leqslant i\leqslant t+1)$对应的不可分解 $\boldsymbol{k}$-模;I 和 J 是指标集$\{1,2,\cdots,t+1\}$的子集),则

$$(\varphi_a)_{ij}:M_{v_i}\to M_{v_j}=\begin{cases}1_k, & \text{如果 } j=i+1 \text{ 且 } a=\omega_i;\\ 0, & \text{其它情形。}\end{cases}$$

由此,易见$M|_{\mathrm{V}_2(\Lambda)}:\mathrm{V}_2(\Xi)\to\mathrm{ind}(\mathrm{mod}\ \Xi)$是一个单射。该单射给出了所有 Ξ 上属于 $\mathrm{im}(M|_{\mathrm{V}_2(\Xi)})$中的不可分解模在同构意义下的完全分类,它们都是弦模。

注记 2　(1) 方便起见,$\mathrm{V}_2(\Xi)$中的 V-序列在本文中称为有界箭图$(Q^{\otimes},I^{\otimes})$上的交替弦。例如

$$(a_1\otimes\varepsilon_1^{\mathrm{op}})(\varepsilon_2\otimes a_1^{\mathrm{op}})^{-1}\cdots(a_{n-1}\otimes\varepsilon_{n-1}^{\mathrm{op}})(\varepsilon_n\otimes a_{n-1}^{\mathrm{op}})^{-1}$$

(见图 1 阴影部分)就是一条交替弦,其长度为 $2n$。特别地,每一个箭向都视为一个长度 1 的交替弦。此外,在映射 $M:\mathrm{V}(\Lambda)\cup(\mathrm{pV}(\Lambda)\times\mathscr{J})\to\mathrm{ind}(\mathrm{mod}\ \Lambda)$下,对应于交替弦的弦模称之为交替弦模。

(2) 结合引理 1 的结论(1)和(2),立刻知 Ξ 的有界箭图上的弦模都是交替弦模,且 $M|_{\mathrm{V}_2(\Xi)}:\mathrm{V}_2(\Xi)\to\mathrm{im}(M|_{\mathrm{V}_2(\Xi)})=\{\Xi$ 上的交替弦模$\}$提供了交替弦与交替弦模之间的一一对应。这自然提供了 $M|_{\mathrm{V}_2(\Xi)}$的逆 $M|_{\mathrm{V}_2(\Xi)}^{-1}:\mathrm{im}(M|_{\mathrm{V}_2(\Xi)})\to\mathrm{V}_2(\Xi)$。简便起见,对任意对应于交替弦 ω 的交替弦模 $M(\omega)$,$[\omega]=M|_{\mathrm{V}_2(\Xi)}^{-1}(M(\omega))$也记作 $M^{-1}(M(\omega))$。

引理 2　有界箭图$(Q^{\otimes},I^{\otimes})$上存在任意长度的交替弦。进一步地,$\Xi$ 表示无限(即不可分解模的同构类数无限)。

证明　在$(Q^{\otimes},I^{\otimes})$上任取一条长度 1 的交替弦 $\omega=\omega_1\cdots\omega_l$,则由 $\mathrm{V}_2(\Xi)$的定义,可知$\omega_1\in Q_1^{\otimes}$与$\omega_1\in(Q_1^{\otimes})^{-1}$至少成立一者。不妨设$\omega_1\in Q_1^{\otimes}$,则 ω 必使得条件(1)和(2)其中之一满足

$$\omega_1=a_{\bar i}\otimes\varepsilon_{\bar j}^{\mathrm{op}}\text{ 且 }\omega_2^{-1}=\varepsilon_{\overline{i+1}}\otimes a_{\bar j}^{\mathrm{op}},\text{即 }\omega=(a_{\bar i}\otimes\varepsilon_{\bar j}^{\mathrm{op}})(\varepsilon_{\overline{i+1}}\otimes a_{\bar j}^{\mathrm{op}})^{-1}(a_{\overline{i+1}}\otimes\varepsilon_{\overline{j+1}}^{\mathrm{op}})\cdots,\tag{1}$$

$$\omega_1=\varepsilon_{\bar i}\otimes a_{\bar j}^{\mathrm{op}}\text{ 且 }\omega_2^{-1}=a_{\overline{i-1}}\otimes\varepsilon_{\bar j}^{\mathrm{op}},\text{即 }\omega=(\varepsilon_{\bar i}\otimes a_{\bar j}^{\mathrm{op}})(a_{\overline{i-1}}\otimes\varepsilon_{\bar j}^{\mathrm{op}})^{-1}(\varepsilon_{\overline{i-1}}\otimes a_{\overline{j-1}}^{\mathrm{op}})\cdots。\tag{2}$$

对于式(1),取 $\omega'=(\varepsilon_{\bar i}\otimes a_{\overline{j-1}}^{\mathrm{op}})^{-1}\omega$;对于(2),则取 $\omega'=(a_{\overline{i-1}}\otimes\varepsilon_{\overline{j+1}}^{\mathrm{op}})^{-1}\omega$。按上述方法所构造的 ω'就是长度$l+1$的交替弦。注意长度 1 的交替弦存在条件,从而$(Q^{\otimes},I^{\otimes})$上存在任意长度的交替弦。再根据 $M|_{\mathrm{V}_2(\Lambda)}$是单射,可知 Ξ 表示无限。

2.2　$(A_n/r^2)^e$-单模的合冲

设 M 是 Ξ-模,M 的投射分解是由一组投射模 $P_i=P_i(M)(i\geqslant 0)$给出的正合列:

$$\cdots\longrightarrow P_2(M)\xrightarrow{p_2(M)}P_1(M)\xrightarrow{p_1(M)}P_0(M)\longrightarrow M\longrightarrow 0,$$

使得对任意 $i\geqslant 0$, p_i 的典范分解为

$$\begin{tikzcd}
P_i(M) \arrow[rr, "p_i(M)"] \arrow[dr, "\tilde{p}_i(M)"'] & & P_{i-1}(M) \\
& \ker p_{i-1}(M) \arrow[ur, hook, "\mathrm{emb}_i"'] &
\end{tikzcd}$$

诱导的满同态 $\tilde{p}_i(M):P_i(M)\to\ker p_{i-1}(M)$是 $\ker p_{i-1}(M)$的投射覆盖。进一步,称 $\ker p_{i-1}(M)$是 M 的 i-合冲(i-th syzygy),记作 $\Omega^i(M)$。

定义 3　对有限维 $\boldsymbol{k}$-代数 Λ 上的任意右 Λ-模 M,定义

$$\Omega^n(\mathrm{mod}\ \Lambda)=\bigcup_{M\in\mathrm{mod}\ \Lambda}\mathrm{ind}(\Omega^n(M)),$$

其中,$\mathrm{ind}(\Omega^n(M))$表示由 $\Omega^n(M)$的不可分解直和项的同构类构成的集合。如果$\#\Omega^n(\mathrm{mod}\ \Lambda)<\infty$,则称 Λ 是 n-合冲有限代数,否则称其是 n-合冲无限代数。

引入如下记号:

$$V_2^{\rightleftarrows}(\Xi)=\{\omega=\omega_1\omega_2\cdots\omega_l\in V_2(\Xi):l\geqslant 0\text{ 是偶数,且 }\omega_i\in(Q_1^{\otimes})^{(-1)^i}(\forall 1\leqslant i\leqslant l)\}。$$

引理 3 设 $\omega=\omega_1\omega_2\cdots\omega_{2l}$ 是 $(Q^{\otimes},I^{\otimes})$ 上的一条长度 $2l$ 的交替弦,使得 $\omega\in V_2^{\rightleftarrows}(\Xi)$,则 $M(\omega)$ 的 1 次合冲 $\Omega^1(M(\omega))$ 是交替弦模,使得 $M^{-1}(\Omega^1(M))\in V_2^{\rightleftarrows}(\Xi)$ 的一条长度 $2(l+1)$ 的交替弦。

证明 不妨设 $\omega=(a_{\bar{i}}\otimes\varepsilon_{\bar{j}}^{\mathrm{op}})(\varepsilon_{\overline{i+1}}\otimes a_{\bar{j}}^{\mathrm{op}})^{-1}(a_{\overline{i+1}}\otimes\varepsilon_{\overline{j+1}}^{\mathrm{op}})(\varepsilon_{\overline{i+2}}\otimes a_{\overline{j+1}}^{\mathrm{op}})^{-1}\cdots(a_{\overline{i+l-1}}\otimes\varepsilon_{\overline{j+l-1}}^{\mathrm{op}})(\varepsilon_{\overline{i+l}}\otimes a_{\overline{j+l-1}}^{\mathrm{op}})^{-1}$,则 $M(\omega)$ 的投射盖形如

$$p_0(M(\omega)):P_0(M(\omega))=\bigoplus_{t=0}^{l}P((\overline{i+t},\overline{j+t}))\longrightarrow M(\omega)。$$

由此算得 $\Omega^1(M)$ 是对应交替弦

$$\omega'=(a_{\bar{i}}\otimes\varepsilon_{\overline{j-1}}^{\mathrm{op}})(\varepsilon_{\overline{i+1}}\otimes a_{\overline{j-1}}^{\mathrm{op}})^{-1}(a_{\overline{i+1}}\otimes\varepsilon_{\bar{j}}^{\mathrm{op}})(\varepsilon_{\overline{i+2}}\otimes a_{\bar{j}}^{\mathrm{op}})^{-1}\cdots(a_{\overline{i+l}}\otimes\varepsilon_{\overline{j+l-1}}^{\mathrm{op}})(\varepsilon_{\overline{i+l+1}}\otimes a_{\overline{j+l-1}}^{\mathrm{op}})^{-1}$$

的弦模,且 $\ell(\omega')=2(l+1)$。

命题 2 设 $S((\bar{i},\bar{j}))(i,j\in\mathbf{Z})$ 是对应顶点 $(\bar{i},\bar{j})\in Q^{\otimes}$ 的 Ξ-单模,则 $S((\bar{i},\bar{j}))$ 的 t-次合冲 $\Omega^t(S((\bar{i},\bar{j})))$ 是交替弦模,且其对应的交替弦的长度为 $2t$,且属于 $V_2^{\rightleftarrows}(\Xi)$。

证明 为了书写简便,记 $S=S((\bar{i},\bar{j}))$。其对应的弦 $M^{-1}(\Omega^1(S))$ 是 $(a_{\bar{i}}\otimes\varepsilon_{\overline{j-1}}^{\mathrm{op}})(\varepsilon_{\overline{i+1}}\otimes a_{\overline{j-1}}^{\mathrm{op}})^{-1}$,可见 $M^{-1}(\Omega^1(S))$ 这是长度 2 的交替弦,且该交替弦属于 $V_2^{\rightleftarrows}(\Xi)$。根据引理 3 得 $\Omega^2(S)$ 也是弦模,其对应的弦 $M^{-1}(\Omega^2(S))$ 是长度 4 的交替弦,属于 $V_2^{\rightleftarrows}(\Xi)$。由引理 3 以及归纳法,可知 $M^{-1}(\Omega^s(S))$ 是属于 $V_2^{\rightleftarrows}(\Xi)$ 的长度 $2t$ 的交替弦。

2.3 $(A_n/\boldsymbol{r}^2)^e$ 的合冲无限性

命题 3 对任意 $t\in\mathbf{N}$,Ξ 是 t-合冲无限代数。

证明 代数的 0-合冲无限性等价于代数的表示无限性。当 $t=0$ 时,Ξ 的表示无限性由引理 3 以及单射 $M|_{V_2(A)}$ 给出,由此可知 Ξ 是 0-合冲无限的。下面证明对任意 $n\geqslant 1$,Ξ 是 t-合冲无限的。

考虑单模 $S=S((\bar{i},\bar{j}))$,由于命题 2,$\Omega^t(S)$ 是交替弦模,且 $\ell(M^{-1}(\Omega^t(S)))=2t$。因此,对 $r\neq s$,$M^{-1}(\Omega^r(S))\neq M^{-1}(\Omega^s(S))$。由引理 1 得

$$\Omega^r(S)\not\cong\Omega^s(S)(\forall r\neq t),\tag{3}$$

所以,对交替弦模 $\Omega^m(S)(m\in\mathbf{N})$,其 t-阶合冲 $\Omega^{m+t}(S)$ 也是一个交替弦模,其对应的交替弦属于 $V_2^{\rightleftarrows}(\Xi)$,长度为 $2(m+t)$。由 (3) 可知对任意 $m'\neq m$,$\Omega^{m'+t}(S)\not\cong\Omega^{m+t}(S)$ 成立。这表明 $\{\Omega^{m+t}(S):m\in\mathbf{N}\}\subseteq\Omega^t(\mathrm{mod}\ \Xi)$。注意该式的左侧是无限集,所以 Ξ 是 t-合冲无限代数。

3 主要结论

引理 4 Ξ 是自内射代数。

证明 首先,对任意顶点 $(\bar{i},\bar{j})\in Q_0^{\otimes}$,该点所对应的不可分解投射模 $P((\bar{i},\bar{j}))=\varepsilon_{(\bar{i},\bar{j})}\Xi$ 满足:

$$\varepsilon_{(\bar{i},\bar{j})}\Xi\varepsilon_{(\bar{u},\bar{v})}=\begin{cases}\boldsymbol{k}, & \text{如果}(\bar{u},\bar{v})\in\{(\bar{i},\bar{j}),(\bar{i},\overline{j-1}),(\overline{i+1},\bar{j}),(\overline{i+1},\overline{j-1})\};\\ 0, & \text{其它。}\end{cases}\tag{4}$$

对任意箭向 $\alpha\in Q_1^{\otimes}$,在 $\boldsymbol{k}$-向量空间同构的意义下,$\alpha:\varepsilon_{(\bar{i},\bar{j})}\Xi\to\varepsilon_{(\bar{i},\bar{j})}\Xi\alpha$ 作为 $\boldsymbol{k}$-模同态 φ_α 时满足:

$$\varphi_\alpha=\begin{cases}1_{\boldsymbol{k}}, & \text{如果 }\alpha\in\{\varepsilon_{\bar{i}}\otimes a_{\overline{j-1}}^{\mathrm{op}},\ a_{\bar{i}}\otimes\varepsilon_{\bar{j}}^{\mathrm{op}},\ a_{\bar{i}}\otimes\varepsilon_{\overline{j-1}}^{\mathrm{op}},\ \varepsilon_{\overline{i+1}}\otimes a_{\overline{j-1}}^{\mathrm{op}}\};\\ 0, & \text{其它。}\end{cases}\tag{5}$$

式(4)和(5)给出了 $P((\overline{i+1},\overline{j-1}))$ 的箭图表示。

另一方面,可以验证 $(\overline{i+1},\overline{j-1})\in Q_0^{\otimes}$ 对应的不可分解内射模 $E((\overline{i+1},\overline{j-1}))$ 对应的箭图表示也由(4)和(5)给出,因此,$P((\bar{i},\bar{j}))\cong E((\overline{i+1},\overline{j-1}))$,得 $P((\bar{i},\bar{j}))$ 是投射−内射模。于是 Ξ 的自内射维数为 0。

定理 3 存在有限维数有限的有限维 $\boldsymbol{k}$-代数 A,其 n-合冲无限($\forall n\in\mathbf{N}$)。

证明 取 $A=\Xi$。由命题 3 知 Ξ 是 1-合冲代数。由引理 4 知 Ξ 是自内射维数有限的。最后,再根据

Happel 给出的结论[12]，立刻得到 Ξ 的有限维数=自内射维数=0。

参考文献:

[1] HOSHINO M. Algebras of finite self-injective dimension[J]. P Am Math Soc, 1991, 112(3):619-622.

[2] BASS H. Finitistic dimension and a homological generalization of semi-primary rings[J]. T Am Math Soc, 1960, 95(3):466-488.

[3] AUSLANDER M, BUCHSBAUM D A. Homological dimension in local rings[J]. Transactions of the American Mathematical Society, 1957, 85(2):390-405.

[4] SERRE J P. Sur la dimension homologique des anneaux et des modules noethériens[C]//Proceedings of the international symposium on algebraic number theory. Tokyo & Nikko: [s. n.], 1955:175-189.

[5] EILENBERG S. Algebras of cohomologically finite dimension [J]. Commentarii Mathematici Helvetici, 1954, 28(1):310-319.

[6] HOLM T. Cartan determinants for gentle algebras [J]. Archiv Der Mathematik, 2005, 85(3):233-239.

[7] ASSEM I, SIMSON D, SKOWROŃSKI A. Elements of the representation theory of associative algebras: volume 1, techniques of representation theory[M]. New York: Cambridge University Press, 2006.

[8] HAPPEL D. On the derived category of a finite-dimensional algebra[J]. Commentarii Mathematici Helvetici, 1987, 62(1): 339-389.

[9] AUSLANDER M, REITEN I. On a generalized version of the nakayama conjecture[J]. Proceedings of the American Mathematical Society, 1975, 52(1):69-74.

[10] COLBY R R, FULLER K R. A note on the nakayama conjectures[J]. Tsukuba Journal of Mathematics, 1990, 14(2):343-352.

[11] HUISGEN B Z. The finitistic dimension conjectures—a tale of 3.5 decades[M]//Abelian Groups and Modules. Dordrecht: Springer Netherlands, 1995:501-517.

[12] HAPPEL D. On gorenstein algebras[M]//Representation Theory of Finite Groups and Finite-Dimensional Algebras. Basel: Birkhäuser, 1991:389-404.

[13] BELIGIANNIS A. On algebras of finite Cohen-Macaulay type[J]. Advances in Mathematics, 2011, 226(2):1973-2019.

[14] REITEN I, GEISS C. Gentle algebras are Gorenstein[C]//Representations of Algebras and Related Topics, Proceedings of the 10th International Conference.Toronto: Fields Institute for Research in Mathematical Sciences, 2005:129-133.

[15] GREEN E L, KIRKMAN E, KUZMANOVICH J. Finitistic dimensions of finite dimensional monomial algebras[J]. Journal of Algebra, 1991, 136(1):37-50.

[16] MOCHIZUKI H. Finitistic global dimension for rings[J]. Pacific Journal of Mathematics, 1965, 15(1):249-258.

[17] WEI J Q. Finitistic dimension and igusa-todorov algebras[J]. Advances in Mathematics, 2009, 222(6):2215-2226.

[18] LIU Y Z, GAO H P, HUANG Z Y. Homological dimensions of gentle algebras via geometric models[J]. Science China Mathematics, 2024, 67:733-766.

[19] HERSCHEND M. Solution to the Clebsch-Gordan problem for representations of quivers of type $\tilde{A}_n$[J]. Journal of Algebra and Its Applications, 2005, 4(5):481-488.

[20] HERSCHEND M. Galois coverings and the Clebsch-Gordan problem for quiver representations[J]. Colloquium Mathematicum, 2007, 109(2):193-215.

[21] HERSCHEND M. Tensor products on quiver representations[J]. Journal of Pure and Applied Algebra, 2008, 212(2):452-469.

[22] 刘雨喆, 张亚峰. A 型代数的多重张量代数表示有限的充分必要条件[J]. 中国科学: 数学, 2024, 54(1):25-38.
LIU Yuzhe, ZHANG Yafeng. Sufficient and necessary conditions for the multiple tensors of algebras of type A to be representation-finite[J]. Scientia Sinica Mathematia, 2024, 54(1):25-38.

[23] MAHDOU N, TAMEKKANTE M. On Gorenstein global dimension of tensor product of algebras over a field[J]. Gulf Journal of Mathematics, 2015, 3(2):30-37.

[24] WALD B, WASCHBÜSCH J. Tame biserial algebras[J]. Journal of Algebra, 1985, 95(2):480-500.

(编辑:胡春燕)