文章编号:1671-9352(2025)11-0032-05　　DOI:10.6040/j.issn.1671-9352.0.2025.014

关于次正规子群对群的 n-可解性的影响

白一曼[1],海进科[1,2]*
(1.伊犁师范大学数学与统计学院, 新疆 伊宁 835000; 2.青岛大学数学与统计学院, 山东 青岛 266071)

摘要:设 n 是一个整数(正、负或零),证明2个有限 n-可解群 H 和 K 生成的群 $\langle H,K\rangle$ 在其中一个子群是次正规条件下仍是有限 n-可解群。证明如果有限群 G 的所有非 n-幂零真子群皆次正规且 n-可解,则 G 是 n-可解群。

关键词:n-可解群;次正规子群;正规闭包
中图分类号:O152.1　　**文献标志码**:A
引用格式:白一曼,海进科.关于次正规子群对群的 n-可解性的影响[J]. 山东大学学报(理学版),2025,60(11):32-36.

The influence of subnormal subgroups on the n-solvability of groups

BAI Yiman[1], HAI Jinke[1,2]*
(1. College of Mathematics and Statistics, Yili Normal University, Yining 835000, Xinjiang, China; 2. College of Mathematics and Statistics, Qingdao University, Qingdao 266071, Shandong, China)

Abstract: Let n be an integer(positive or negative or 0). In this paper, we prove that the group $\langle H,K\rangle$ generated by two finite n-soluble groups H and K is still a finite n-soluble group if one of the subgroups is subnormal. Moreover, it is proved that if all non-n-nilpotent proper subgroups of a finite group G are subnormal and n-soluble, then G is n-soluble.

Key words: n-soluble group; subnormal subgroup; normal closure

0 引言

设 G 为一个群,n 是一个整数(正、负或零)。Hawthorn 等[1]引入了群之间映射共轭的概念,映射的共轭与平面函数的研究紧密相关[2]。另外,在文献[1]中还定义了群的 f-分配子(其中 f 是两群之间的映射),它既是群的换位子和 n-换位子[3]的推广,又是群同态的一种度量。Hawthorn[4]还将 n-换位子群、n-导列等一些概念推广到 f-分配子群和 f-导列上,并将文献[3]中 n-可解群的一些结果推广到 f-可解群上,这为探索群的结构提供了新的视角。

设 $g\in G$,如果存在正整数 i 使 $g^{n^i}=1$,则称 g 是一个 n-元素,若$(o(g),n)=1$,则称元素 g 是 P_n-元素。若 G 中所有的元素都是 n-元素(P_n-元素),则称 G 为 n-群(P_n-群)。G 中所有 n-元素的集合 G_n 称为 G 之 n-成分,而所有 P_n-元素的集合 G_{P_n} 称为 G 之 P_n-成分。一般 G_n 和 G_{P_n} 不构成群。

文献[3]中讨论了 n-可解群的子群和商群都是 n-可解群,并且 n-可解群是 n-可解通过 n-可解的扩张,每个 n-可解群是一个 n-群和一个$(1-n)$-群以及可解的 $P_{n(1-n)}$-群的积。其它一些相关性质也见文献[3,5]。

Wielandt[6]证明了:设 $G=HK$,如果 H,K 为 G 的有限幂零子群,则 G 是可解群。Scott 猜想[7]是指:设 $G=HK$,如果 H,K 分别有幂零子群 H_1 和 K_1 使得 $|H:H_1|=2$ 且 $|K:K_1|=2$,则 G 是可解群。容易证明,设 $H\lhd G$,如果 H,K 为 G 的 n-可解子群,则 $\langle H,K\rangle=HK$ 也是 n-可解子群。但如果我们把正规性条件去掉,即

收稿日期:2025-01-13; **网络出版时间**:2025-09-02 14:43:41
基金项目:国家自然科学基金资助项目(12471021)
第一作者:白一曼(2001—),女,硕士研究生,研究方向为有限群理论. E-mail:2359729756@qq.com
***通信作者**:海进科(1964—),男,教授,博士,研究方向为有限群理论及其表示. E-mail:haijinke2002@aliyun.com

使 G 是由 2 个有限幂零子群 H、K 所生成的群,则 G 也不一定是 n-可解。例如 5 次对称群 $\sum_5$,有 $\sum_5=\langle(12345),(12)\rangle$,且 $\langle(12345)\rangle$ 和 $\langle(12)\rangle$ 为循环群,取 $n=2$,但 $\sum_5$ 不是 n-可解群。

同时注意到,2 个有限子群所生成的群不一定是有限群。例如取

$$H=\langle\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}\rangle,\quad K=\langle\begin{bmatrix}1 & a\\ 0 & -1\end{bmatrix}\rangle,$$

其中 $a\in\mathbf{R}$, $\mathbf{R}$ 为实数集且 $a\neq 0$,则 H,K 均为有限群,但 $\langle H,K\rangle$ 为无限群。设群 H 是群 G 的子群,如果存在一条从 H 到 G 的群列,则称 H 是 G 的次正规子群。记作 $H\lhd\lhd G$。关于子群的次正规性对有限可解群的影响已有许多的结果,参见文献[8-10]。本文通过对次正规亏及其群阶的归纳,研究了次正规子群对群的 n-可解性及其群的有限性的影响。

本文中记号与术语是标准的,参见文献[11]。

1　预备知识

定义 1　称群 G 中的元素 x 与 y 是 n-可交换的,如果 $(xy)^n=x^ny^n$, $(yx)^n=y^nx^n$。特别地,如果任取 G 中的 2 个元 x,y 都有 $(xy)^n=x^ny^n$,则称群 G 为 n-交换群。

关于 n-交换群,在文献[3]中给出了如下结构。

引理 1[3]　设 G 是 n-交换群,则 $G=G_n\times G_{1-n}\times G_{P_{n(1-n)}}$,其中 $G_{P_{n(1-n)}}$ 是交换群。

定义 2　设 G 为群,$x,y\in G$ 及整数 n,定义元素 x、y 的 n-换位子为 $(x^ny^n)^{-1}(xy)^n$,记作 $[x,y;n]$。

显然,如果对任意的 $x,y\in G$ 的 n-换位子 $[x,y;n]=1$,则 G 是 n-交换群。

定义 3　设 G 为群,n 为整数,称 $[G,G;n]=\langle[x,y;n]\mid x,y\in G\rangle$ 为群 G 的 n-换位子群,简称为 n-导群。

性质 1　设 G 为群,H 为 G 的交换子群。如果 $|G:H|=n$,则 G 为 n-交换群。

证明　因为 $|G:H|=n$,令 $\Omega=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 为 G 在 H 中右陪集的一组代表元,则对于任意 $g\in G$,G 在 H 上的转移

$$V_{G\to H}(g)=\prod_{i=1}^{n}x_ig(x_{i^{\tau(g)}})^{-1}=g^n,$$

其中 $\tau(g)\in\sum_n$, $x_ig(x_{i^{\tau(g)}})^{-1}\in H$。对任意 $g_1,g_2\in G$,一方面 $V_{G\to H}(g_1g_2)=(g_1g_2)^n$;另一方面,转移 $V_{G\to H}$ 为群同态,于是

$$V_{G\to H}(g_1g_2)=V_{G\to H}(g_1)V_{G\to H}(g_2)=(g_1)^n(g_2)^n,$$

即 $(g_1g_2)^n=(g_1)^n(g_2)^n$。从而 G 为 n-交换群。

注 1　n-交换群的子群不一定正规。

例如取 $G=\{\rho^0=1,\rho^1,\rho^2,\rho^3,\varepsilon,\varepsilon\rho^1,\varepsilon\rho^2,\varepsilon\rho^3\}$ 为 8 阶二面体群,易验证 G 为 2-交换群,但 $H=\langle\varepsilon\rangle\not\lhd G$。

定义 4　归纳地定义

$$G=G^{(0;n)},G^{(1;n)}=[G,G;n],\cdots,G^{(i+1;n)}=[G^{(i;n)},G^{(i;n)};n],$$

若存在正整数 k 使

$$G=G^{(0;n)}>G^{(1;n)}>\cdots>G^{(k;n)}>G^{(k+1;n)}=1,\tag{1}$$

则称 G 为 n-可解群,称(1)为 G 的 n-导列。

关于 n-可解群,在文献[3]也给出了如下结构。

引理 2[3]　设 G 是 n-可解群,则 $G=G_nG_{1-n}G_{P_{n(1-n)}}$,其中 $G_{P_{n(1-n)}}$ 是可解群。

注 2　n-可解单群不一定为素数阶循环群。

事实上,设 G 是 n-可解单群,由于 $G^{(1,n)}\trianglelefteq G$ 知,$G^{(1,n)}=1$,G 是 n-交换群。由引理 1 可以看出,$G=G_n$ 或 G_{1-n} 或 $G_{P_{n(1-n)}}$。如果 $G=G_{P_{n(1-n)}}$,由于 $G_{P_{n(1-n)}}$ 是交换群,因此 G 是素数阶循环群。如果 $G=G_n$,则 G 不一定为素数阶循环群。

例如取 $G=A_5$, $n=30$。因为 $\exp(A_5)=30$,则 $G^{(1,30)}=[G,G;30]=1$。A_5 是 30-交换的,当然 A_5 是 30-可

解的单群,但 A_5 不是素数阶循环群。

定义 5 称一个群列 $1=G_0 \lhd G_1 \lhd \cdots \lhd G_t=G$ 为合成群列,如果因子群 G_i/G_{i-1} 是单群($i=1,2,\cdots,t$)。

引理 3[3] (1) n-可解群的子群和商群都是 n-可解群;

(2) 设 M 和 G/M 为 n-可解群,则 G 是 n-可解群;

(3) 设 G 为群,则 G 是 n-可解群当且仅当 G 有合成列 $G=J_0 \rhd J_1 \rhd \cdots \rhd J_r=1$,使得因子群 J_{i-1}/J_i 为 n-交换群($i=1,2,\cdots,r$)。

性质 2 设 G 是可解群,则 G 是 n-可解群。但反之不对。

证明 因为 G 是可解当且仅当 G 有合成列 $G=J_0 \rhd J_1 \rhd \cdots \rhd J_r=1$,使得合成因子 J_{i-1}/J_i 为素数阶循环群($i=1,2,\cdots,r$)。显然循环群是 n-交换的,由引理 3(3)知,G 是 n-可解群。反之取 $G=A_5$, $n=30$,则 G 是 30-可解的,但 A_5 不可解。

定义 6 设 G 为群,称

$$\begin{aligned} Z(G;n) &= \{z \in G \mid (zg)^n = z^n g^n \text{ 且 } (gz)^n = g^n z^n, \text{任意 } g \in G\} \\ &= \{z \in G \mid [z,g;n] = 1 = [g,z;n], \text{任意 } g \in G\} \end{aligned}$$

为 G 的 n-中心。

定义 7 设 G 为群,归纳地定义 $1=Z_0(G;n)$, $Z_{i+1}(G;n)/Z_i(G;n)=Z(G/Z_i(G;n);n)$,其中 i 为正整数,于是

$$1=Z_0(G;n) \leqslant Z_1(G;n) \leqslant \cdots \leqslant Z_i(G;n) \leqslant \cdots \tag{2}$$

称式(2)为 G 的上 n-中心列。进一步地,如果存在正整数 m,使得

$$1=Z_0(G;n) \leqslant Z_1(G;n) \leqslant \cdots \leqslant Z_m(G;n)=G, \tag{3}$$

则称 G 为 n-幂零群。

引理 4[3] (1) n-幂零群的子群和商群都是 n-幂零群;

(2) n-幂零群是 n-可解群;

(3) 设 G 是 n-幂零群,则 $G=G_n \times G_{1-n} \times G_{P_{n(1-n)}}$,其中 $G_{P_{n(1-n)}}$ 是幂零群。

引理 5[11] 设 G 有合成列,如果 $H \lhd\lhd G$, $K \lhd\lhd G$,则 $\langle H,K \rangle \lhd\lhd G$。

定义 8 设 G 有合成列,$H \lhd\lhd G$,$\mathbf{F}(G,H)$ 表示 G 在 H 上的所有合成因子的集合,其中相同类型的合成因子认为是相同的,即 $\mathbf{F}(G,H)$ 中任意 2 个合成因子均不同构。

引理 6[11] 设 G 有合成列,H,K 为 G 的子群,且 $K \leqslant H$,如果 $H \lhd\lhd G$, $K \lhd\lhd H$,则 $\mathbf{F}(G,K)=\mathbf{F}(G,H) \cup \mathbf{F}(H,K)$。

引理 7[11] 设 G 有合成列,$H \lhd\lhd G$, $K \lhd\lhd G$,则 $\mathbf{F}(H,H \cap K)=\mathbf{F}(\langle H,K \rangle,K)$。

定义 9 设 $H \lhd\lhd G$,则存在最小的正整数 t,使得

$$G=J_0 \rhd J_1 \rhd \cdots \rhd J_t=H, \tag{4}$$

其中 $J_i=H^{J_{i-1}}$($i=1,2,\cdots,t$)是 H 在 J_{i-1} 中的正规闭包,称式(4)为从 G 到 H 的标准列,并称正整数 t 为 H 在 G 中的亏。

引理 8[11] 设 $H \lhd\lhd G$,且 $H \leqslant L \leqslant G$,则 H 在 L 中的亏不超过 H 在 G 中的亏。

2 主要定理的证明

定理 1 设 G 为有限群且 $G_{P_{n(1-n)}} \neq 1$,如果 G 的所有非 n-幂零真子群皆次正规且 n-可解,则 G 为 n-可解群。

证明 设 G 为极小阶反例。如果 G 的极大子群都是 n-幂零的,则 G 是内 n-幂零群。因为 $G_{P_{n(1-n)}} \neq 1$,所以存在素数 p,使得 $p \mid |G|$ 且 $(p,n(1-n))=1$。设 P 是 G 的任意 p-子群且 $P \neq 1$,考虑 $N_G(P)$。

若存在 G 的 p-子群 P 使得 $N_G(P)=G$,则 $P \lhd G$。如果 P 是 G 的 Sylow p-子群,通过 Schur Zassenhaus 定理知,则 G 存在 p-补 M 使得

$$G/P \cong M。$$

因为 M 是 G 的真子群，所以 M 是 n-幂零群，当然是 n-可解群。由引理 3(2) 和性质 2 知，G 是 n-可解群，矛盾。所以 P 不是 G 的 Sylow p-子群，记 $\overline{G}=G/P$，则$\overline{G}_{P_{n(1-n)}}\neq 1$。如果 $\overline{G}$ 为 n-幂零群，由引理 4(2) 知，$\overline{G}$ 为 n-可解群，推出 G 为 n-可解群，矛盾。于是 $\overline{G}$ 不是 n-幂零群。由引理 4(1) 知，$\overline{G}$ 为内 n-幂零群，且$\overline{G}_{P_{n(1-n)}}\neq 1$。又因为$|\overline{G}|<|G|$且 $\overline{G}$ 满足定理的条件，所以 $\overline{G}$ 为 n-可解，推出 G 为 n-可解群，矛盾。对每个 $P\neq 1$ 都有 $N_G(P)<G$，注意到 G 是内 n-幂零群，于是 $N_G(P)$ 为 n-幂零群。由引理 4(3) 知，

$$N_G(P)=N_G(P)_n\times N_G(P)_{1-n}\times N_G(P)_{P_{n(1-n)}},$$

其中 $N_G(P)_{P_{n(1-n)}}$ 是幂零群。记 $N_G(P)_p$ 是 $N_G(P)$ 的 Sylow p-子群，由于 p 和 $n(1-n)$ 互素，所以 $N_G(P)_p$ 是 $N_G(P)_{P_{n(1-n)}}$ 的 Sylow p-子群。通过 $N_G(P)_{P_{n(1-n)}}$ 的幂零性，令

$$N_G(P)_{P_{n(1-n)}}=N_G(P)_p\times H,$$

于是

$$N_G(P)=N_G(P)_n\times N_G(P)_{1-n}\times N_G(P)_p\times H,$$

故 $N_G(P)$ 有正规 p-补 H。得到对每个 $P\neq 1$ 都有 $N_G(P)$ 有正规 p-补，再由 Frobenius 定理得到 G 有正规 p-补 K 使得

$$G/K\cong G_p,$$

其中 $G_p\in \mathrm{Syl}_P(G)$。因为 $K<G$，再次注意到 G 是内 n-幂零群，所以 K 是 n-幂零群，当然 K 是 n-可解，推出 G 为 n-可解群，矛盾。故一定存在 G 的极大子群 M 为非 n-幂零群。由假设知 M 次正规于 G 且 n-可解，首先由 M 的极大性可得 $M\lhd G$，于是 G/M 为素数阶循环群，进而 G/M 可解，性质 2 推出 G/M 也是 n-可解，又因为 M 是 n-可解，所以 G 为 n-可解群，一个最终的矛盾。

综上，极小阶反例不存在，故 G 为 n-可解群。

定理 2　设 G 有合成列，如果 H,K 为 G 的次正规 n-可解子群，则$\langle H,K\rangle$是 G 的次正规 n-可解子群。

证明　因为 G 有合成列，且 H,K 为 G 的次正规子群，所以可设 H,K 的合成列分别为：

$$1=H_0\lhd H_1\lhd\cdots\lhd H_t=H,$$
$$1=K_0\lhd K_1\lhd\cdots\lhd K_r=K,$$

其中 $H_i/H_{i-1}, K_j/K_{j-1}$ 为单群($i=1,\cdots,t$; $j=1,\cdots,r$)。通过引理 6、7，有

$$\begin{aligned}\mathbf{F}(\langle H,K\rangle,1)&=\mathbf{F}(\langle H,K\rangle,K)\cup\mathbf{F}(K,1)\\&=\mathbf{F}(H,H\cap K)\cup\mathbf{F}(K,1)。\end{aligned}$$

注意到 $\mathbf{F}(H\cap K,1)\subseteq\mathbf{F}(K,1)$，于是

$$\begin{aligned}&\mathbf{F}(H,H\cap K)\cup\mathbf{F}(K,1)\\=&\mathbf{F}(H,H\cap K)\cup\mathbf{F}(H\cap K,1)\cup\mathbf{F}(K,1)\\=&\mathbf{F}(H,1)\cup\mathbf{F}(K,1),\end{aligned}$$

故

$$\mathbf{F}(\langle H,K\rangle,1)=\mathbf{F}(H,1)\cup\mathbf{F}(K,1)。\tag{5}$$

由引理 5 知，$\langle H,K\rangle\lhd\lhd G$。下证$\langle H,K\rangle$为 n-可解群。令$\langle H,K\rangle$的合成列为

$$1=T_0\lhd T_1\lhd\cdots\lhd T_s=\langle H,K\rangle,$$

其中 T_i/T_{i-1} 为单群($i=1,2,\cdots,s$)。因为 H,K 为 G 的 n-可解子群，所以 H_i/H_{i-1} 和 K_j/K_{j-1} 均为 n-交换。由式(5)知，T_i/T_{i-1} 属于 $\mathbf{F}(H,1)$ 或属于 $\mathbf{F}(K,1)$，于是 T_i/T_{i-1} 也为 n-交换($i=1,2,\cdots,s$)，故通过引理 3，$\langle H,K\rangle$ 为 n-可解群，从而$\langle H,K\rangle$是 G 的次正规 n-可解子群。

作为定理 2 的直接结果，得到以下推论。

推论 1　设 G 为有限群，如果 H,K 为 G 的正规 n-可解子群，则$\langle H,K\rangle=HK$ 也为 G 的有限正规 n-可解子群。

定理 3　设 $G=\langle H,K\rangle$，H,K 为 G 的有限 n-可解子群，如果 $H\lhd\lhd G$，则 G 为有限 n-可解群。

证明　因为 $H\lhd\lhd G$，可设 H 是 G 的真子群，并且存在从 G 到 H 的标准列

$$G=J_0\rhd J_1\rhd\cdots\rhd J_t=H,$$

其中 t 为 H 在 G 中的亏。显然 $t\geqslant 1$，下面对 H 在 G 中的亏 t 进行归纳。

首先证明 J_1 是有限 n-可解群。事实上,当 $t=1$ 时,显然 $H \lhd G$,又 $K \leqslant G$,则 $G=HK$。这样

$$G/H \cong K/H \cap K$$

且 H,K 为有限 n-可解群,故 G 为有限 n-可解群。

下设 $t>1$(即 H 不正规 G),假设亏小于 t 时结论成立,即 G 中存在一个子群 M,并且 M 满足题设条件,使得 $H \lhd \lhd M$。如果 H 在 M 中的亏小于 t,则 M 是 n-可解群。$J_1=H^G$,断言 $J_1=\langle H^k \mid k \in K\rangle$。事实上,记 $L=\langle H^k \mid k \in K\rangle$,显然 $L \leqslant J_1$。因为

$$\langle H,K\rangle \leqslant \langle L,K\rangle \leqslant G,$$

所以 $G=\langle L,K\rangle$。对任意 $g \in G$,令

$$g=l_1k_1l_2k_2\cdots l_sk_s,$$

其中 $l_i \in L,\ k_i \in K(i=1,2,\cdots,s)$,于是

$$L^g=L^{l_1k_1l_2k_2\cdots l_sk_s}=L,$$

即 $L \lhd G$。由正规闭包的定义知,$J_1 \leqslant L$,故 $J_1=\langle H^k \mid k \in K\rangle$。

注意到 $H \lhd \lhd J_1$,因此 H 在 J_1 中的亏小于 t。又因为 K 是有限群,且 K 不是 $N_G(H)$ 的子群,所以令

$$\{H^k \mid k \in K\}=\{H=H^{k_1},H^{k_2},\cdots,H^{k_r}\},$$

其中 k_i 不属于 $N_G(H)(i=2,3,\cdots,r)$。记 $K_2=\langle H,H^{k_2}\rangle$,显然 $H \lhd \lhd K_2$,且由引理8知 H 在 K_2 中的亏小于 t。进一步地,H 和 H^{k_2} 为有限 n-可解群,由归纳假设知,K_2 为有限 n-可解群。再令 $K_3=\langle K_2,H^{k_3}\rangle$,显然 $H \lhd \lhd K_3$,且由引理8知 H 在 K_3 中的亏小于 t。进一步地,K_2 和 H^{k_3} 为有限 n-可解群,再由归纳假设知,K_3 为有限 n-可解群。以此类推,所以 J_1 为有限 n-可解群。

当亏等于 t 时,则 $G=H^GK=J_1K$。又因为 J_1 和 K 为有限 n-可解群且

$$G/J_1 \cong K/J_1 \cap K,$$

所以 G 为有限 n-可解群。故由归纳原理知定理3成立。

作为定理3的直接结果,得到以下推论。

推论 2 设 $G=\langle H,K\rangle$,H,K 为 G 的两个有限 n-可解子群,如果 $H \trianglelefteq G$,则 G 为有限 n-可解群。

参考文献:

[1] HAWTHORN I, GUO Y. Arbitrary functions in group theory[J]. New Zealand Journal of Mathematics, 2015, 45(1):1-9.

[2] POTT A. Finite geometry and character theory[M]. Berlin: Springer, 1995.

[3] BAER R. Factorization of n-soluble and n-nilpotent groups[J]. Proceedings of the American Mathematical Society, 1953, 4: 15-26.

[4] HAWTHORN I. Nil series from arbitrary functions in group theory[J]. Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, 2018, 59(1):1-13.

[5] 姜久亮. 关于 n-可解群与 n-幂零群的两个结果[J]. 数学杂志,1997, 17(4):445-449.
JIANG Jiuliang. Two results of n-soluble group and n-nilpotent group[J]. Journal of Mathematics (PRC), 1997, 17(4):445-449.

[6] WIELANDT H. Über Produkte von nilpotenten gruppen[J]. Illinois Journal of Mathematics, 1958, 2:611-618.

[7] 徐明曜. 有限群导引(上)[M]. 北京:科学出版社,2001.
XU Mingyao. Finite groups: an introduction[M]. Beijing: Science Press, 2001.

[8] BEIDLEMAN J, HEINEKEN H. Finite soluble groups whose subnormal subgroups permute with certain classes of subgroups [J]. Journal of Group Theory, 2003, 6(2):139-158.

[9] CHEN Chanchan, LU Jiakuan, LI Jinbao. Finite groups whose subgroups of even order are TI-subgroups or subnormal subgroups[J]. Advances in Mathematics, 2023, 52(5):883-886.

[10] SHI Jiantao. Finite groups in which every non-abelian subgroup is a TI-subgroup or a subnormal subgroup[J]. Journal of Algebra and Its Applications, 2019, 18(8):1950159.

[11] ROSE J S. A course on group theory[M]. London: Cambridge University Press, 1978.

(编辑:陈丽萍)