山东大学学报(理学版)2025 年 11 月 第 60 卷 第 11 期
Journal of Shandong University(*Natural Science*), Vol.60, No.11, 2025 http://lxbwk.njournal.sdu.edu.cn

文章编号:1671-9352(2025)11-0148-05 DOI:10.6040/j.issn.1671-9352.0.2023.549

Gorenstein $\widetilde{\mathscr{B}}$-内射复形的刻画

李奇辉,杨刚*
(兰州交通大学数理学院, 甘肃 兰州 730070)

摘要:$\widetilde{\mathscr{B}}$表示所有$\mathscr{B}$-复形构成的类,$\mathscr{B}$表示包含所有内射 R-模的模类,设 N 是复形,证明 N 是 Gorenstein $\widetilde{\mathscr{B}}$-内射复形当且仅当对任意的整数 i,N_i 是 Gorenstein $\mathscr{B}$-内射模,并且对$\widetilde{\mathscr{B}}$-复形 B,$\mathrm{Hom}(B,N)$是正合的。

关键词:Gorenstein $\widetilde{\mathscr{B}}$-内射复形;Gorenstein $\mathscr{B}$-内射模;复形

中图分类号:O154.2 **文献标志码**:A

引用格式:李奇辉,杨刚. Gorenstein $\widetilde{\mathscr{B}}$-内射复形的刻画[J]. 山东大学学报(理学版),2025,60(11):148-152,158.

Characterizations of Gorenstein $\widetilde{\mathscr{B}}$-injective complexes

LI Qihui, YANG Gang*
(School of Mathematics and Physics, Lanzhou Jiaotong University, Lanzhou 730070, Gansu, China)

Abstract: $\widetilde{\mathscr{B}}$ denotes the class of all $\mathscr{B}$-complexes, and $\mathscr{B}$ denotes a class of modules which contains all injective R-modules. It is proved that N is a Gorenstein $\widetilde{\mathscr{B}}$-injective complex if and only if N_i is a Gorenstein $\mathscr{B}$-injective module for each $i \in \mathbf{Z}$ and $\mathrm{Hom}(B,N)$ is exact for any $\mathscr{B}$-complex B.

Key words: Gorenstein $\widetilde{\mathscr{B}}$-injective complexes; Gorenstein $\widetilde{\mathscr{B}}$-injective modules; complexes

1 引言及预备知识

文献[1-2]引入 Gorenstein 内射模,Gorenstein 投射模和 Gorenstein 平坦模,之后这些同调模受到了广泛的研究,发展成 Gorenstein 同调代数。文献[3]刻画 Ding-Chen 环上的 Ding-投射模和 Ding-内射模,并且研究 Ding-投射复形和 Ding-内射复形的相关性质;文献[4]引入 Gorenstein $\mathscr{B}$-内射模与 Gorenstein $\mathscr{B}$-投射模的概念,其中 $\mathscr{B}$ 是包含所有内射模的 R-模类。

受上述研究的启发,本文引入 Gorenstein $\widetilde{\mathscr{B}}$-内射复形的概念,证明复形 N 是 Gorenstein $\widetilde{\mathscr{B}}$-内射复形当且仅当对任意的整数 i,N_i 是 Gorenstein $\mathscr{B}$-内射模,并且对 $\mathscr{B}$-复形 B,$\mathrm{Hom}(B,N)$是正合的。

本文中,R 是有单位元的结合环,R-Mod 是左 R-模范畴,$\mathscr{B}$是包含所有内射模类的 R-模类,$\mathrm{Ch}(R)$是 R-模的复形范畴,下面定义由 Gillespie 和 Iacob 给出。

定义 1[4] 称 R-模的复形 X 是 $\mathrm{Hom}(\mathscr{B},\cdot)$-零调的,如果 $B \in \mathscr{B}$,$\mathrm{Hom}(B,X)$是阿贝尔群的正合复形。若 X 自身也是正合的,则称 X 是正合 $\mathrm{Hom}(\mathscr{B},\cdot)$-零调复形。称 R-模 N 是 Gorenstein $\mathscr{B}$-内射的,如果存在内射 R-模的正合 $\mathrm{Hom}(\mathscr{B},\cdot)$-零调复形 E 使得 $N=Z_0E$,并且把由所有 Gorenstein $\mathscr{B}$-内射模构成的类记为 $\mathscr{GI}_B$。

收稿日期:2023-12-29; **网络出版时间**:2024-09-25 16:16:29
基金项目:国家自然科学基金资助项目(12161049); 兰州交通大学研究生教育改革项目(JG202319)
第一作者:李奇辉(1998—),男,硕士研究生,研究方向为同调代数. E-mail:lqh3499@yeah.net
*__通信作者__:杨刚(1980—),男,教授,硕士生导师,博士,研究方向为同调代数. E-mail:yanggang@mail.lzjtu.cn

令

$$X=:\cdots\longrightarrow X_{i+1}\xrightarrow{\delta_{i+1}}X_i\xrightarrow{\delta_i}X_{i-1}\longrightarrow\cdots$$

是 R-模的复形，m 是整数，则复形第 m 层次的循环是 $\mathrm{Ker}(\delta_m)$，记为 Z_mX；第 m 层次的边缘是 $\mathrm{Im}(\delta_{m+1})$，记为 B_mX；第 m 层次的同调为 $H_m(X)=Z_mX/B_mX$。称复形 X 是正合（零调）的，如果 $i\in\mathbf{Z}$，都有 $H_i(X)=0$。令 K 是左 R-模。以 $D^i(K)$ 表示复形 $\cdots\to0\to K\xrightarrow{id}K\to0\to\cdots$，其中第 i 和 $i-1$ 层次是左 R-模 K，其余层次均为零；$S^i(K)$ 表示复形 $\cdots\to0\to K\to0\to\cdots$，其中第 i 层次是左 R-模 K，其余层次均为零。称复形 X 是上有界复形，如果 $i\gg0$，有 $X_i=0$；称复形 X 是下有界复形，如果 $i\ll0$，有 $X_i=0$；称复形 X 是有界复形，如果 X 不仅是上有界复形也是下有界复形，即 $|i|\gg0$，有 $X_i=0$。

令 X 和 Y 是复形，则复形态射 $\alpha:X\to Y$ 是指 R-模同态的序列 $(\alpha_n)_{n\in\mathbf{Z}}$，其中 $\alpha_n:X_n\to Y_n$，使得 $n\in\mathbf{Z}$ 都有 $\alpha_{n-1}\delta_n^X=\delta_n^Y\alpha_n$。称态射 $\alpha:X\to Y$ 是零伦的，如果存在 $s_i:X_i\to Y_{i+1}$ 使得 $i\in\mathbf{Z}$，有 $f_i=\delta_{i+1}^Ys_i+s_{i-1}\delta_i^X$。以 $\mathrm{Hom}_R(X,Y)$ 表示阿贝尔群的复形，其中第 m 层次是

$$\mathrm{Hom}_R(X,Y)_m=\prod_{i\in\mathbf{Z}}\mathrm{Hom}_R(X_i,Y_{i+m}),$$

微分是

$$(\delta(g))_i=\delta_{i+m}^Yg_i-(-1)^mg_{i-1}\delta_i^X。$$

2　Gorenstein $\widetilde{\mathscr{B}}$-内射复形

称复形 B 是 $\mathscr{B}$-复形，如果它正合且 $Z_nB\in\mathscr{B}$，以下把所有 $\mathscr{B}$-复形构成的类记做 $\widetilde{\mathscr{B}}$。

定义 2　称复形 N 是 Gorenstein $\widetilde{\mathscr{B}}$-内射的，如果存在内射复形的正合序列

$$\cdots\to E_1\to E_0\to E^0\to E^1\to\cdots$$

使得 $N\cong\mathrm{Ker}(E^0\to E^1)$，并且对 $\mathscr{B}$-复形 B，函子 $\mathrm{Hom}(B,-)$ 作用后仍然得到正合序列。

引理 1　若 N 是 Gorenstein $\widetilde{\mathscr{B}}$-内射复形，则对 $n\geqslant1$ 和 $\mathscr{B}$-复形 B，都有 $\mathrm{Ext}^n(B,N)=0$。

证明　由 Gorenstein $\widetilde{\mathscr{B}}$-内射复形的定义可知，存在正合序列

$$0\to N\to E^0\to E^1\to\cdots$$

使得对 $i\geqslant0$，E^i 是内射的，并且对 $\mathscr{B}$-复形 B，函子 $\mathrm{Hom}(B,-)$ 作用之后仍然得到正合序列。故对 $n\geqslant1$，有 $\mathrm{Ext}^n(B,N)=0$。

引理 2　若 N 是 Gorenstein $\widetilde{\mathscr{B}}$-内射复形，则对 $i\in\mathbf{Z}$，N_i 是 Gorenstein $\mathscr{B}$-内射模。

证明　因为 N 是 Gorenstein $\widetilde{\mathscr{B}}$-内射复形，所以存在内射复形的正合序列

$$\cdots\to E_1\to E_0\to E^0\to E^1\to\cdots$$

使得 $N\cong\mathrm{Ker}(E^0\to E^1)$，并且对 $\mathscr{B}$-复形 B，函子 $\mathrm{Hom}(B,-)$ 作用之后仍然得到正合序列。进而有上行正合的交换图：

$$\begin{array}{ccccccc}\cdots\longrightarrow & \mathrm{Hom}(D^i(X),E_1) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(D^i(X),E_0) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(D^i(X),E^0) & \longrightarrow\cdots\\ & \cong\downarrow & & \cong\downarrow & & \cong\downarrow & \\ \cdots\longrightarrow & \mathrm{Hom}(X,(E_1)_i) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(X,(E_0)_i) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(X,(E^0)_i) & \longrightarrow\cdots\end{array}$$

其中 $i\in\mathbf{Z}$，$X\in\mathscr{B}$。又因为垂直的映射是同构的[5]，所以下行也是正合的，故对 $X\in\mathscr{B}$，内射模的正合列

$$\cdots\to(E_1)_i\to(E_0)_i\to(E^0)_i\to(E^1)_i\to\cdots$$

被函子 $\mathrm{Hom}(X,-)$ 作用后仍然得到正合序列。显然，$N_i\cong\mathrm{Ker}((E^0)_i\to(E^1)_i)$，即 N_i 是 Gorenstein $\mathscr{B}$-内射模。

引理 3　令 N 是 Gorenstein $\mathscr{B}$-内射模的复形，则对 $\mathscr{B}$-复形 B，$\mathrm{Hom}(B,N)$ 是正合的当且仅当 $\mathrm{Ext}^1(B,N)=0$。

证明　由文献[5]中引理 2.1 即可证明。

引理 4　令 $0\to M\xrightarrow{f}N\xrightarrow{g}L\to0$ 是 R-模的短正合列，若 L,N 是 Gorenstein $\mathscr{B}$-内射模，则 M 是 Gorenstein $\mathscr{B}$-内射模当且仅当对 $B\in\mathscr{B}$ 有 $\mathrm{Ext}^1(B,M)=0$。

证明 必要性显然成立。

下证充分性。若 L,N 是 Gorenstein $\mathscr{B}$-内射模,并且对 $B\in\mathscr{B}$ 有 $\mathrm{Ext}^1(B,M)=0$,则存在模的正合列

$$\mathscr{N}=:\cdots\to I_1\to I_0\to N\to 0,$$

$$\mathscr{L}=:\cdots\to E_1\to E_0\to L\to 0,$$

其中对 $i\in\mathbf{Z}$,I_i 与 E_i 是内射模,并且对 $B\in\mathscr{B}$,函子 $\mathrm{Hom}(B,-)$ 作用后仍然得到正合序列。注意到 $\mathscr{B}$ 是包含所有内射模的类,易知模同态 $g:N\to L$ 可以诱导出复形同态 $\alpha:\mathscr{N}\to\mathscr{L}$。若令 $\mathscr{C}$ 是 α 的映射锥,则 $\mathscr{C}$ 是正合复形,并且对 $B\in\mathscr{B}$,函子 $\mathrm{Hom}(B,-)$ 作用 $\mathscr{C}$ 后仍然得到正合序列。考虑交换图

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{M}=:\cdots \arrow[r] & I_0\oplus E_1 \arrow[r] \arrow[d, equal] & K \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
\mathscr{C}=:\cdots \arrow[r] & I_0\oplus E_1 \arrow[r] \arrow[d] & N\oplus E_0 \arrow[r] \arrow[d] & L \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
\mathscr{D}=:\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & L \arrow[r, equal] & L \arrow[r] & 0,
\end{tikzcd}$$

其中 $K=\mathrm{Ker}(N\oplus E_0\to L)$,显然序列 $0\to\mathscr{M}\to\mathscr{C}\to\mathscr{D}\to 0$ 是正合的。因为 $\mathscr{C}$ 与 $\mathscr{D}$ 均正合,并且对于 $B\in\mathscr{B}$,函子 $\mathrm{Hom}(B,-)$ 作用后仍然得到正合序列,所以 $\mathscr{M}$ 也正合,并且函子 $\mathrm{Hom}(B,-)$ 作用后仍然得到正合序列。易知,存在同态 $h:M\to K$ 使得下图交换:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & N \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\rho"'] & L \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & K \arrow[r] & N\oplus E_0 \arrow[r] & L \arrow[r] & 0,
\end{tikzcd}$$

其中 $\rho:N\to N\oplus E_0$ 是典范嵌入。由短五引理知,h 是单的,进而知 $\mathrm{Coker}(h)\cong\mathrm{Coker}(\rho)=E_0$,因此 R-模序列 $0\to M\to K\to E_0\to 0$ 是正合的。此外,由假设知 $\mathrm{Ext}^1(E_0,M)=0$,故该正合列可裂,即 $K\cong E_0\oplus M$。另一方面,由维数转移可知,对 $B\in\mathscr{B}$, $i\geqslant 1$ 有 $\mathrm{Ext}^i(B,M)=0$,并且 $\mathrm{Ext}^i(B,K)\cong\mathrm{Ext}^i(B,E_0\oplus M)=0$。因此,对 $B\in\mathscr{B}$,函子 $\mathrm{Hom}(B,-)$ 作用 K 的内射分解:

$$\mathscr{K}=:0\to K\to I^0\to I^1\to\cdots$$

后仍然得到正合序列。结合 $\mathscr{M}$ 与 $\mathscr{K}$ 可得 K 的完全内射分解,并且 $K\cong E_0\oplus M$ 是 Gorenstein $\mathscr{B}$-内射模。由文献[4]中引理 19 可知,M 是 Gorenstein $\mathscr{B}$-内射模。

引理 5 令 $\to N\to E\xrightarrow{f}M\to 0$ 是 R-模的短正合列,若 M,N 是 Gorenstein $\mathscr{B}$-内射模,E 是内射模,则对于任意同态 $f':E'\to M$ 有 $\mathrm{Ker}(\alpha)$ 是 Gorenstein $\mathscr{B}$-内射模,其中 E' 是内射模,$\alpha=(f,f'):E\oplus E'\to M$ via $(x,y)\mapsto f(x)+f'(x)$, $x\in E$, $y\in E'$。

证明 设 $g:B\to M$ 是 R-模同态,其中 $B\in\mathscr{B}$,则存在 R-模同态 $h:B\to E$ 使得 $g=fh$。现假设 R-模同态 $f':E'\to M$,其中 E' 是内射模。显然序列

$$0\to\mathrm{Ker}(\alpha)\to E\oplus E'\xrightarrow{\alpha}M\to 0$$

是正合的。定义 R-模同态 $\bar{h}:B\to E\oplus E'$, $\bar{h}(x)=(h(x),0)$, $x\in B$,则 $\alpha\bar{h}=g$。由正合序列

$$\mathrm{Hom}(B,E\oplus E')\to\mathrm{Hom}(B,M)\to\mathrm{Ext}^1(B,\mathrm{Ker}(\alpha))\to\mathrm{Ext}^1(B,E\oplus E')=0$$

可得,$\mathrm{Ext}^1(B,\mathrm{Ker}(\alpha))=0$。因此,由引理 4 可知,$\mathrm{Ker}(\alpha)$ 是 Gorenstein $\mathscr{B}$-内射模。

定理 1 设 N 是复形,则 N 是 Gorenstein $\widetilde{\mathscr{B}}$-内射复形当且仅当对 $i\in\mathbf{Z}$,N_i 是 Gorenstein $\mathscr{B}$-内射模,并且对 $\mathscr{B}$-复形 B,$\mathrm{Hom}(B,N)$ 是正合的。

证明 必要性由引理 1—3 即可证明。

下证充分性。由于对 $i\in\mathbf{Z}$,N_i 是 Gorenstein $\mathscr{B}$-内射模,则存在 R-模的短正合列

$$0\to M_i\to X_i\xrightarrow{f_i}N_i\to 0,$$

其中 X_i 是内射模,M_i 是 Gorenstein $\mathscr{B}$-内射模。令

$$E_0=:\cdots\longrightarrow E_{i+1}\xrightarrow{\delta_{i+1}}E_i\xrightarrow{\delta_i}E_{i-1}\longrightarrow\cdots,$$

其中对任意的整数 $i,E_i=X_{i+1}\oplus X_i$, $\delta_i:E_i\to E_{i-1}$ via $\delta_i(x,y)\mapsto(y,0)$, $(x,y)\in X_{i+1}\oplus X_i$。显然,$E_0$ 是内射复形。诱导出复形的态射 $\alpha=(\alpha_i)_{i\in\mathbf{Z}}:E_0\to N$,如下图:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & X_{i+2}\oplus X_{i+1} \arrow[r, "\delta_{i+1}"] \arrow[d] & X_{i+1}\oplus X_i \arrow[r, "\delta_i"] \arrow[d] & X_i\oplus X_{i-1} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & N_{i+1} \arrow[r, "\delta_{i+1}^N"] & N_i \arrow[r, "\delta_i^N"] & N_{i-1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

即对任意的 $i\in\mathbf{Z}$, $\alpha_i=\begin{pmatrix}\delta_{i+1}^N f_{i+1}\\ f_i\end{pmatrix}$。显然 α 是满的,进而有复形的短正合列

$$0\to K_1\to E_0\xrightarrow{\alpha}N\to 0。$$

由引理 5 可知,对 $i\in\mathbf{Z}$,$(K_1)_i$ 是 Gorenstein $\mathscr{B}$-内射模,因此得到阿贝尔群的序列

$$0\to\mathrm{Hom}(B,K_1)\to\mathrm{Hom}(B,E_0)\to\mathrm{Hom}(B,N)\to 0$$

是正合的,其中 $B\in\widetilde{\mathscr{B}}$。由于 $\mathrm{Hom}(B,E_0)$ 与 $\mathrm{Hom}(B,N)$ 均正合,故 $\mathrm{Hom}(B,K_1)$ 也正合,因此 $\mathrm{Ext}^1(B,K_1)=0$。进而得到了如下正合列

$$0\to\mathrm{Hom}(B,K_1)\to\mathrm{Hom}(B,E_0)\to\mathrm{Hom}(B,N)\to 0。$$

重复上面的步骤,得到复形的正合序列

$$\cdots\to E_1\to E_0\to N\to 0,$$

使得对 $i\geqslant 0$,E_i 是内射的,并且对 $\mathscr{B}$-复形 B,函子 $\mathrm{Hom}(B,-)$ 作用后仍然得到正合序列。做 N 的内射分解

$$0\to N\to E^0\to E^1\to\cdots$$

由文献[4]中引理 20 可知,K_j^i 是 Gorenstein $\mathscr{B}$-内射模,其中 $K^i=\mathrm{Ker}(E^i\to E^{i+1})$, $j\in\mathbf{Z}$, $i\geqslant 0$。易知对 $\mathscr{B}$-复形 B,函子 $\mathrm{Hom}(B,-)$ 作用 N 的内射分解后仍然得到正合序列。综上所述,N 是 Gorenstein $\widetilde{\mathscr{B}}$-内射复形。

令 $\mathscr{C}$ 是 Abel 范畴,称 $\mathscr{C}$ 中对象的类 $\mathscr{X}$ 是投射可解的[6],如果 $\mathscr{X}$ 包含所有投射对象,并且对任意的短正合列 $0\to X'\to X\to X''\to 0$,若 $X''\in\mathscr{X}$,则 $X\in\mathscr{X}$ 当且仅当 $X'\in\mathscr{X}$。对偶地,称 $\mathscr{C}$ 中对象的类 $\mathscr{Y}$ 是内射可解的,如果 $\mathscr{Y}$ 包含所有内射对象,并且对任意的短正合列 $0\to Y'\to Y\to Y''\to 0$,若 $Y'\in\mathscr{X}$,则 $Y\in\mathscr{X}$ 当且仅当 $Y''\in\mathscr{X}$。

推论 1　所有 Gorenstein $\widetilde{\mathscr{B}}$-内射复形构成的类是复形范畴中的内射可解类。

证明　显然任意内射复形是 Gorenstein $\widetilde{\mathscr{B}}$-内射复形。考虑复形的短正合列

$$0\to X\to Y\to Z\to 0,$$

其中 X 是 Gorenstein $\widetilde{\mathscr{B}}$-内射复形。若 Z 是 Gorenstein $\widetilde{\mathscr{B}}$-内射复形,得到阿贝尔群的正合序列

$$0\to\mathrm{Hom}(B,X)\to\mathrm{Hom}(B,Y)\to\mathrm{Hom}(B,Z)\to 0,$$

其中 $B\in\widetilde{\mathscr{B}}$。因为 $\mathrm{Hom}(B,X)$ 与 $\mathrm{Hom}(B,Z)$ 均正合,所以 $\mathrm{Hom}(B,Y)$ 也正合。对于任意的整数 i,存在正合列 $0\to X_i\to Y_i\to Z_i\to 0$,其中 X_i 与 Z_i 都是 Gorenstein $\mathscr{B}$-内射模。由文献[4]中引理 20 可知,Y_i 也是 Gorenstein $\mathscr{B}$-内射模。因此,由定理 1 可知,Y 是 Gorenstein $\widetilde{\mathscr{B}}$-内射复形。

若 Y 是 Gorenstein $\widetilde{\mathscr{B}}$-内射复形,则由文献[4]中引理 20 可得,对于 $i\in\mathbf{Z}$,Z_i 是 Gorenstein $\mathscr{B}$-内射模;对 $B\in\widetilde{\mathscr{B}}$,阿贝尔群的序列

$$0\to\mathrm{Hom}(B,X)\to\mathrm{Hom}(B,Y)\to\mathrm{Hom}(B,Z)\to 0$$

是正合的,并且因为 $\mathrm{Hom}(B,X)$ 与 $\mathrm{Hom}(B,Y)$ 均正合,所以 $\mathrm{Hom}(B,Z)$ 也正合。故由定理 1 可知,Z 也是 Gorenstein $\widetilde{\mathscr{B}}$-内射复形。

命题 1　若 N 是 Gorenstein $\mathscr{B}$-内射模的上有界复形,则 N 是 Gorenstein $\widetilde{\mathscr{B}}$-内射复形。

证明　令

$$N=0\to N_0\to N_{-1}\to N_{-2}\to\cdots$$

其中对任意整数 i、N_i 是 Gorenstein $\mathscr{B}$-内射模。由引理 3 和定理 1 知,只需证对 $B\in\widetilde{\mathscr{B}}$,有 $\mathrm{Ext}^1(B,N)=0$,即

证明 N 关于 B 的扩张 $0\to N\xrightarrow{\mu}X\xrightarrow{\nu}B\to 0$ 可裂。考虑交换图

$$
\begin{tikzcd}
 & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & 0 \arrow[r, "\mu_2"] \arrow[d] & X_2 \arrow[r, "\nu_2"] \arrow[d, "\delta_2^X"'] & B_2 \arrow[r] \arrow[d, "\delta_2^B"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & 0 \arrow[r, "\mu_1"] \arrow[d] & X_1 \arrow[r, "\nu_1"] \arrow[d, "\delta_1^X"'] & B_1 \arrow[r] \arrow[d, "\delta_1^B"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & N_0 \arrow[r, "\mu_0"] \arrow[d, "\delta_0^N"'] & X_0 \arrow[r, "\nu_0"] \arrow[d, "\delta_0^X"'] & B_0 \arrow[r] \arrow[d, "\delta_0^B"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & N_{-1} \arrow[r, "\mu_{-1}"] \arrow[d] & X_{-1} \arrow[r, "\nu_{-1}"] \arrow[d] & B_{-1} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{tikzcd}
$$

因为交换图的行可裂,所以对 $i\in\mathbf{Z}$,存在同态 $f_i:B_i\to X_i$ 使得 $\nu_i f_i=id_{B_i}$。显然对 $i>0$, $f_i=\nu_i^{-1}$ 是同构。因此对 $i>0$, $\delta_{i+1}^X f_{i+1}=f_i\delta_{i+1}^B$。

注意到,当 $i=0$ 时,$\nu_0(\delta_1^X f_1-f_0\delta_1^B)=0$,因此 $\mathrm{Im}(\delta_1^X f_1-f_0\delta_1^B)\subseteq\mathrm{Ker}\,\nu_0=\mathrm{Im}\,\mu_0$,进而存在态射 $g_0:B_1\to N_0$ 使得 $\mu_0 g_0=\delta_1^X f_1-f_0\delta_1^B$。因为 $\mu_0 g_0\delta_2^B=(\delta_1^X f_1-f_0\delta_1^B)\delta_2^B=0$,并且 μ_0 单,所以 $g_0\delta_2^B=0$,即 $\mathrm{Im}\,\delta_2^B\subseteq\mathrm{Ker}\,g_0$,于是由分解引理知存在态射 $g_0':\mathrm{Im}\,\delta_1^B\to N_0$ 使得 $g_0=g_0'\pi_1$,其中 $\pi_1:B_1\to\mathrm{Im}\,\delta_1^B$ 是自然满同态。然后考虑正合列

$$0\to\mathrm{Im}\,\delta_1^B\xrightarrow{\alpha_1}B_0\to\mathrm{Im}\,\delta_0^B\to 0,$$

用函子 $\mathrm{Hom}(-,N_0)$ 作用上述序列后得到正合列

$$0\to\mathrm{Hom}(\mathrm{Im}\,\delta_0^B,N_0)\to\mathrm{Hom}(B_0,N_0)\to\mathrm{Hom}(\mathrm{Im}\,\delta_1^B,N_0)\to\mathrm{Ext}^1(\mathrm{Im}\,\delta_0^B,N_0)=0,$$

因此存在态射 $\omega_0:B_0\to N_0$ 使得 $g_0'=\omega_0\alpha_1$。因为 $\delta_1^B=\alpha_1\pi_1$,所以 $g_0=\omega_0\delta_1^B$。令 $h_0=\mu_0\omega_0+f_0\in\mathrm{Hom}(B_0,X_0)$,则

$$h_0\delta_1^B=(\mu_0\omega_0+f_0)\delta_1^B=\mu_0\omega_0\delta_1^B+f_0\delta_1^B=\delta_1^X f_1,$$

并且

$$\nu_0 h_0=\nu_0(\mu_0\omega_0+f_0)=\nu_0 f_0=id_{B_0}。$$

当 $i+1<0$ 时,重复上面的步骤可以得到 $h_{i+1}=\mu_{i+1}\omega_{i+1}+f_{i+1}\in\mathrm{Hom}(B_{i+1},X_{i+1})$ 使得 $h_{i+1}\delta_{i+2}^B=\delta_{i+2}^X h_{i+2}$, $\nu_{i+1}h_{i+1}=id_{B_{i+1}}$。对于第 i 层次,以下构造 $h_i:B_i\to X_i$。

注意到,$\nu_i(\delta_{i+1}^X h_{i+1}-f_i\delta_{i+1}^B)=0$,因此 $\mathrm{Im}(\delta_{i+1}^X h_{i+1}-f_i\delta_{i+1}^B)\subseteq\mathrm{Ker}\,\nu_i=\mathrm{Im}\,\mu_i$。进而存在态射 $g_i:B_{i+1}\to N_i$ 使得 $\mu_i g_i=\delta_{i+1}^X h_{i+1}-f_i\delta_{i+1}^B$。因为 $\mu_i g_i\delta_{i+2}^B=(\delta_{i+1}^X h_{i+1}-f_i\delta_{i+1}^B)\delta_{i+2}^B=0$,并且 μ_i 单,所以 $g_i\delta_{i+2}^B=0$,即 $\mathrm{Im}\,\delta_{i+2}^B\subseteq\mathrm{Ker}\,g_i$,于是由分解引理知存在态射 $g_i':\mathrm{Im}\,\delta_{i+1}^B\to N_i$ 使得 $g_i=g_i'\pi_{i+1}$,其中 $\pi_{i+1}:B_{i+1}\to\mathrm{Im}\,\delta_{i+1}^B$ 是自然满同态。考虑正合列

$$0\to\mathrm{Im}\,\delta_{i+1}^B\xrightarrow{\alpha_{i+1}}B_i\to\mathrm{Im}\,\delta_i^B\to 0,$$

用函子 $\mathrm{Hom}(-,N_i)$ 作用上述序列后得到正合列

$$0\to\mathrm{Hom}(\mathrm{Im}\,\delta_i^B,N_i)\to\mathrm{Hom}(B_i,N_i)\to\mathrm{Hom}(\mathrm{Im}\,\delta_{i+1}^B,N_i)\to\mathrm{Ext}^1(\mathrm{Im}\,\delta_i^B,N_i)=0,$$

因此存在态射 $\omega_i:B_i\to N_i$ 使得 $g_i'=\omega_i\alpha_{i+1}$,因为 $\delta_{i+1}^B=\alpha_{i+1}\pi_{i+1}$,所以 $g_i=\omega_i\delta_{i+1}^B$。令 $h_i=\mu_i\omega_i+f_i\in\mathrm{Hom}(B_i,X_i)$,则

$$h_i\delta_{i+1}^B=(\mu_i\omega_i+f_i)\delta_{i+1}^B=\mu_i\omega_i\delta_{i+1}^B+f_i\delta_{i+1}^B=\delta_{i+1}^X f_{i+1},$$

并且

$$\nu_i h_i=\nu_i(\mu_i\omega_i+f_i)=\nu_i f_i=id_{B_i}。$$

当 $i>0$ 时,令 $h_i=f_i$,则有复形态射 $h:B\to X$ 使得 $\nu h=1_B$。因此正合列 $0\to N\to X\to B\to 0$ 可裂,即 $\mathrm{Ext}^1(B,N)=0$。

注　令 $\mathscr{B}$ 是由所有 R-模构成的模类,则 $\widetilde{\mathscr{B}}$ 恰好是所有正合复形构成的类,进而由文献[7]中定义 1.1(2)易知 Gorenstein $\widetilde{\mathscr{B}}$-内射复形恰好是 DG-内射复形。若令 $\mathscr{B}$ 是由所有内射 R-模构成的模类,则 $\widetilde{\mathscr{B}}$ 恰好是所有内射复形构成的类,由文献[8]中定义 2.2 易知,Gorenstein $\widetilde{\mathscr{B}}$-内射复形恰好是 Gorenstein-内射复形。

(下转第 158 页)