

算子乘积 AB 及 BA 的 Browder 定理

刘妮,焦红英,王亚利

(空军工程大学基础部,陕西 西安 710051)

摘要:设 \mathcal{H} 为复可分无限维 Hilbert 空间, A, B 为 \mathcal{H} 上的有界线性算子。利用算子分块技巧,证明了算子乘积 AB 满足 Browder 定理当且仅当 BA 满足 Browder 定理,也等价于 $AB \oplus BA$ 满足 Browder 定理。

关键词: Hilbert 空间; Browder 定理; Weyl 定理; 谱

中图分类号: O177.2 **文献标志码:** A

引用格式: 刘妮,焦红英,王亚利. 算子乘积 AB 及 BA 的 Browder 定理[J]. 山东大学学报(理学版), 2025, 60(12): 178-182.

The Browder's theorem of AB and BA

LIU Ni, JIAO Hongying, WANG Yali

(Department of Basic, Air Force Engineering University, Xi'an 710051, Shaanxi, China)

Abstract: Let \mathcal{H} be complex separable Hilbert spaces. Let A, B denote the set of bounded linear operators on \mathcal{H} . By using the method of operator block, the equivalence of Browder's theorem holding for AB and BA is given, which is equivalent to Browder's theorem holding for $AB \oplus BA$.

Key words: Hilbert spaces; Browder's theorem; Weyl's theorem; spectrum

0 引言

设 \mathcal{H} 与 \mathcal{K} 表示无限(可分)复 Hilbert 空间, $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 与 $\mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ 分别表示 Hilbert 空间 \mathcal{H} 上和从 \mathcal{H} 到 \mathcal{K} 上全体有界线性算子之集。对算子 $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$, 分别用 A^* 、 $N(A)$ 、 $R(A)$ 和 $\sigma(A)$ 表示 A 的伴随算子、核空间、值域和谱。记 $n(A) = \dim N(A)$ 为零空间的维数, $d(A) = \dim R(A)^\perp$ 为值域正交补空间维数。设算子 $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$, 若 $R(T)$ 是闭空间且 $N(T)$ 为有限维空间, 则称 T 为左 Fredholm 算子。若 T^* 是左 Fredholm 算子, 则称 T 为右 Fredholm 算子。 T 称为 Fredholm 算子, 如果 T 和 T^* 都是左 Fredholm 算子。记 Fredholm 算子 T 的指标为 $\text{ind}(T) = n(T) - d(T)$ 。若 T 是 Fredholm 算子且 $\text{ind}(T) = 0$, 则称 T 为 Weyl 算子。当 $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ 时, 记 T 的左本质谱、右本质谱和 Weyl 谱为别为

$$\sigma_{le}(T) := \{ \lambda \in \mathbf{C} : T - \lambda I \text{ 不是左 Fredholm 算子} \},$$

$$\sigma_{re}(T) := \{ \lambda \in \mathbf{C} : T - \lambda I \text{ 不是右 Fredholm 算子} \},$$

$$\sigma_w(T) := \{ \lambda \in \mathbf{C} : T - \lambda I \text{ 不是 Weyl 算子} \}.$$

记 $\text{iso } \sigma(T)$ 为 T 的全体孤立谱点之集, 且 $\pi_{00}(T) = \{ \lambda \in \text{iso } \sigma(T) : 0 < n(T - \lambda I) < \infty \}$ 为全体有限重孤立特征值之集。若 $\sigma(T) \setminus \sigma_w(T) \subseteq \pi_{00}(T)$, 则称 $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ 满足 Browder 定理。尤其, 如果 $\sigma(T) \setminus \sigma_w(T) = \pi_{00}(T)$, 则称 T 满足 Weyl 定理。

Weyl 定理指 Hilbert 空间自伴算子的 Weyl 谱恰好等于它的谱集去掉有限重孤立特征值^[1], 许多学者研究了哪些算子类能够满足 Weyl 定理, 满足 Weyl 定理的算子类不断得到扩大^[2-7]。另外, 许多学者尝试利用

不同的谱集提出算子满足 Weyl 型定理的各种判定方法^[8-10]。特别是作为 Weyl 定理的拓广形式, Harte 等^[6]定义并研究了算子的 Browder 定理。本文主要证明算子乘积 AB 满足 Browder 定理当且仅当 BA 满足 Browder 定理,也等价于 $AB \oplus BA$ 满足 Browder 定理。

1 主要结果

为证明本文主要结论,需要下面 2 个引理:

引理 1^[11] 设 $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{H})$ 且 $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{H})$ 则

- (1) $\sigma(AB) \setminus \{0\} = \sigma(BA) \setminus \{0\}$ 且 $\sigma_w(AB) \setminus \{0\} = \sigma_w(BA) \setminus \{0\}$;
- (2) $\sigma_{le}(AB) \setminus \{0\} = \sigma_{le}(BA) \setminus \{0\}$ 且对 $\lambda \in \mathbf{C} \setminus \sigma_{le}(AB)$, 都有 $\text{ind}(AB - \lambda I) = \text{ind}(BA - \lambda I)$;
- (3) $n(AB - \lambda I) = n(BA - \lambda I)$ 且 $d(AB - \lambda I) = d(BA - \lambda I)$ 对 $\lambda \neq 0$ 。

引理 2^[12] 若 $\lambda \notin \sigma_{le}(A) \cap \sigma_{re}(A)$, 则存在 $\delta > 0$, 使得对所有的 $0 < |\mu - \lambda| < \delta$ 都有 $n(A - \mu I)$ 和 $d(A - \mu I)$ 为常值。

定理 1 设 $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{H})$ 且 $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{H})$, 则下面命题等价:

- (a) Browder 定理对对角算子矩阵 $AB \oplus BA: \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ 成立;
- (b) Browder 定理对 AB 成立;
- (c) Browder 定理对 BA 成立;
- (d) Browder 定理对 $M_C := \begin{pmatrix} AB & C \\ 0 & BA \end{pmatrix}: \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ 成立, 其中 $C \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{H})$ 是任意的。

证明 (a) \Rightarrow (b)。设 $\lambda \in \sigma(AB) \setminus \sigma_w(AB)$ 。

情形 1 若 $\lambda \neq 0$, 则 $AB - \lambda I$ 是 Weyl 算子, 但 $AB - \lambda I$ 不可逆, 故 $0 < n(AB - \lambda I) < \infty$ 。由引理 2 可知 $BA - \lambda I$ 是 Weyl 算子, 故 $(AB - \lambda I) \oplus (BA - \lambda I)$ 也是 Weyl 算子。因此, 由 (a) 知 $\lambda \in \text{iso } \sigma(AB \oplus BA)$, 则 $\lambda \in \text{iso } \sigma(AB)$, 又 $0 < n(AB - \lambda I) < \infty$, 从而 $\lambda \in \pi_{00}(AB)$ 。

情形 2 若 $\lambda = 0$, 则 AB 是 Weyl 算子, 但 AB 不可逆, 故 $0 < n(AB) < \infty$ 。需要证明 $0 \in \text{iso } \sigma(AB)$ 。反设 $0 \notin \text{iso } \sigma(AB)$, 则存在非 0 序列 $\{\lambda_m\}_{m=1}^{\infty} \subseteq \sigma(AB)$ 使得 $\lim_{m \rightarrow \infty} \lambda_m = 0$ 。又由于 $0 \in \sigma(AB) \setminus \sigma_w(AB)$, 则由引理 2 知, 存在 $\delta > 0$ 使得对所有的 $0 < |\mu| < \delta$ 都有 $AB - \mu I$ 是 Weyl 算子, 且 $n(AB - \mu I) = d(AB - \mu I)$ 为大于 0 的常数。因此, 当 m_0 充分大时, $0 < |\lambda_{m_0}| < \delta$, 从而

$$\lambda_{m_0} \in \sigma(AB \oplus BA) \setminus \sigma_w(AB \oplus BA) \subseteq \text{iso } \sigma(AB \oplus BA),$$

即有 $\lambda_{m_0} \in \text{iso } \sigma(AB)$ 。所以存在 $0 < |\mu_0| < \delta$ 使得 $AB - \mu_0 I$ 是可逆的, 故对任意的 $0 < |\mu| < \delta$ 都有

$$n(AB - \mu I) = n(AB - \mu_0 I) = 0,$$

矛盾。因此 $0 \in \text{iso } \sigma(AB)$, 从而 $0 \in \pi_{00}(AB)$, 这蕴含 Browder 定理对 AB 成立。

(b) \Rightarrow (c)。设 $0 \neq \lambda \in \sigma(BA) \setminus \sigma_w(BA)$, 则 $0 < n(BA - \lambda I) < \infty$ 。由引理 1 可知 $\lambda \in \sigma(AB) \setminus \sigma_w(AB)$ 。因此 $\lambda \in \text{iso } \sigma(AB)$, 再次应用引理 1 知, $\lambda \in \text{iso } \sigma(BA)$, 故有 $\lambda \in \pi_{00}(BA)$ 。

若 $0 \in \sigma(BA) \setminus \sigma_w(BA)$, 则 BA 是不可逆的 Weyl 算子, 故有 $0 < n(BA) < \infty$ 。需要证明 $0 \in \text{iso } \sigma(BA)$ 。反设 $0 \notin \text{iso } \sigma(BA)$, 则存在非 0 序列 $\{\lambda_m\}_{m=1}^{\infty} \subseteq \sigma(BA)$ 使得 $\lim_{m \rightarrow \infty} \lambda_m = 0$ 。因为 $0 \in \sigma(BA) \setminus \sigma_w(BA)$, 则由引理 2 知存在 $\delta > 0$ 使得对所有的 $0 < |\mu| < \delta$ 都有 $BA - \mu I$ 是 Weyl 算子, 且 $n(BA - \mu I) > 0$ 是常数, 因此当 m_0 充分大时, 有 $0 < |\lambda_{m_0}| < \delta$, 再由引理 1 知

$$\lambda_{m_0} \in \sigma(AB) \setminus \sigma_w(AB) \subseteq \text{iso } \sigma(AB),$$

即有 $\lambda_{m_0} \in \text{iso } \sigma(AB)$ 。所以存在 $0 < |\mu_0| < \delta$ 使得 $AB - \mu_0 I$ 是可逆的, 故对任意的 $0 < |\mu| < \delta$ 都有

$$n(BA - \mu I) = n(AB - \mu I) = n(AB - \mu_0 I) = 0,$$

矛盾。因此 $0 \in \text{iso } \sigma(BA)$, 从而 $0 \in \pi_{00}(BA)$, 这蕴含 Browder 定理对 BA 成立。

(c) \Rightarrow (a)。若 Browder 定理对 BA 成立, 则应用上面 (b) \Rightarrow (c) 的方法, 可得 Browder 定理对 AB 也成立, 即有

$$\sigma(AB) \setminus \sigma_w(AB) \subseteq \pi_{00}(AB) \text{ 且 } \sigma(BA) \setminus \sigma_w(BA) \subseteq \pi_{00}(BA),$$

因此

$$\begin{aligned} \sigma(AB \oplus BA) \setminus \sigma_w(AB \oplus BA) &\subseteq [\sigma(AB) \setminus \sigma_w(AB)] \cup [\sigma(BA) \setminus \sigma_w(BA)] \\ &\subseteq \pi_{00}(AB) \cup \pi_{00}(BA) \\ &\subseteq \pi_{00}(AB \oplus BA). \end{aligned}$$

(d) ⇔ (a)。首先证明对任意的 $C \in B(\mathcal{H}, \mathcal{H})$, 都有 $\sigma_w(M_C) = \sigma_w(AB) \cup \sigma_w(BA)$ 。显然 $\sigma_w(M_C) \subseteq \sigma_w(AB) \cup \sigma_w(BA)$ 。

设 $\lambda \notin \sigma_w(M_C)$ 。

情形 1 若 $\lambda \neq 0$, 则 $AB - \lambda I$ 是左 Fredholm 算子且 $BA - \lambda I$ 是右 Fredholm 算子, 则由引理 1, $BA - \lambda I$ 也是左 Fredholm 算子, 故 $BA - \lambda I$ 是 Fredholm 算子, 从而有 $AB - \lambda I$ 也是 Fredholm 算子。因为

$$\begin{pmatrix} AB - \lambda I & C \\ 0 & BA - \lambda I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & BA - \lambda I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & C \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} AB - \lambda I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}, \tag{1}$$

所以

$$0 = \text{ind} \begin{pmatrix} AB - \lambda I & C \\ 0 & BA - \lambda I \end{pmatrix} = \text{ind}(AB - \lambda I) + \text{ind}(BA - \lambda I) = 2 \text{ind}(AB - \lambda I),$$

故有 $AB - \lambda I$ 和 $BA - \lambda I$ 都是 Weyl 算子, 从而 $\lambda \notin \sigma_w(AB) \cup \sigma_w(BA)$ 。

情形 2 若 $\lambda = 0$, 则 AB 是左 Fredholm 算子且 BA 是右 Fredholm 算子, 故有 B 和 A 都是 Fredholm 算子, $\text{ind}(AB) = \text{ind}(BA)$, 从而

$$2 \text{ind}(AB) = \text{ind}(AB) + \text{ind}(BA) = \text{ind}(M_C) = 0,$$

则有 $0 \notin \sigma_w(AB) \cup \sigma_w(BA)$ 。

同理可以证明: 对任意 $C \in B(\mathcal{H}, \mathcal{H})$, 都有

$$\sigma(M_C) = \sigma(AB) \cup \sigma(BA),$$

则对任意 $C \in B(\mathcal{H}, \mathcal{H})$, 都有 $\sigma(M_C) \setminus \sigma_w(M_C) = \sigma(AB \oplus BA) \setminus \sigma_w(AB \oplus BA)$ 。

容易验证 $\text{iso } \sigma(M_C) = \text{iso } \sigma(AB \oplus BA)$, 因此

$$\sigma(M_C) \setminus \sigma_w(M_C) \subseteq \text{iso } \sigma(M_C) \Leftrightarrow \sigma(AB \oplus BA) \setminus \sigma_w(AB \oplus BA) \subseteq \text{iso } \sigma(AB \oplus BA),$$

则有 $\sigma(M_C) \setminus \sigma_w(M_C) \subseteq \pi_{00}(M_C) \Leftrightarrow \sigma(AB \oplus BA) \setminus \sigma_w(AB \oplus BA) \subseteq \pi_{00}(AB \oplus BA)$ 。

设 $T = U|T|$ 是算子 $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ 的典型极分解, 即 U 是唯一的的部分等距算子满足 $N(U) = N(T)$ 成立, 其中 $|T| = (T^*T)^{\frac{1}{2}}$ 是正算子 T^*T 的唯一正平方根算子。算子 $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ 的广义 Aluthge 变换算子 \tilde{T} 定义为 $\tilde{T} = |T|^s U |T|^t$, 这里 $s, t > 0$ 且 $s+t=1$ 。

推论 1 设 $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, 则 T 满足 Browder 定理当且仅当 \tilde{T} 满足 Browder 定理。

证明 记 $S = U|T|^t$ 且 $R = |T|^s$, 则 $T = SR$ 且 $\tilde{T} = RS$, 故定理 1 蕴含 T 满足 Browder 定理当且仅当 \tilde{T} 满足 Browder 定理。

上面的推论 1 还可以进一步推广, 即 T 满足 Weyl 定理当且仅当 \tilde{T} 满足 Weyl 定理。

引理 3 设 $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, 则

- (1) $\sigma(T) = \sigma(\tilde{T})$ 且 $\sigma_w(T) = \sigma_w(\tilde{T})$;
- (2) $\pi_{00}(T) = \pi_{00}(\tilde{T})$ 。

证明 (1) 记 $S = U|T|^t$ 且 $R = |T|^s$, 则由引理 1 知

$$\sigma(T) \setminus \{0\} = \sigma(SR) \setminus \{0\} = \sigma(RS) \setminus \{0\} = \sigma(\tilde{T}) \setminus \{0\}, \tag{2}$$

且

$$\sigma_w(T) \setminus \{0\} = \sigma_w(SR) \setminus \{0\} = \sigma_w(RS) \setminus \{0\} = \sigma_w(\tilde{T}) \setminus \{0\}. \tag{3}$$

容易验证

$$0 \in \sigma_w(T) \Leftrightarrow 0 \in \sigma_w(\tilde{T}) \text{ 且 } 0 \in \sigma(T) \Leftrightarrow 0 \in \sigma(\tilde{T}). \tag{4}$$

事实上, 若 $T = U|T|$ 是 Weyl 算子, 则 $|T|$ 是 Weyl 算子, 故有 $U|T|^t$ 和 $|T|^s$ 都是 Weyl 算子, 因此 $\tilde{T} = |T|^s U |T|^t$ 是 Weyl 算子。反之, 若 \tilde{T} 是 Weyl 算子, 则 $|T|^t$ 是左 Weyl 算子, 从而 $|T|$ 是 Weyl 算子。又由于 $R(|T|^t) = R(|T|)$ 是闭子空间且 U 是从闭子空间 $R(|T|)$ 到闭子空间 $R(T)$ 的酉算子, 所以 $U|T|^t$ 是 Weyl 算子, 故有

$T=U|T|' |T|^s$ 是 Weyl 算子。组合上面的(2)–(4),可得

$$\sigma(T) = \sigma(\tilde{T}) \text{ 且 } \sigma_w(T) = \sigma_w(\tilde{T})。 \tag{5}$$

(2) 因为(5) 蕴含 $\text{iso } \sigma(T) = \text{iso } \sigma(\tilde{T})$, 只需证明对任意复数 λ , 都有

$$0 < n(\tilde{T} - \lambda I) < \infty \Leftrightarrow 0 < n(T - \lambda I) < \infty。 \tag{6}$$

当 $\lambda \neq 0$ 时, 由引理 1 知

$$n(\tilde{T} - \lambda I) = n(RS - \lambda I) = n(SR - \lambda I) = n(T - \lambda I),$$

故式(6)成立。若 $n(T) = 0$, 则 U 是等距算子, 故 $n(\tilde{T}) = n(|T|^s U |T|') = 0$ 。另一方面, 若 $n(\tilde{T}) = 0$, 则 $n(T) = n(|T|) = 0$ 。显然 $n(T) \leq n(\tilde{T}) < \infty$ 。反之若 $n(T) < \infty$, 则 $n(T) = n(|T|) = n(U |T|')$, 故有 $n(\tilde{T}) < \infty$, 因此 $\pi_{00}(T) = \pi_{00}(\tilde{T})$ 。

例 1 说明“ AB 满足 Weyl 定理”与“ BA 满足 Weyl 定理”并不等价。

例 1 令 $\ell^2 := \{(x_1, x_2, x_3, \dots) : x_i \in \mathbf{C} \text{ 且 } \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 < \infty\}$, 则 ℓ^2 是复可分希尔伯特空间。定义算子 $K, S, T \in \mathcal{B}(\ell^2)$ 分别有下面的形式:

$$K(x_1, x_2, x_3, \dots) = \left(0, 0, 0, \frac{1}{2}x_2, 0, \frac{1}{3}x_3, 0, \frac{1}{4}x_4, 0, \frac{1}{5}x_5, \dots\right),$$
$$S(x_1, x_2, x_3, \dots) = (0, x_1, 0, x_2, 0, x_3, 0, x_4, \dots),$$

且

$$T(x_1, x_2, x_3, \dots) = (x_2, x_4, x_6, x_8, \dots)。$$

令

$$A = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & T \end{pmatrix} : \ell^2 \oplus \ell^2 \rightarrow \ell^2 \oplus \ell^2, \quad B = \begin{pmatrix} K & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix} : \ell^2 \oplus \ell^2 \rightarrow \ell^2 \oplus \ell^2,$$

显然 $TS = I$ 且 $ST(x_1, x_2, x_3, \dots) = (0, x_2, 0, x_4, 0, x_6, 0, x_8, \dots)$, 则

$$AB = \begin{pmatrix} K & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} : \ell^2 \oplus \ell^2 \rightarrow \ell^2 \oplus \ell^2, \quad BA = \begin{pmatrix} K & 0 \\ 0 & ST \end{pmatrix} : \ell^2 \oplus \ell^2 \rightarrow \ell^2 \oplus \ell^2。$$

容易验证下面 3 个结论成立:

- (1) $\sigma(K) = \{0\}$, $n(K) = 1$;
- (2) $\sigma(AB) = \sigma_w(AB) = \sigma(BA) = \sigma_w(BA) = \{0, 1\}$;
- (3) $\pi_{00}(AB) = \{0\}$, $\pi_{00}(BA) = \emptyset = \pi_{00}(AB \oplus BA)$ 。

令

$$C_0 = \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : N(BA) \oplus N(BA)^\perp \rightarrow R(AB)^\perp \oplus \overline{R(AB)},$$

其中 S 是从 $N(BA)$ 到 $R(AB)^\perp$ 上的可逆算子(由于 $n(BA) = \infty = d(AB)$)。容易计算

$$\sigma(M_{C_0}) = \sigma_w(M_{C_0}) = \{0, 1\}, \quad n(M_{C_0}) = 1 \text{ 且 } \pi_{00}(M_{C_0}) = \{0\},$$

则 BA 和 $AB \oplus BA$ 满足 Weyl 定理, 但是 AB 和 M_{C_0} 不满足 Weyl 定理。

定理 2 设 $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, 则下面命题成立:

- (a) $T \oplus \tilde{T}$ 满足 Weyl 定理;
- (b) T 满足 Weyl 定理;
- (c) \tilde{T} 满足 Weyl 定理;
- (d) $N_C := \begin{pmatrix} T & C \\ 0 & \tilde{T} \end{pmatrix} : \mathcal{H} \oplus \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ 满足 Weyl 定理, 其中 $C \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ 是任意的。

证明 容易验证: 对任意的 $C \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{H})$, 都有

$$N \begin{pmatrix} T - \lambda I & C \\ 0 & \tilde{T} - \lambda I \end{pmatrix} \subseteq \begin{pmatrix} N(T - \lambda I) \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (T - \lambda I)^{-1}(Cy) \\ y \end{pmatrix} \tag{7}$$

成立, 其中 $y \in N(\tilde{T} - \lambda I)$ 满足 $Cy \in R(T - \lambda I)$ 且 $(T - \lambda I)^{-1}(Cy) \in N(T - \lambda I)^\perp$, $(T - \lambda I)^{-1}$ 表示 $T - \lambda I$ 的逆算子, 即是从 $\overline{R(T - \lambda I)}$ 到 $N(T - \lambda I)^\perp$ 上的稠定闭算子。因此由引理 3 知

$$0 < n(\tilde{T} - \lambda I) < \infty \Leftrightarrow 0 < n(T - \lambda I) < \infty \Leftrightarrow 0 < n(N_C - \lambda I) < \infty. \quad (8)$$

再由引理3可得 $\text{iso } \sigma(T) = \text{iso } \sigma(\tilde{T})$, 故有 $\text{iso } \sigma(T) = \text{iso } \sigma(\tilde{T}) = \text{iso } \sigma(N_C)$, 所以对任意的 $C \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ 都有

$$\pi_{00}(T) = \pi_{00}(T \oplus \tilde{T}) = \pi_{00}(N_C). \quad (9)$$

又由引理3知, $\sigma(T) = \sigma(\tilde{T})$ 且 $\sigma_w(T) = \sigma_w(\tilde{T})$, 这2个等式蕴含

$$\sigma(T) = \sigma(\tilde{T}) = \sigma(N_C) \text{ 且 } \sigma_w(T) = \sigma_w(\tilde{T}) = \sigma_w(N_C) \quad (10)$$

对任意的 $C \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ 成立, 因此由等式(9)和(10)可得 (a) \Rightarrow (b) \Leftrightarrow (c) \Rightarrow (d)。

参考文献:

- [1] WEYL H V. Über beschränkte quadratische Formen, deren Differenz vollsteig ist[J]. Rendiconti Del Circolo Matematico Di Palermo, 1909, 27(1):373-392.
- [2] COBURN L A. Weyl's theorem for nonnormal operators [J]. Michigan Mathematical Journal, 1966, 13(3):285-288.
- [3] CAO Xiaohong. Weyl type theorem and hypercyclic operators[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2006, 323(1):267-274.
- [4] CAO Xiaohong, GUO Maozheng, MENG Bin. Weyl spectra and Weyl's theorem [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2003, 288(2):758-767.
- [5] DJORDJEVIĆ S V, HAN Y M. Browder's theorems and spectral continuity[J]. Glasgow Math, 2000, 42(3):479-486.
- [6] HARTE R, LEE W Y. Another note on Weyl's theorem[J]. Transactions of the American Mathematical Society, 1997, 349(5):2115-2124.
- [7] KIMURA F. Analysis of non-normal operators via Aluthge transformation[J]. Integral Equation Operator Theory, 2004, 50:375-384.
- [8] 仇思楠, 曹小红. 有界线性算子及其函数的 Browder 定理的判定[J]. 中山大学学报(自然科学版), 2022, 61(5):165-172.
QIU Sinan, CAO Xiaohong. Judgement of Browder's theorem for bounded linear operators and their functions[J]. Acta Scientiarum Naturalium Univeraitatis Sunyatseni, 2022, 61(5):165-172.
- [9] 王静, 曹小红. 有界线性算子的 Weyl 定理的判定[J]. 浙江大学学报(理学版), 2020, 47(5):541-547.
WANG Jing, CAO Xiaohong. The judgement of Weyl's theorem for bounded linear operators[J]. Journal of Zhejiang University (Science Edition), 2020, 47(5):541-547.
- [10] 孙晨辉, 白珍贵, 曹小红. 有界线性算子的 Browder 定理的判定[J]. 山东大学学报(理学版), 2021, 56(2):34-40.
SUN Chenhui, BAI Zhengui, CAO Xiaohong. Judgement of Browder's theorem for bounded linear operators[J]. Journal of Shandong University (Natural Science), 2021, 56(2):34-40.
- [11] BRUCE A B. Common operator properties of the linear operators RS and SR[J]. Proceedings of the American Mathematical Society, 1998, 126(4):1055-1061.
- [12] CONWAY J B A. Course in functional analysis[M]. New York: Springer, 1989.

(编辑:陈丽萍)