山东大学学报(理学版)2025 年 11 月 第 60 卷 第 11 期
Journal of Shandong University(*Natural Science*), Vol.60, No.11, 2025 http://lxbwk.njournal.sdu.edu.cn

文章编号:1671-9352(2025)11-0134-14 DOI:10.6040/j.issn.1671-9352.0.2023.381

广义矩阵代数上的李三重导子

庄金洪[1],陈艳平[1],谭宜家[2*]
(1.福建商学院信息工程学院, 福建 福州 350102; 2.福州大学数学与统计学院, 福建 福州 350108)

摘要:研究广义矩阵代数上零点李三重导子的结构,获得广义矩阵代数上零点李三重导子可表为 1 个导子、1 个奇异 Jordan 导子和 1 个中心值映射之和的等价条件。结果推广三角代数的相应结论。

关键词:广义矩阵代数;李三重导子;导子;奇异 Jordan 导子
中图分类号:O151.3 **文献标志码**:A
引用格式:庄金洪,陈艳平,谭宜家. 广义矩阵代数上的李三重导子[J]. 山东大学学报(理学版),2025,60(11):134-147.

Lie triple derivations on a generalized matrix algebra

ZHUANG Jinhong[1], CHEN Yanping[1], TAN Yijia[2*]
(1. College of Information Engineering, Fujian Business University, Fuzhou 350102, Fujian, China; 2. School of Mathematics and Statistics, Fuzhou University, Fuzhou 350108, Fujian, China)

Abstract: The structure of Lie triple derivations at zero point on a generalized matrix algebra is studied, and an equivalent condition for a Lie triple derivation at zero point to be expressed as the sum of a derivation, a singular Jordan derivation and a linear map from the generalized matrix algebra to its center is obtained. Partial results obtained in the paper generalize the corresponding results for triangular algebras.

Key words: generalized matrix algebra; Lie triple derivation; derivation; singular Jordan derivation

0 引言

设 R 是含有单位元的交换环,A,B 是 R 上的代数,M 是(A,B)-双模,N 是(B,A)-双模,$\phi: M\otimes_B N\to A$ 和 $\varphi: N\otimes_A M\to B$ 分别是(A,A)-和(B,B)-双模同态且满足交换图

$$\begin{tikzcd} M\otimes_B N\otimes_A M \arrow[r, "\phi_{MN}\otimes I_M"] \arrow[d, "I_M\otimes\varphi_{NM}"] & A\otimes_A M \arrow[d, "\cong"] \\ M\otimes_B B \arrow[r, "\cong"] & M \end{tikzcd}$$

和

$$\begin{tikzcd} N\otimes_A M\otimes_B N \arrow[r, "\varphi_{NM}\otimes I_N"] \arrow[d, "I_N\otimes\phi_{MN}"] & B\otimes_B N \arrow[d, "\cong"] \\ N\otimes_A A \arrow[r, "\cong"] & N, \end{tikzcd}$$

则形式矩阵集合

收稿日期:2023-09-04; **网络出版时间**:2024-09-03 10:52:57
基金项目:国家自然科学基金资助项目(11971111);福建省自然科学基金资助项目(2024J01992)
第一作者:庄金洪(1982—),男,讲师,研究方向为矩阵代数及其应用. E-mail:zhuangjh8@163.com
* **通信作者**:谭宜家(1962—),男,教授,硕士生导师,研究方向为矩阵代数及其应用. E-mail:yjtan62@126.com

$$\boldsymbol{G}=\boldsymbol{G}(A,M,N,B)=\begin{pmatrix}A & M\\ N & B\end{pmatrix}=\left\{\begin{pmatrix}a & m\\ n & b\end{pmatrix}\middle|\, a\in A,\ b\in B,\ m\in M,\ n\in N\right\}。$$

在通常的矩阵加法、纯量乘法和矩阵乘法运算下构成 R 上的一个代数,称 $\boldsymbol{G}$ 为 R 上的广义矩阵代数[1]。显然,R 上的全矩阵代数 $M_n(R)(n\geqslant 2)$ 是 R 上的广义矩阵代数。

广义矩阵代数在模的对偶理论中有着重要的作用[2],广泛应用于交换环的 Galois 理论[3]和环的构造理论[4]。当 $N=0$ 时,称 $\boldsymbol{G}=\boldsymbol{G}(A,M,N,B)$ 为交换环 R 上的三角代数, 记 $\boldsymbol{G}=\boldsymbol{T}(A,M,B)$[5],所以三角代数是广义矩阵代数的特殊情形。

设 R 是含有单位元的交换环,A 是 R 上的一个代数,给定 $x,y\in A$, $[x,y]=xy-yx$ 称为 x 和 y 的李积,$x\circ y=xy+yx$ 称为 x 和 y 的 Jordan 积。设 d 是 A 上的一个 R-线性映射,d 称为 A 上的导子,如果对 $x,y\in A$,均有 $d(xy)=d(x)y+xd(y)$;d 称为 A 上的 Jordan 导子,如果对 $x,y\in A$,均有 $d(x\circ y)=d(x)\circ y+x\circ d(y)$;$d$ 称为 A 上的李导子,如果对 $x,y\in A$,均有

$$d([x,y])=[d(x),y]+[x,d(y)];$$

d 称为 A 上的李三重导子,如果对 $x,y,z\in A$,均有

$$d([[x,y],z])=[[d(x),y],z]+[[x,d(y)],z]+[[x,y],d(z)];$$

d 称为 A 上的零点李三重导子,如果对 $x,y,z\in A$ 且 $xy=xz=0$,均有

$$d([[x,y],z])=[[d(x),y],z]+[[x,d(y)],z]+[[x,y],d(z)]。$$

显然,代数上的导子、李导子是李三重导子。利用公式 $[[x,y],z]=x\circ(y\circ z)-y\circ(x\circ z)$,易证代数上的 Jordan 导子也是李三重导子,但反之不成立。那么在什么条件下,李三重导子是导子呢? Miers[6]首次研究了 von Neumann 代数的李三重导子,证明了不含中心交换投影的 von Neumann 代数上每一个李三重导子均可表为一个内导子和一个中心值映射之和。Brešar[7]将 Miers 的结果推广到素环上。纪培胜等[8]证明了 TUHF 代数上每一个连续的李三重导子均可表为一个导子和一个中心值映射之和。随后,Lu[9]和 Zhang 等[10]分别研究了 Nest 代数上的李三重导子的表达形式。Xiao 等[11]证明了在一定条件下,三角代数上每一个李三重导子都具有标准形,即每一个李三重导子都可表为一个导子和一个中心值映射之和。Benkovič[12]研究了具有非平凡幂等元代数的李三重导子,给出了李三重导子的具体形式。Ashraf 等[13]刻画了广义矩阵代数上李三重导子的结构,给出了李三重导子具有标准形的充要条件。

随着李三重导子研究的不断深入,对满足某种条件的李三重导子的探讨已成为学者们的研究热点。Liu[14]研究因子 von Neumann 代数 A 上满足条件 $xy=0$(或 $xy=p$,其中 p 是 A 上的非平凡投影)的李三重导子,给出这类李三重导子的具体形式;白延丽等[15]证明在一定条件下,三角代数上每一个零点李三重导子都具有标准形;Liu[16]研究没有中心交换投影的 von Neumann 代数 A 上满足条件 $xy=0$(或 $xy=p$,其中 p 是 A 上的非平凡投影)的李三重导子,得到了类似于文献[15]的结论;Zhao[17]考虑了三角代数上满足条件 $xyz=0$ 的李三重导子的结构,证明三角代数上每个满足条件 $xyz=0$ 的李三重导子都具有标准形。本文在上述的基础上探讨广义矩阵代数上的零点李三重导子,给出广义矩阵代数上零点李三重导子可表为 1 个导子、1 个奇异 Jordan 导子和 1 个中心值映射之和的等价刻画。本文的结果拓广文献[15]的重要结论。

1　预备知识

定义 1[18]　设 A 是 R 上的代数,$\varnothing\neq U\subseteq A$,$U$ 称为 A 的代数理想,如果 U 既是 A 作为环的理想,又是 A 的子模;U 称为 A 的中心理想,如果 U 是 A 的代数理想,且 $U\subseteq Z(A)$,其中 $Z(A)=\{x\in A\mid xy=yx,\ \forall\, y\in A\}$ 是 A 的中心。

定义 2[18]　设 A 和 B 是 R 上的代数,M 是 (A,B)-双模,M 称为忠实的左 A-模,如果 $\forall\, a\in A$,由 $aM=\{0\}$ 可推出 $a=0$;M 称为忠实的右 B-模,如果 $\forall\, b\in B$,由 $Mb=\{0\}$ 可以推出 $b=0$;M 称为忠实的 (A,B)-双模,如果 M 既是忠实的左 A-模又是忠实的右 B-模。

设 $\boldsymbol{G}=\boldsymbol{G}(A,M,N,B)$ 是广义矩阵代数,1_A 和 1_B 分别是代数 A 和 B 的单位元,记 $\boldsymbol{P}_1=\begin{pmatrix}1_A & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{P}_2=$

$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1_B \end{pmatrix}$。

定义 3[12] 设 $\boldsymbol{G}=\boldsymbol{G}(A,M,N,B)$ 是广义矩阵代数，δ 是 $\boldsymbol{G}$ 上的 Jordan 导子。δ 称为 $\boldsymbol{G}$ 上的奇异Jordan导子，如果对 $\boldsymbol{X}\in\boldsymbol{G}$，均有 $\delta(\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{X}\boldsymbol{P}_1)=\boldsymbol{O}$，$\delta(\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{X}\boldsymbol{P}_2)=\boldsymbol{O}$，$\delta(\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{X}\boldsymbol{P}_2)\in\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{G}\boldsymbol{P}_1$，$\delta(\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{X}\boldsymbol{P}_1)\in\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{G}\boldsymbol{P}_2$。

注 1 如果 $\boldsymbol{G}$ 是 2-非挠的（即对 $\boldsymbol{X}\in\boldsymbol{G}$，如果 $2\boldsymbol{X}=\boldsymbol{O}$，那么 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{O}$），那么 δ 是 $\boldsymbol{G}$ 上的 Jordan 导子当且仅当对 $\boldsymbol{X}\in\boldsymbol{G}$，$\delta(\boldsymbol{X}^2)=\delta(\boldsymbol{X})\boldsymbol{X}+\boldsymbol{X}\delta(\boldsymbol{X})$。

定义投射 $\pi_A:\boldsymbol{G}\to A$，$\pi_A:\begin{pmatrix} a & m \\ n & b \end{pmatrix}\mapsto a$ 和 $\pi_B:\boldsymbol{G}\to B$，$\pi_B:\begin{pmatrix} a & m \\ n & b \end{pmatrix}\mapsto b$。

引理 1[1] 设 $\boldsymbol{G}=\boldsymbol{G}(A,M,N,B)$ 是广义矩阵代数，如果 M 是忠实的 (A,B)-双模，那么

$$Z(\boldsymbol{G})=\left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \,\middle|\, am=mb,\ na=bn,\ \forall\, m\in M,\ n\in N\right\},$$

并且存在唯一的同构 $\eta:\pi_A(Z(\boldsymbol{G}))\to\pi_B(Z(\boldsymbol{G}))$，满足 $\forall\, m\in M$，$n\in N$，均有 $am=m\eta(a)$，$na=\eta(a)n$。

引理 2 设 $\boldsymbol{G}=\boldsymbol{G}(A,M,N,B)$ 是广义矩阵代数，M 是忠实的 (A,B)-双模，且满足 $\pi_A(Z(\boldsymbol{G}))=Z(A)$，$\pi_B(Z(\boldsymbol{G}))=Z(B)$，设 $a\in A$，$b\in B$，如果对 $m\in M$，均有 $am=mb$，那么

$$a\in Z(A),\ b\in Z(B),\ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}\in Z(\boldsymbol{G})。$$

证明 因为对 $m\in M$，均有 $am=mb$，所以对 $a'\in A$，有

$$aa'm=a(a'm)=(a'm)b=a'(mb)=a'(am)=a'am。$$

因为 M 是忠实的 (A,B)-双模，所以 $aa'=a'a$，于是 $a\in Z(A)=\pi_A(Z(\boldsymbol{G}))$。同理可证 $b\in Z(B)=\pi_B(Z(\boldsymbol{G}))$。进一步地，由引理 1 知，存在唯一的同构映射 $\eta:Z(A)\to Z(B)$，使得 $\forall\, m\in M$，$n\in N$，均有 $am=m\eta(a)$，$na=\eta(a)n$，所以 $m\eta(a)=am=mb$。因为 M 是忠实的 (A,B)-双模，所以 $\eta(a)=b$，于是 $na=bn$。再由引理 1 知 $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}\in Z(\boldsymbol{G})$。

引理 3[19] 设 $\boldsymbol{G}=\boldsymbol{G}(A,M,N,B)$ 是广义矩阵代数，$d:\boldsymbol{G}\to\boldsymbol{G}$ 是一个映射，那么 d 是 $\boldsymbol{G}$ 上的导子当且仅当 $\forall\begin{pmatrix} a & m \\ n & b \end{pmatrix}\in\boldsymbol{G}$，均有

$$d\begin{pmatrix} a & m \\ n & b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} d_1(a)-mn_0-m_0n & am_0-m_0b+\mu_2(m) \\ n_0a-bn_0+\gamma_3(n) & d_4(b)+nm_0+n_0m \end{pmatrix},$$

式中，$m_0\in M$，$n_0\in N$，d_1 和 d_4 分别是 A 与 B 上的导子，$\mu_2:M\to M$ 和 $\gamma_3:N\to N$ 均为 R-线性映射，且满足 $\forall\, a\in A$，$b\in B$，$m\in M$，$n\in N$，均有

(1) $d_1(mn)=\mu_2(m)n+m\gamma_3(n)$；

(2) $d_4(nm)=n\mu_2(m)+\gamma_3(n)m$；

(3) $\mu_2(am)=d_1(a)m+a\mu_2(m)$，$\mu_2(mb)=\mu_2(m)b+md_4(b)$；

(4) $\gamma_3(na)=\gamma_3(n)a+nd_1(a)$，$\gamma_3(bn)=d_4(b)n+b\gamma_3(n)$。

假设交换环 R 上的所有代数都是 2–非挠的，广义矩阵代数 $\boldsymbol{G}=\boldsymbol{G}(A,M,N,B)$ 中的 M 是忠实的 (A,B)-双模。为了方便，记 $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ 为 $a\oplus b$，$\Delta(\begin{pmatrix} a & m \\ n & b \end{pmatrix})$ 为 $\Delta\begin{pmatrix} a & m \\ n & b \end{pmatrix}$。

2 零点李三重导子的刻画

定理 1 设 $\boldsymbol{G}=\boldsymbol{G}(A,M,N,B)$ 是广义矩阵代数，$\Delta:\boldsymbol{G}\to\boldsymbol{G}$ 是 $\boldsymbol{G}$ 的零点李三重导子，那么 $\forall\begin{pmatrix} a & m \\ n & b \end{pmatrix}\in\boldsymbol{G}$，均有

$$\Delta\begin{pmatrix} a & m \\ n & b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha_1(a)+\beta_1(b)-mn_0-m_0n & am_0-m_0b+\mu_2(m)+\gamma_2(n) \\ n_0a-bn_0+\mu_3(m)+\gamma_3(n) & \alpha_4(a)+\beta_4(b)+nm_0+n_0m \end{pmatrix},\tag{1}$$

式中,$m_0\in M$, $n_0\in N$, $\alpha_1:A\to A$, $\beta_1:B\to A$, $\mu_2:M\to M$, $\gamma_2:N\to M$, $\mu_3:M\to N$, $\gamma_3:N\to N$,$\alpha_4:A\to B$ 和$\beta_4:B\to B$ 均为 R-线性映射,且满足 $\forall a\in A$, $b\in B$, $m\in M$, $n\in N$,均有

(ⅰ) $\mu_2(am)=\alpha_1(a)m-m\alpha_4(a)+a\mu_2(m)$, $\mu_3(am)=\mu_3(m)a$;

(ⅱ) $\mu_2(mb)=m\beta_4(b)-\beta_1(b)m+\mu_2(m)b$, $\mu_3(mb)=b\mu_3(m)$;

(ⅲ) $\gamma_3(na)=n\alpha_1(a)-\alpha_4(a)n+\gamma_3(n)a$, $\gamma_2(na)=a\gamma_2(n)$;

(ⅳ) $\gamma_3(bn)=\beta_4(b)n-n\beta_1(b)+b\gamma_3(n)$, $\gamma_2(bn)=\gamma_2(n)b$;

(ⅴ) $\mu_3(m)m=0$, $m\mu_3(m)=0$, $\gamma_2(n)n=0$, $n\gamma_2(n)=0$;

(ⅵ) $\alpha_1(mn)-\beta_1(nm)=\mu_2(m)n+m\gamma_3(n)$, $\beta_4(nm)-\alpha_4(mn)=n\mu_2(m)+\gamma_3(n)m$。

证明　设 $\Delta:\boldsymbol{G}\to\boldsymbol{G}$ 是 $\boldsymbol{G}$ 的零点李三重导子,则 $\Delta:\boldsymbol{G}\to\boldsymbol{G}$ 是一个 R-线性映射,所以存在 R-线性映射$\alpha_1:A\to A$, $\alpha_2:A\to M$, $\alpha_3:A\to N$, $\alpha_4:A\to B$, $\mu_1:M\to A$, $\mu_2:M\to M$, $\mu_3:M\to N$, $\mu_4:M\to B$, $\gamma_1:N\to A$, $\gamma_2:N\to M$, $\gamma_3:N\to N$, $\gamma_4:N\to B$, $\beta_1:B\to A$, $\beta_2:B\to M$, $\beta_3:B\to N$, $\beta_4:B\to B$ 满足 $\forall a\in A$, $b\in B$, $m\in M$, $n\in N$,均有

$$\Delta\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha_1(a) & \alpha_2(a) \\ \alpha_3(a) & \alpha_4(a) \end{pmatrix},\ \Delta\begin{pmatrix} 0 & m \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \mu_1(m) & \mu_2(m) \\ \mu_3(m) & \mu_4(m) \end{pmatrix},$$

$$\Delta\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ n & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \gamma_1(n) & \gamma_2(n) \\ \gamma_3(n) & \gamma_4(n) \end{pmatrix},\ \Delta\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \beta_1(b) & \beta_2(b) \\ \beta_3(b) & \beta_4(b) \end{pmatrix}。$$

因此

$$\Delta\begin{pmatrix} a & m \\ n & b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha_1(a)+\mu_1(m)+\gamma_1(n)+\beta_1(b) & \alpha_2(a)+\mu_2(m)+\gamma_2(n)+\beta_2(b) \\ \alpha_3(a)+\mu_3(m)+\gamma_3(n)+\beta_3(b) & \alpha_4(a)+\mu_4(m)+\gamma_4(n)+\beta_4(b) \end{pmatrix}。$$

因为 $\Delta:\boldsymbol{G}\to\boldsymbol{G}$ 是 $\boldsymbol{G}$ 的零点李三重导子,所以对 $\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y},\boldsymbol{Z}\in\boldsymbol{G}$,当 $\boldsymbol{XY}=\boldsymbol{XZ}=\boldsymbol{O}$ 时,有

$$\Delta([[\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}],\boldsymbol{Z}])=[[\Delta(\boldsymbol{X}),\boldsymbol{Y}],\boldsymbol{Z}]+[[\boldsymbol{X},\Delta(\boldsymbol{Y})],\boldsymbol{Z}]+[[\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}],\Delta(\boldsymbol{Z})]。\tag{2}$$

在式(2)中,取 $\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{Z}=\boldsymbol{P}_1$,经计算得

$$\Delta([[\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}],\boldsymbol{Z}])=\Delta(\boldsymbol{O})=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned}&[[\Delta(\boldsymbol{X}),\boldsymbol{Y}],\boldsymbol{Z}]+[[\boldsymbol{X},\Delta(\boldsymbol{Y})],\boldsymbol{Z}]+[[\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}],\Delta(\boldsymbol{Z})]\\ &=\begin{pmatrix} 0 & \beta_2(b) \\ \beta_3(b) & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & \alpha_2(1_A)b \\ b\alpha_3(1_A) & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix} 0 & \beta_2(b)+\alpha_2(1_A)b \\ \beta_3(b)+b\alpha_3(1_A) & 0 \end{pmatrix},\end{aligned}$$

所以

$$\begin{pmatrix} 0 & \beta_2(b)+\alpha_2(1_A)b \\ \beta_3(b)+b\alpha_3(1_A) & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

于是 $\beta_2(b)=-\alpha_2(1_A)b$,$\beta_3(b)=-b\alpha_3(1_A)$。

设 $\alpha_2(1_A)=m_0$, $\alpha_3(1_A)=n_0$, 则对 $b\in B$,均有 $\beta_2(b)=-m_0b$, $\beta_3(b)=-bn_0$,特别地,$\beta_2(1_B)=-m_0$, $\beta_3(1_B)=-n_0$。

在式(2)中,取 $\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{Z}=\boldsymbol{P}_2$,类似可得 $\alpha_2(a)=am_0$,$\alpha_3(a)=n_0a$。

在式(2)中,取 $\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix} 0 & m \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{Z}=\boldsymbol{P}_1$,经计算,得

$$\Delta([[\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}],\boldsymbol{Z}])=\Delta(\boldsymbol{X})=\begin{pmatrix} \mu_1(m) & \mu_2(m) \\ \mu_3(m) & \mu_4(m) \end{pmatrix},$$

$$
\begin{aligned}
&[[\boldsymbol{\Delta}(\boldsymbol{X}),\boldsymbol{Y}],\boldsymbol{Z}]+[[\boldsymbol{X},\boldsymbol{\Delta}(\boldsymbol{Y})],\boldsymbol{Z}]+[[\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}],\boldsymbol{\Delta}(\boldsymbol{Z})]\\
&=\begin{pmatrix}0 & \mu_2(m)\\ \mu_3(m) & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & \alpha_1(1_A)m-m\alpha_4(1_A)\\ 0 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-m\alpha_3(1_A) & \alpha_1(1_A)m-m\alpha_4(1_A)\\ 0 & \alpha_3(1_A)m\end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix}-mn_0 & \mu_2(m)+2(\alpha_1(1_A)m-m\alpha_4(1_A))\\ \mu_3(m) & n_0m\end{pmatrix}(\text{因为 }\alpha_3(1_A)=n_0)\ ,
\end{aligned}
$$

所以

$$
\begin{pmatrix}\mu_1(m) & \mu_2(m)\\ \mu_3(m) & \mu_4(m)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-mn_0 & \mu_2(m)+2(\alpha_1(1_A)m-m\alpha_4(1_A))\\ \mu_3(m) & n_0m\end{pmatrix}。
$$

于是对 $m\in M$,均有 $\mu_1(m)=-mn_0$, $\mu_4(m)=n_0m$,同时

$$
\alpha_1(1_A)m=m\alpha_4(1_A)。\tag{3}
$$

在式(2)中,取 $\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ n & 0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{Z}=\boldsymbol{P}_2$,经计算得

$$
\Delta([[\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}],\boldsymbol{Z}])=\Delta(\boldsymbol{X})=\begin{pmatrix}\gamma_1(n) & \gamma_2(n)\\ \gamma_3(n) & \gamma_4(n)\end{pmatrix},
$$

$$
\begin{aligned}
&[[\boldsymbol{\Delta}(\boldsymbol{X}),\boldsymbol{Y}],\boldsymbol{Z}]+[[\boldsymbol{X},\boldsymbol{\Delta}(\boldsymbol{Y})],\boldsymbol{Z}]+[[\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}],\boldsymbol{\Delta}(\boldsymbol{Z})]\\
&=\begin{pmatrix}0 & \gamma_2(n)\\ \gamma_3(n) & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 0\\ \beta_4(1_B)n-n\beta_1(1_B) & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\beta_2(1_B)n & 0\\ \beta_4(1_B)n-n\beta_1(1_B) & -n\beta_2(1_B)\end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix}-m_0n & \gamma_2(n)\\ \gamma_3(n)+2(\beta_4(1_B)n-n\beta_1(1_B)) & nm_0\end{pmatrix}(\text{因为 }\beta_2(1_B)=-m_0),
\end{aligned}
$$

所以

$$
\begin{pmatrix}\gamma_1(n) & \gamma_2(n)\\ \gamma_3(n) & \gamma_4(n)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-m_0n & \gamma_2(n)\\ \gamma_3(n)+2(\beta_4(1_B)n-n\beta_1(1_B)) & nm_0\end{pmatrix}。
$$

于是对 $n\in N$,均有 $\gamma_1(n)=-m_0n$, $\gamma_4(n)=nm_0$,同时

$$
n\beta_1(1_B)=\beta_4(1_B)n。\tag{4}
$$

因此,对$\begin{pmatrix}a & m\\ n & b\end{pmatrix}\in\boldsymbol{G}$,均有

$$
\Delta\begin{pmatrix}a & m\\ n & b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha_1(a)+\beta_1(b)-mn_0-m_0n & am_0-m_0b+\mu_2(m)+\gamma_2(n)\\ n_0a-bn_0+\mu_3(m)+\gamma_3(n) & \alpha_4(a)+\beta_4(b)+n_0m+nm_0\end{pmatrix},
$$

则式(1)成立。

令 $\boldsymbol{X}_0=\begin{pmatrix}0 & -m_0\\ n_0 & 0\end{pmatrix}$,定义映射 $L:\boldsymbol{G}\to\boldsymbol{G}$ 满足 $L(\boldsymbol{X})=\Delta(\boldsymbol{X})-[\boldsymbol{X}_0,\boldsymbol{X}]$, $\boldsymbol{X}\in\boldsymbol{G}$,那么对$\begin{pmatrix}a & m\\ n & b\end{pmatrix}\in\boldsymbol{G}$,有

$$
L\begin{pmatrix}a & m\\ n & b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha_1(a)+\beta_1(b) & \mu_2(m)+\gamma_2(n)\\ \mu_3(m)+\gamma_3(n) & \alpha_4(a)+\beta_4(b)\end{pmatrix},\tag{5}
$$

同时,利用 $L(\boldsymbol{X})=\Delta(\boldsymbol{X})-[\boldsymbol{X}_0,\boldsymbol{X}]$,不难验证,$L:\boldsymbol{G}\to\boldsymbol{G}$ 是一个 R-线性映射,并且对 $\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y},\boldsymbol{Z}\in\boldsymbol{G}$,当 $\boldsymbol{XY}=\boldsymbol{XZ}=\boldsymbol{O}$ 时,有

$$
L([[\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}],\boldsymbol{Z}])=[[L(\boldsymbol{X}),\boldsymbol{Y}],\boldsymbol{Z}]+[[\boldsymbol{X},L(\boldsymbol{Y})],\boldsymbol{Z}]+[[\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}],L(\boldsymbol{Z})],\tag{6}
$$

下证(ⅰ)—(ⅵ)成立。

先证(ⅰ)和(ⅱ)。在式(6)中,取 $\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}0 & m\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{Y}=\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{Z}=\boldsymbol{P}_1$,利用式(5)得

$$
L([[\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}],\boldsymbol{Z}])=L\begin{pmatrix}0 & am\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & \mu_2(am)\\ \mu_3(am) & 0\end{pmatrix},
$$

$$
\begin{aligned}
&[[L(\boldsymbol{X}),\boldsymbol{Y}],\boldsymbol{Z}]+[[\boldsymbol{X},L(\boldsymbol{Y})],\boldsymbol{Z}]+[[\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}],L(\boldsymbol{Z})]\\
&=\begin{pmatrix}0 & a\mu_2(m)\\ \mu_3(m)a & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & \alpha_1(a)m-m\alpha_4(a)\\ 0 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & \alpha_1(1_A)am-am\alpha_4(1_A)\\ 0 & 0\end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix}0 & a\mu_2(m)\\ \mu_3(m)a & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & \alpha_1(a)m-m\alpha_4(a)\\ 0 & 0\end{pmatrix}(\text{根据式}(3))\\
&=\begin{pmatrix}0 & \alpha_1(a)m-m\alpha_4(a)+a\mu_2(m)\\ \mu_3(m)a & 0\end{pmatrix},
\end{aligned}
$$

所以

$$
\begin{pmatrix}0 & \mu_2(am)\\ \mu_3(am) & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & \alpha_1(a)m-m\alpha_4(a)+a\mu_2(m)\\ \mu_3(m)a & 0\end{pmatrix}。
$$

因此,对 $a\in A,m\in M$,均有

$$
\mu_2(am)=\alpha_1(a)m-m\alpha_4(a)+a\mu_2(m),\mu_3(am)=\mu_3(m)a,
$$

则(ⅰ)成立。

类似地,在式(6)中取 $\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & b\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{Y}=\begin{pmatrix}0 & m\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{Z}=\boldsymbol{P}_1$,可得对 $m\in M$, $b\in B$,均有

$$
\mu_2(mb)=m\beta_4(b)-\beta_1(b)m+\mu_2(m)b,\mu_3(mb)=b\mu_3(m),
$$

则(ⅱ)成立。

取 $b=1_B$,可得 $\beta_1(1_B)m=m\beta_4(1_B)$,结合式(4)和引理 1,得 $L(\boldsymbol{P}_2)=\beta_1(1_B)\oplus\beta_4(1_B)\in Z(\boldsymbol{G})$。

再证(ⅲ)和(ⅳ)。在式(6)中,取 $\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{Y}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ n & 0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{Z}=\boldsymbol{P}_2$,利用式(5)得

$$
L([[\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}],\boldsymbol{Z}])=L\begin{pmatrix}0 & 0\\ na & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & \gamma_2(na)\\ \gamma_3(na) & 0\end{pmatrix},
$$

$$
\begin{aligned}
&[[L(\boldsymbol{X}),\boldsymbol{Y}],\boldsymbol{Z}]+[[\boldsymbol{X},L(\boldsymbol{Y})],\boldsymbol{Z}]+[[\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}],L(\boldsymbol{Z})]\\
&=\begin{pmatrix}0 & 0\\ n\alpha_1(a)-\alpha_4(a)n & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & a\gamma_2(n)\\ \gamma_3(n)a & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 0\\ \beta_4(1_B)na-na\beta_1(1_B) & 0\end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix}0 & 0\\ n\alpha_1(a)-\alpha_4(a)n & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & a\gamma_2(n)\\ \gamma_3(n)a & 0\end{pmatrix}(\text{根据式}(4))\\
&=\begin{pmatrix}0 & a\gamma_2(n)\\ n\alpha_1(a)-\alpha_4(a)n+\gamma_3(n)a & 0\end{pmatrix},
\end{aligned}
$$

所以

$$
\begin{pmatrix}0 & \gamma_2(na)\\ \gamma_3(na) & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & a\gamma_2(n)\\ n\alpha_1(a)-\alpha_4(a)n+\gamma_3(n)a & 0\end{pmatrix}。
$$

因此,对 $a\in A,n\in N$,均有

$$
\gamma_3(na)=n\alpha_1(a)-\alpha_4(a)n+\gamma_3(n)a,\gamma_2(na)=a\gamma_2(n),
$$

则(ⅲ)成立。

取 $a=1_A$,可得 $n\alpha_1(1_A)=\alpha_4(1_A)n$,结合式(3)和引理 1,知 $L(\boldsymbol{P}_1)=\alpha_1(1_A)\oplus\alpha_4(1_A)\in Z(\boldsymbol{G})$。

类似地,在式(6)中,取 $\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ n & 0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{Y}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & b\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{Z}=\boldsymbol{P}_2$,可得对 $n\in N$, $b\in B$,均有

$$
\gamma_3(bn)=\beta_4(b)n-n\beta_1(b)+b\gamma_3(n),\gamma_2(bn)=\gamma_2(n)b,
$$

则(ⅳ)成立。

最后证(ⅴ)和(ⅵ)。在式(6)中,取 $\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}0 & m\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{P}_1$, $\boldsymbol{Z}=\begin{pmatrix}0 & m\\ 0 & 0\end{pmatrix}$,利用式(5)得 $L([[\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}],\boldsymbol{Z}])=$

$L(\boldsymbol{O})=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$。又 $L(\boldsymbol{P}_1)\in\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{G})$, 所以$[[\boldsymbol{X},L(\boldsymbol{Y})],\boldsymbol{Z}]=[[\boldsymbol{X},L(\boldsymbol{P}_1)],\boldsymbol{Z}]=\boldsymbol{O}$, 于是

$$\begin{aligned}
[[L(\boldsymbol{X}),\boldsymbol{Y}],\boldsymbol{Z}]+[[\boldsymbol{X},L(\boldsymbol{Y})],\boldsymbol{Z}]+[[\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}],L(\boldsymbol{Z})]&=[[L(\boldsymbol{X}),\boldsymbol{Y}],\boldsymbol{Z}]+[[\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}],L(\boldsymbol{Z})]\\
&=\begin{pmatrix}-m\mu_3(m)&0\\0&\mu_3(m)m\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-m\mu_3(m)&0\\0&\mu_3(m)m\end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix}-2m\mu_3(m)&0\\0&2\mu_3(m)m\end{pmatrix},
\end{aligned}$$

因此

$$\begin{pmatrix}-2m\mu_3(m)&0\\0&2\mu_3(m)m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}。$$

于是对 $m\in M$,均有 $\mu_3(m)m=0$, $m\mu_3(m)=0$。

类似地,在式(6)中,取 $\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}0&0\\n&0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{P}_2$, $\boldsymbol{Z}=\begin{pmatrix}0&0\\n&0\end{pmatrix}$,可得对 $n\in N$,均有 $\gamma_2(n)n=0$, $n\gamma_2(n)=0$,则(V)成立。

在式(6)中,取 $\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}1_A&m\\0&0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{Y}=\begin{pmatrix}mn&0\\-n&0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{Z}=\begin{pmatrix}0&-m\\0&1_B\end{pmatrix}$,利用式(5)与 L 的线性性,得

$$L([[\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}],\boldsymbol{Z}])=L\begin{pmatrix}mn&mnm\\-n&-nm\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha_1(mn)-\beta_1(nm)&\mu_2(mnm)-\gamma_2(n)\\\mu_3(mnm)-\gamma_3(n)&\alpha_4(mn)-\beta_4(nm)\end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned}
[[L(\boldsymbol{X}),\boldsymbol{Y}],\boldsymbol{Z}]&=\left[\left[L(\boldsymbol{P}_1)+L\begin{pmatrix}0&m\\0&0\end{pmatrix},\boldsymbol{Y}\right],\boldsymbol{Z}\right]=[[L(\boldsymbol{P}_1),\boldsymbol{Y}],\boldsymbol{Z}]+\left[\left[L\begin{pmatrix}0&m\\0&0\end{pmatrix},\boldsymbol{Y}\right],\boldsymbol{Z}\right]\\
&=\left[\left[L\begin{pmatrix}0&m\\0&0\end{pmatrix},\boldsymbol{Y}\right],\boldsymbol{Z}\right](\text{因为 } L(\boldsymbol{P}_1)\in Z(\boldsymbol{G}))\\
&=\left[\begin{pmatrix}-\mu_2(m)n&-mn\mu_2(m)\\\mu_3(m)mn&n\mu_2(m)\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&-m\\0&1_B\end{pmatrix}\right]\\
&=\left[\begin{pmatrix}-\mu_2(m)n&-mn\mu_2(m)\\0&n\mu_2(m)\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&-m\\0&1_B\end{pmatrix}\right](\text{因为 } \mu_3(m)m=0)\\
&=\begin{pmatrix}0&\mu_2(m)nm\\0&0\end{pmatrix},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[[\boldsymbol{X},L(\boldsymbol{Y})],\boldsymbol{Z}]&=\left[\begin{pmatrix}-m\gamma_3(n)&-\gamma_2(n)+m\alpha_4(mn)-\alpha_1(mn)m\\\gamma_3(n)&\gamma_3(n)m\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&-m\\0&1_B\end{pmatrix}\right]\\
&=\begin{pmatrix}m\gamma_3(n)&2m\gamma_3(n)m-\gamma_2(n)+m\alpha_4(mn)-\alpha_1(mn)m\\-\gamma_3(n)&-\gamma_3(n)m\end{pmatrix},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[[\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}],L(\boldsymbol{Z})]&=\left[[\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}],L\begin{pmatrix}0&-m\\0&0\end{pmatrix}+L(\boldsymbol{P}_2)\right]=\left[[\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}],L\begin{pmatrix}0&-m\\0&0\end{pmatrix}\right]+[[\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}],L(\boldsymbol{P}_2)]\\
&=\left[[\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}],L\begin{pmatrix}0&-m\\0&0\end{pmatrix}\right](\text{因为 } L(\boldsymbol{P}_2)\in Z(\boldsymbol{G}))\\
&=\left[\begin{pmatrix}-mn&-mnm\\n&nm\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&-\mu_2(m)\\-\mu_3(m)&0\end{pmatrix}\right]\\
&=\begin{pmatrix}mnm\mu_3(m)+\mu_2(m)n&mn\mu_2(m)+\mu_2(m)nm\\-nm\mu_3(m)-\mu_3(m)mn&-n\mu_2(m)-\mu_3(m)mnm\end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix}\mu_2(m)n&mn\mu_2(m)+\mu_2(m)nm\\0&-n\mu_2(m)\end{pmatrix}(\text{因为 } \mu_3(m)m=0, m\mu_3(m)=0),
\end{aligned}$$

所以

$$
\begin{aligned}
&[[L(\boldsymbol{X}),\boldsymbol{Y}],\boldsymbol{Z}]+[[\boldsymbol{X},L(\boldsymbol{Y})],\boldsymbol{Z}]+[[\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}],L(\boldsymbol{Z})]\\
=&\begin{pmatrix}0 & \mu_2(m)nm\\ 0 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}m\gamma_3(n) & 2m\gamma_3(n)m-\gamma_2(n)+m\alpha_4(mn)-\alpha_1(mn)m\\ -\gamma_3(n) & -\gamma_3(n)m\end{pmatrix}\\
&+\begin{pmatrix}\mu_2(m)n & mn\mu_2(m)+\mu_2(m)nm\\ 0 & -n\mu_2(m)\end{pmatrix}\\
=&\begin{pmatrix}\mu_2(m)n+m\gamma_3(n) & mn\mu_2(m)+2\mu_2(m)nm+2m\gamma_3(n)m-\gamma_2(n)+m\alpha_4(mn)-\alpha_1(mn)m\\ -\gamma_3(n) & -n\mu_2(m)-\gamma_3(n)m\end{pmatrix}。
\end{aligned}
$$

于是

$$
\begin{aligned}
&\begin{pmatrix}\alpha_1(mn)-\beta_1(nm) & \mu_2(mnm)-\gamma_2(n)\\ \mu_3(mnm)-\gamma_3(n) & \alpha_4(mn)-\beta_4(nm)\end{pmatrix}\\
=&\begin{pmatrix}\mu_2(m)n+m\gamma_3(n) & mn\mu_2(m)+2\mu_2(m)nm+2m\gamma_3(n)m-\gamma_2(n)+m\alpha_4(mn)-\alpha_1(mn)m\\ -\gamma_3(n) & -n\mu_2(m)-\gamma_3(n)m\end{pmatrix}。
\end{aligned}
$$

因此,对 $m\in M,n\in N$,均有

$$\alpha_1(mn)-\beta_1(nm)=\mu_2(m)n+m\gamma_3(n),\beta_4(nm)-\alpha_4(mn)=n\mu_2(m)+\gamma_3(n)m,$$

则(ⅵ)成立。

3　零点李三重导子与导子和奇异 Jordan 导子的关系

定理 2　设 $\boldsymbol{G}=\boldsymbol{G}(A,M,N,B)$ 是广义矩阵代数且满足:

(1) $\pi_A(Z(\boldsymbol{G}))=Z(A)$, $\pi_B(Z(\boldsymbol{G}))=Z(B)$;

(2) $Z(A)=\{a\in A\mid[[a,x],y]=0,\ \forall x,y\in A\}$ 或 $Z(B)=\{b\in B\mid[[b,x],y]=0,\ \forall x,y\in B\}$,

设 $\Delta:\boldsymbol{G}\to\boldsymbol{G}$ 是 $\boldsymbol{G}$ 上的零点李三重导子,那么 Δ 可表为 $\Delta=d+\delta+\tau$,其中 d 是 $\boldsymbol{G}$ 上的导子,δ 是 $\boldsymbol{G}$ 上的奇异 Jordan导子,$\tau:\boldsymbol{G}\to Z(\boldsymbol{G})$ 是一个 R-线性映射且满足 $\boldsymbol{XY}=\boldsymbol{XZ}=\boldsymbol{O}$ 时,$\tau([[\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}],\boldsymbol{Z}])=\boldsymbol{O}$ 的充要条件是对 $m\in M$, $n\in N$,均有 $\beta_1(nm)\oplus\alpha_4(mn)\in Z(\boldsymbol{G})$,其中 α_4 和 β_1 如同定理 1。

为证明定理 2,先给出如下引理。

引理 4　设 $\boldsymbol{G}=\boldsymbol{G}(A,M,N,B)$ 是广义矩阵代数且满足

(1) $\pi_A(Z(\boldsymbol{G}))=Z(A)$, $\pi_B(Z(\boldsymbol{G}))=Z(B)$;

(2) $Z(A)=\{a\in A\mid[[a,x],y]=0,\forall x,y\in A\}$ 或 $Z(B)=\{b\in B\mid[[b,x],y]=0,\forall x,y\in B\}$,

设 $\Delta:\boldsymbol{G}\to\boldsymbol{G}$ 是 $\boldsymbol{G}$ 上的零点李三重导子,那么对 $a\in A$, $b\in B$,均有 $\alpha_4(a)\in Z(B)$, $\beta_1(b)\in Z(A)$,其中 α_4 和 β_1 如同定理 1。

证明　设 $\Delta:\boldsymbol{G}\to\boldsymbol{G}$ 是 $\boldsymbol{G}$ 上的零点李三重导子,由定理 1 知,$\forall\begin{pmatrix}a & m\\ n & b\end{pmatrix}\in\boldsymbol{G}$,均有

$$\Delta\begin{pmatrix}a & m\\ n & b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha_1(a)+\beta_1(b)-mn_0-m_0n & am_0-m_0b+\mu_2(m)+\gamma_2(n)\\ n_0a-bn_0+\mu_3(m)+\gamma_3(n) & \alpha_4(a)+\beta_4(b)+nm_0+n_0m\end{pmatrix},$$

式中,$m_0\in M$, $n_0\in N$, $\alpha_1:A\to A$, $\beta_1:B\to A$, $\mu_2:M\to M$, $\gamma_2:N\to M$, $\mu_3:M\to N$, $\gamma_3:N\to N$, $\alpha_4:A\to B$ 和 $\beta_4:B\to B$ 均为 R-线性映射,且满足定理 1 中的(ⅰ)—(ⅵ)。

因为 $\Delta:\boldsymbol{G}\to\boldsymbol{G}$ 是 $\boldsymbol{G}$ 的零点李三重导子,所以对 $\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y},\boldsymbol{Z}\in\boldsymbol{G}$,当 $\boldsymbol{XY}=\boldsymbol{XZ}=\boldsymbol{O}$ 时,有

$$\Delta([[\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}],\boldsymbol{Z}])=[[\Delta(\boldsymbol{X}),\boldsymbol{Y}],\boldsymbol{Z}]+[[\boldsymbol{X},\Delta(\boldsymbol{Y})],\boldsymbol{Z}]+[[\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}],\Delta(\boldsymbol{Z})]。\tag{7}$$

在式(7)中取 $\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & b\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{Y}=\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{Z}=\begin{pmatrix}0 & m\\ 0 & 0\end{pmatrix}$,经计算,得 $\Delta([[\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}],\boldsymbol{Z}])=\Delta(\boldsymbol{O})=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, 同时 $[[\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}],\Delta(\boldsymbol{Z})]=\boldsymbol{O}$,于是

$$[[\Delta(\boldsymbol{X}),\boldsymbol{Y}],\boldsymbol{Z}]+[[\boldsymbol{X},\Delta(\boldsymbol{Y})],\boldsymbol{Z}]+[[\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}],\Delta(\boldsymbol{Z})]=[[\Delta(\boldsymbol{X}),\boldsymbol{Y}],\boldsymbol{Z}]+[[\boldsymbol{X},\Delta(\boldsymbol{Y})],\boldsymbol{Z}]$$
$$=\begin{pmatrix} mbn_0a & (\beta_1(b)a-a\beta_1(b))m \\ 0 & -bn_0am \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -mbn_0a & -m(b\alpha_4(a)-\alpha_4(a)b) \\ 0 & bn_0am \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} 0 & [\beta_1(b),a]m-m[b,\alpha_4(a)] \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

所以

$$\begin{pmatrix} 0 & [\beta_1(b),a]m-m[b,\alpha_4(a)] \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

因此$[\beta_1(b),a]m=m[b,\alpha_4(a)]$。由引理 2,知

$$[\beta_1(b),a]\in Z(A)=\pi_A(Z(\boldsymbol{G})),[b,\alpha_4(a)]\in Z(B)=\pi_B(Z(\boldsymbol{G})),[\beta_1(b),a]\oplus[b,\alpha_4(a)]\in Z(\boldsymbol{G})。$$

再由引理 1 知, $\eta([\beta_1(b),a])=[b,\alpha_4(a)]$,这里的 η 同引理 1。

根据条件(2), 假设 $Z(A)=\{a\in A\mid[[a,x],y]=0,\forall x,y\in A\}$。

因为对 $x\in A$, $[\beta_1(b),x]\in Z(A)$, 所以对 $x,y\in A$, 有$[[\beta_1(b),x],y]=0$, 即 $\beta_1(b)\in Z(A)$。于是,对 $a\in A$, $b\in B$, $[b,\alpha_4(a)]=\eta([\beta_1(b),a])=\eta(0)=0$,即 $\alpha_4(a)\in Z(B)$。

定理 2 的证明。设 $\Delta:\boldsymbol{G}\to\boldsymbol{G}$ 是 $\boldsymbol{G}$ 上的零点李三重导子,由定理 1 知, $\forall\begin{pmatrix} a & m \\ n & b \end{pmatrix}\in\boldsymbol{G}$,均有

$$\Delta\begin{pmatrix} a & m \\ n & b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha_1(a)+\beta_1(b)-mn_0-m_0n & am_0-m_0b+\mu_2(m)+\gamma_2(n) \\ n_0a-bn_0+\mu_3(m)+\gamma_3(n) & \alpha_4(a)+\beta_4(b)+nm_0+n_0m \end{pmatrix},$$

式中,$m_0\in M$, $n_0\in N$, $\alpha_1:A\to A$, $\beta_1:B\to A$, $\mu_2:M\to M$, $\gamma_2:N\to M$, $\mu_3:M\to N$, $\gamma_3:N\to N$, $\alpha_4:A\to B$ 和$\beta_4:B\to B$ 均为 R-线性映射,且满足定理 1 中的(ⅰ)—(ⅵ)。

必要性。假设 $\Delta=d+\delta+\tau$,其中 d 是 $\boldsymbol{G}$ 上的导子,δ 是 $\boldsymbol{G}$ 上的奇异 Jordan 导子,$\tau:\boldsymbol{G}\to Z(\boldsymbol{G})$是一个 R-线性映射且满足 $\boldsymbol{XY}=\boldsymbol{XZ}=\boldsymbol{O}$ 时,$\tau([[\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}],\boldsymbol{Z}])=\boldsymbol{O}$。

下证 $\forall m\in M$, $n\in N$,均有 $\beta_1(nm)\oplus\alpha_4(mn)\in Z(\boldsymbol{G})$。

因为 d 是 $\boldsymbol{G}$ 上的导子, 所以由引理 3 知, $d\begin{pmatrix} 1_A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} d_1(1_A) & m'_0 \\ n'_0 & 0 \end{pmatrix}$, 且对 $m\in M$, $d\begin{pmatrix} 0 & m \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -mn'_0 & \mu'_2(m) \\ 0 & n'_0m \end{pmatrix}$,其中,$m'_0\in M$, $n'_0\in N$, d_1 是 A 上的导子,μ'_2是 M 上的 R-线性映射。因为δ 是 $\boldsymbol{G}$ 上的奇异 Jordan 导子,所以对 $\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix} a & m \\ n & b \end{pmatrix}\in\boldsymbol{G}$, 均有

$$\delta(\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{X}\boldsymbol{P}_1)=\boldsymbol{O},\ \delta(\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{X}\boldsymbol{P}_2)\in\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{G}\boldsymbol{P}_1,$$

因此

$$\delta\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\delta(\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{X}\boldsymbol{P}_1)=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ \delta\begin{pmatrix} 0 & m \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\delta(\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{X}\boldsymbol{P}_2)\in\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{G}\boldsymbol{P}_1=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ N & 0 \end{pmatrix}。$$

于是,存在映射 $g:M\to N$,使得 $\delta\begin{pmatrix} 0 & m \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ g(m) & 0 \end{pmatrix}$。由假设 $\Delta=d+\delta+\tau$,知

$$\tau\begin{pmatrix} 1_A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\Delta\begin{pmatrix} 1_A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}-d\begin{pmatrix} 1_A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}-\delta\begin{pmatrix} 1_A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha_1(1_A) & m_0 \\ n_0 & \alpha_4(1_A) \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} d_1(1_A) & m'_0 \\ n'_0 & 0 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} \alpha_1(1_A)-d_1(1_A) & m_0-m'_0 \\ n_0-n'_0 & \alpha_4(1_A) \end{pmatrix}。$$

而 $\tau\begin{pmatrix} 1_A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\in Z(\boldsymbol{G})$,所以由引理 1 知,$m'_0=m_0$, $n'_0=n_0$。同时

$$\tau\begin{pmatrix}0&m\\0&0\end{pmatrix}=\Delta\begin{pmatrix}0&m\\0&0\end{pmatrix}-d\begin{pmatrix}0&m\\0&0\end{pmatrix}-\delta\begin{pmatrix}0&m\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-mn_0&\mu_2(m)\\\mu_3(m)&n_0m\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-mn'_0&\mu'_2(m)\\0&n'_0m\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&0\\g(m)&0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0&\mu_2(m)-\mu'_2(m)\\\mu_3(m)-g(m)&0\end{pmatrix}\text{(因为 }n'_0=n_0\text{)},$$

而 $\tau\begin{pmatrix}0&m\\0&0\end{pmatrix}\in Z(\boldsymbol{G})$,所以由引理 1 知,$\mu'_2(m)=\mu_2(m)$, $g(m)=\mu_3(m)$,即对 $m\in M$,有

$$d\begin{pmatrix}0&m\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-mn_0&\mu_2(m)\\0&n_0m\end{pmatrix}。$$

类似可证,对 $n\in N$,有

$$d\begin{pmatrix}0&0\\n&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-m_0n&0\\\gamma_3(n)&nm_0\end{pmatrix}。$$

因此,对 $m\in M,n\in N$,有

$$d\begin{pmatrix}mn&0\\0&0\end{pmatrix}=d\left(\begin{pmatrix}0&m\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\n&0\end{pmatrix}\right)=d\begin{pmatrix}0&m\\0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&0\\n&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&m\\0&0\end{pmatrix}\cdot d\begin{pmatrix}0&0\\n&0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\mu_2(m)n+m\gamma_3(n)&m(nm_0)\\(n_0m)n&0\end{pmatrix}。$$

再利用 $\Delta\begin{pmatrix}mn&0\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha_1(mn)&(mn)m_0\\n_0(mn)&\alpha_4(mn)\end{pmatrix}$、$\delta\begin{pmatrix}mn&0\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$以及定理 1(ⅵ),得

$$\tau\begin{pmatrix}mn&0\\0&0\end{pmatrix}=\Delta\begin{pmatrix}mn&0\\0&0\end{pmatrix}-d\begin{pmatrix}mn&0\\0&0\end{pmatrix}-\delta\begin{pmatrix}mn&0\\0&0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\alpha_1(mn)&(mn)m_0\\n_0(mn)&\alpha_4(mn)\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\mu_2(m)n+m\gamma_3(n)&m(nm_0)\\(n_0m)n&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\alpha_1(mn)-\mu_2(m)n-m\gamma_3(n)&0\\0&\alpha_4(mn)\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\beta_1(nm)&0\\0&\alpha_4(mn)\end{pmatrix}。$$

因为 $\tau\begin{pmatrix}mn&0\\0&0\end{pmatrix}\in Z(\boldsymbol{G})$,所以$\begin{pmatrix}\beta_1(nm)&0\\0&\alpha_4(mn)\end{pmatrix}\in Z(\boldsymbol{G})$,即 $\beta_1(nm)\oplus\alpha_4(mn)\in Z(\boldsymbol{G})$。

充分性。根据引理 4,对 $a\in A,b\in B$,均有

$$\alpha_4(a)\in Z(B)=\pi_B(Z(\boldsymbol{G})),\ \beta_1(b)\in Z(A)=\pi_A(Z(\boldsymbol{G})),\tag{8}$$

由引理 1 知,存在唯一的同构映射 $\eta:Z(A)\to Z(B)$,使得

$$\eta^{-1}(\alpha_4(a))m=m\alpha_4(a),\ n\eta^{-1}(\alpha_4(a))=\alpha_4(a)n,\ \beta_1(b)m=m\eta(\beta_1(b)),\ n\beta_1(b)=\eta(\beta_1(b))n。\tag{9}$$

作映射 $d:\boldsymbol{G}\to\boldsymbol{G}$, $\delta:\boldsymbol{G}\to\boldsymbol{G}$ 与 $\tau:\boldsymbol{G}\to\boldsymbol{G}$ 使得

$$d\begin{pmatrix}a&m\\n&b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha_1(a)-\eta^{-1}(\alpha_4(a))-mn_0-m_0n&am_0-m_0b+\mu_2(m)\\n_0a-bn_0+\gamma_3(n)&\beta_4(b)-\eta(\beta_1(b))+nm_0+n_0m\end{pmatrix},$$

$$\delta\begin{pmatrix}a&m\\n&b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&\gamma_2(n)\\\mu_3(m)&0\end{pmatrix},$$

$$\tau\begin{pmatrix}a&m\\n&b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\eta^{-1}(\alpha_4(a))+\beta_1(b)&0\\0&\alpha_4(a)+\eta(\beta_1(b))\end{pmatrix}。$$

显然,d,δ 与 τ 均为 R-线性映射,并且 $\Delta=d+\delta+\tau$。

先证 d 是 $\boldsymbol{G}$ 上的导子。

作映射$d_1:A\to A$，$d_4:B\to B$使得

$$d_1(a)=\alpha_1(a)-\eta^{-1}(\alpha_4(a)),d_4(b)=\beta_4(b)-\eta(\beta_1(b))。$$

显然,d_1，d_4均为R-线性映射,同时

$$d\begin{pmatrix}a & m\\ n & b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}d_1(a)-mn_0-m_0n & am_0-m_0b+\mu_2(m)\\ n_0a-bn_0+\gamma_3(n) & d_4(b)+nm_0+n_0m\end{pmatrix}。$$

由定理1中的(ⅰ)—(ⅳ)和式(9),知对$a\in A$，$b\in B$，$m\in M$,均有

$$\mu_2(am)=(\alpha_1(a)-\eta^{-1}(\alpha_4(a)))m+a\mu_2(m)=d_1(a)m+a\mu_2(m),\tag{10}$$

$$\mu_2(mb)=\mu_2(m)b+m(\beta_4(b)-\eta(\beta_1(b)))=\mu_2(m)b+md_4(b),\tag{11}$$

$$\gamma_3(na)=\gamma_3(n)a+n(\alpha_1(a)-\eta^{-1}(\alpha_4(a)))=\gamma_3(n)a+nd_1(a),\tag{12}$$

$$\gamma_3(bn)=(\beta_4(b)-\eta(\beta_1(b)))n+b\gamma_3(n)=d_4(b)n+b\gamma_3(n),\tag{13}$$

由式(10),知对$a,a'\in A,m\in M$,均有

$\mu_2(aa'm)=d_1(aa')m+aa'\mu_2(m)$,同时

$$\mu_2(aa'm)=\mu_2(a(a'm))=d_1(a)a'm+a\mu_2(a'm)=d_1(a)a'm+a(d_1(a')m+a'\mu_2(m))$$
$$=d_1(a)a'm+ad_1(a')m+aa'\mu_2(m),$$

所以$d_1(aa')m=(d_1(a)a'+ad_1(a'))m$。

因为M是忠实的(A,B)-双模,所以$d_1(aa')=d_1(a)a'+ad_1(a')$,故$d_1$是$A$上的导子。

同样,由式(11),对$m\in M,b,b'\in B$,均有

$\mu_2(mbb')=\mu_2(m)bb'+md_4(bb')$,同时

$$\mu_2(mbb')=\mu_2((mb)b')=\mu_2(mb)b'+mbd_4(b')=(\mu_2(m)b+md_4(b))b'+mbd_4(b')$$
$$=\mu_2(m)bb'+md_4(b)b'+mbd_4(b'),$$

所以$md_4(bb')=m(d_4(b)b'+bd_4(b'))$。

因为M是忠实的(A,B)-双模,所以$d_4(bb')=d_4(b)b'+bd_4(b')$,故$d_4$是$B$上的导子。

假设对$m\in M$，$n\in N$,$\beta_1(nm)\oplus\alpha_4(mn)\in Z(\boldsymbol{G})$，由引理1,得

$$\eta(\beta_1(nm))=\alpha_4(mn),\ \eta^{-1}(\alpha_4(mn))=\beta_1(nm)。$$

由定理1中的(ⅵ),知

$$d_1(mn)=\alpha_1(mn)-\eta^{-1}(\alpha_4(mn))=\alpha_1(mn)-\beta_1(nm)=\mu_2(m)n+m\gamma_3(n),\tag{14}$$

$$d_4(nm)=\beta_4(nm)-\eta(\beta_1(nm))=\beta_4(nm)-\alpha_4(mn)=n\mu_2(m)+\gamma_3(n)m。\tag{15}$$

由式(10)—(15)及引理3,知d是$\boldsymbol{G}$上的导子。

再证δ是$\boldsymbol{G}$上的奇异Jordan导子。

由定理1中的(ⅰ)—(ⅳ)知,对$a\in A$，$b\in B$，$m\in M$，$n\in N$,均有

$$\mu_3(am)=\mu_3(m)a;\ \mu_3(mb)=b\mu_3(m);\ \gamma_2(na)=a\gamma_2(n);\ \gamma_2(bn)=\gamma_2(n)b。$$

所以$\forall\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}a & m\\ n & b\end{pmatrix}\in\boldsymbol{G}$,有

$$\delta(\boldsymbol{X}^2)=\delta\begin{pmatrix}a^2+mn & am+mb\\ na+bn & nm+b^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & \gamma_2(na+bn)\\ \mu_3(am+mb) & 0\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}0 & a\gamma_2(n)+\gamma_2(n)b\\ \mu_3(m)a+b\mu_3(m) & 0\end{pmatrix}。$$

由定理1中的(ⅴ)知,对$m\in M$，$n\in N$,均有

$$\mu_3(m)m=0,\ m\mu_3(m)=0,\ \gamma_2(n)n=0,\ n\gamma_2(n)=0,$$

所以

$$\delta(\boldsymbol{X})\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}0 & \gamma_2(n)\\ \mu_3(m) & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & m\\ n & b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\gamma_2(n)n & \gamma_2(n)b\\ \mu_3(m)a & \mu_3(m)m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & \gamma_2(n)b\\ \mu_3(m)a & 0\end{pmatrix},$$

$$X\delta(X)=\begin{pmatrix}a & m\\ n & b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & \gamma_2(n)\\ \mu_3(m) & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}m\mu_3(m) & a\gamma_2(n)\\ b\mu_3(m) & n\gamma_2(n)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & a\gamma_2(n)\\ b\mu_3(m) & 0\end{pmatrix},$$

于是 $\delta(X^2)=\delta(X)X+X\delta(X)$。由注 1 知, δ 是 G 上的 Jordan 导子。

进一步地,利用 $\delta\begin{pmatrix}a & m\\ n & b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & \gamma_2(n)\\ \mu_3(m) & 0\end{pmatrix}$,不难验证,对 $X\in G$,均有

$$\delta(P_1XP_1)=O,\ \delta(P_2XP_2)=O,\ \delta(P_1XP_2)\in P_2GP_1,\ \delta(P_2XP_1)\in P_1GP_2,$$

所以 δ 是 G 上的奇异 Jordan 导子。

最后证明对 $X,Y,Z\in G$, $\tau(X)\in Z(G)$ 且当 $XY=XZ=O$ 时,$\tau([[X,Y],Z])=O$。

由式(8)知,对 $a\in A$, $b\in B$,均有

$$\alpha_4(a)\in Z(B)=\pi_B(Z(G)),\ \beta_1(b)\in Z(A)=\pi_A(Z(G)),$$

所以由引理 1 知,对 $X=\begin{pmatrix}a & m\\ n & b\end{pmatrix}\in G$,

$$\tau(X)=\begin{pmatrix}\eta^{-1}(\alpha_4(a))+\beta_1(b) & 0\\ 0 & \alpha_4(a)+\eta(\beta_1(b))\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\eta^{-1}(\alpha_4(a)) & 0\\ 0 & \alpha_4(a)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\beta_1(b) & 0\\ 0 & \eta(\beta_1(b))\end{pmatrix}\in Z(G)。$$

因为 d 是 G 上的导子,δ 是 G 上的奇异 Jordan 导子,所以 d 与 δ 是 G 上的李三重导子,当然是 G 上的零点李三重导子,$\tau=\Delta-d-\delta$ 是 G 上的零点李三重导子,因此,对 $X,Y,Z\in G$ 且 $XY=XZ=O$ 时,

$$\tau([[X,Y],Z])=[[\tau(X),Y],Z]+[[X,\tau(Y)],Z]+[[X,Y],\tau(Z)]。$$

又因为对 $X\in G$, $\tau(X)\in Z(G)$, 所以

$$[[\tau(X),Y],Z]+[[X,\tau(Y)],Z]+[[X,Y],\ \tau(Z)]=O,$$

故 $\tau([[X,Y],Z])=O$。

在定理 2 中,如果 $G=G(A,M,N,B)$ 是三角代数,那么 $N=0$。此时,不难验证,G 上的奇异 Jordan 导子 $\delta=0$,同时 $\beta_1(nm)\oplus\alpha_4(mn)=\beta_1(0)\oplus\alpha_4(0)=0\in Z(G)$。由定理 2 有如下推论。

推论 1[15]　设 $T=T(A,M,B)$ 是三角代数且满足

(1) $\pi_A(Z(T))=Z(A)$, $\pi_B(Z(T))=Z(B)$;

(2) $Z(A)=\{a\in A\,|\,[[a,x],y]=0,\ \forall x,y\in A\}$ 或 $Z(B)=\{b\in B\,|\,[[b,x],y]=0,\ \forall x,y\in B\}$。

设 $\Delta:T\to T$ 是 T 上的零点李三重导子,那么 $\Delta=d+\tau$,其中 d 是 T 上的导子,$\tau:T\to Z(T)$ 是一个 R-线性映射且满足 $XY=XZ=O$ 时, $\tau([[X,Y],Z])=O$。

定理 3　设 $G=G(A,M,N,B)$ 是广义矩阵代数且满足

(1) $\pi_A(Z(G))=Z(A)$, $\pi_B(Z(G))=Z(B)$;

(2) $Z(A)=\{a\in A\,|\,[[a,x],y]=0,\ \forall x,y\in A\}$ 或 $Z(B)=\{b\in B\,|\,[[b,x],y]=0,\ \forall x,y\in B\}$;

(3) A 或 B 不包含非零中心理想,

设 $\Delta:G\to G$ 是 G 上的零点李三重导子,那么 $\Delta=d+\delta+\tau$,其中 d 是 G 上的导子,δ 是 G 上的奇异 Jordan 导子,$\tau:G\to Z(G)$ 是一个 R-线性映射且满足 $XY=XZ=O$ 时, $\tau([[X,Y],Z])=O$。

证明　根据定理 2,仅需证明对 $m\in M$, $n\in N$, $\beta_1(nm)\oplus\alpha_4(mn)\in Z(G)$ 即可。

设 $\Delta:G\to G$ 是 G 上的零点李三重导子,由定理 1 知, $\forall\begin{pmatrix}a & m\\ n & b\end{pmatrix}\in G$,均有

$$\Delta\begin{pmatrix}a & m\\ n & b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha_1(a)+\beta_1(b)-mn_0-m_0n & am_0-m_0b+\mu_2(m)+\gamma_2(n)\\ n_0a-bn_0+\mu_3(m)+\gamma_3(n) & \alpha_4(a)+\beta_4(b)+nm_0+n_0m\end{pmatrix},$$

式中,$m_0\in M$, $n_0\in N$, $\alpha_1:A\to A$, $\beta_1:B\to A$, $\mu_2:M\to M$, $\gamma_2:N\to M$, $\mu_3:M\to N$, $\gamma_3:N\to N$, $\alpha_4:A\to B$ 和 $\beta_4:B\to B$ 均为 R-线性映射,且满足定理 1 中的(ⅰ)—(ⅵ)。

根据引理 4,对 $a\in A,b\in B$,均有

$$\alpha_4(a)\in Z(B)=\pi_B(Z(G)),\ \beta_1(b)\in Z(A)=\pi_A(Z(G))。$$

由引理 1 知,存在唯一的同构映射 $\eta: Z(A)\to Z(B)$,使得

$$\eta^{-1}(\alpha_4(a))m=m\alpha_4(a)。\tag{16}$$

令 $d_1(a)=\alpha_1(a)-\eta^{-1}(\alpha_4(a))$,那么由定理 1 中的(ⅰ)和式(16)知,对 $a\in A$, $m\in M$,均有

$$\mu_2(am)=(\alpha_1(a)-\eta^{-1}(\alpha_4(a)))m+a\mu_2(m)=d_1(a)m+a\mu_2(m),\tag{17}$$

于是,对 $a,a'\in A,m\in M$,均有

$\mu_2(aa'm)=d_1(aa')m+aa'\mu_2(m)$,同时

$$\begin{aligned}\mu_2(aa'm)&=\mu_2(a(a'm))=d_1(a)a'm+a\mu_2(a'm)=d_1(a)a'm+a(d_1(a')m+a'\mu_2(m))\\&=d_1(a)a'm+ad_1(a')m+aa'\mu_2(m),\end{aligned}$$

所以 $d_1(aa')m=(d_1(a)a'+ad_1(a'))m$。

因为 M 是忠实的(A,B)-双模,所以

$$d_1(aa')=d_1(a)a'+ad_1(a')。\tag{18}$$

不失一般性,假设 A 不包含非零中心理想,对 $a\in A$, $m\in M,n\in N$,有

$$\begin{aligned}a(\beta_1(nm)-\eta^{-1}(\alpha_4(mn)))&=a(\alpha_1(mn)-\mu_2(m)n-m\gamma_3(n)-\eta^{-1}(\alpha_4(mn)))\ (\text{根据定理 1(ⅵ)})\\&=a(\alpha_1(mn)-\eta^{-1}(\alpha_4(mn)))-a\mu_2(m)n-am\gamma_3(n)\\&=ad_1(mn)-a\mu_2(m)n-am\gamma_3(n)\\&=d_1(amn)-d_1(a)mn-a\mu_2(m)n-am\gamma_3(n)\ (\text{根据式(18)})\\&=d_1(amn)-\mu_2(am)n-am\gamma_3(n)\ (\text{根据式(17)})\\&=\alpha_1(amn)-\eta^{-1}(\alpha_4(amn))-\mu_2(am)n-am\gamma_3(n)\\&=\beta_1(nam)-\eta^{-1}(\alpha_4(amn))\ (\text{根据定理 1 中的(ⅵ)}),\end{aligned}$$

因为 $\alpha_4(amn)\in Z(B)$, 所以 $\eta^{-1}(\alpha_4(amn))\in Z(A)$, 而 $\beta_1(nam)\in Z(A)$, 于是 $\beta_1(nam)-\eta^{-1}(\alpha_4(amn))\in Z(A)$,因此 $a(\beta_1(nm)-\eta^{-1}(\alpha_4(mn)))\in Z(A)$, $A(\beta_1(nm)-\eta^{-1}(\alpha_4(mn)))$是 A 的一个中心理想,而 A 不包含非零中心理想,所以 $\beta_1(nm)-\eta^{-1}(\alpha_4(mn))=0$,即 $\beta_1(nm)=\eta^{-1}(\alpha_4(mn))$。由引理 1,知

$$\beta_1(nm)\oplus\alpha_4(mn)\in Z(\boldsymbol{G})。$$

由于含单位元的交换环 R 上的全矩阵代数 $M_n(R)(n\geqslant 2)$是 R 上的广义矩阵代数,并可直接验证$M_n(R)(n\geqslant 3)$满足定理 3 的条件(1)—(3),且不存在非零的奇异 Jordan 导子, 所以,作为定理 3 的应用,可得以下推论。

推论 2 设 R 是含单位元 2-非挠的交换环,$M_n(R)(n\geqslant 3)$是 R 上的全矩阵代数,$\Delta: M_n(R)\to M_n(R)$是 $M_n(R)$上的零点李三重导子,那么 $\Delta=d+\tau$,其中 d 是 $M_n(R)$上的导子,$\tau: M_n(R)\to Z(M_n(R))=R\boldsymbol{I}_n$ 是一个 R-线性映射且对 $\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y},\boldsymbol{Z}\in M_n(R)$,满足 $\boldsymbol{XY}=\boldsymbol{XZ}=\boldsymbol{O}$ 时,$\tau([[\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}],\boldsymbol{Z}])=\boldsymbol{O}$。

4 结论

本文研究了广义矩阵代数上零点李三重导子的结构,获得了零点李三重导子可表为一个导子、1 个奇异 Jordan导子和 1 个中心值映射之和的等价条件,所得结果推广了三角代数中的相应结论。作为一个应用,本文证明了全矩阵代数 $M_n(R)(n\geqslant 3)$上每一个零点李三重导子都具有标准形。

参考文献:

[1] XIAO Zhankui, WEI Feng. Commuting mappings of generalized matrix algebras[J]. Linear Algebra and Its Applications, 2010, 433(11/12):2178-2197.

[2] MORITA K. Duality for modules and its applications to the theory of rings with minimum condition[J].Science Reports of the Tokyo Kyoiku Daigaku Section A, 1958, 6:83-142.

[3] DEMEYER F, INGRAHAM E. Separable algebras over commutative rings[M]. NewYork: Springer, 1971.

[4] MCCONNELL J C, ROBSON J C. NoncommutativeNoetherianrings[M]. Providence:American Mathematical Society, 2001.

[5] CHEUNG W S. Lie derivations of triangular algebras[J]. Linear and Multilinear Algebra, 2003, 51(3):299-310.
[6] MIERS C R. Lie triple derivations of von Neumann algebras[J]. Proceedings of the American Mathematical Society, 1978, 71(1):57-57.
[7] BRESAR M. Commuting traces of biadditive mappings, commutativity-preserving mappings and Lie mappings[J]. Transactions of the American Mathematical Society,1993, 335(2):525-546.
[8] JI Peisheng, WANG Lin. Lie triple derivations of TUHF algebras[J]. Linear Algebra and Its Applications, 2005, 403(1):399-408.
[9] LU Fangyan. Lie triple derivations on nest algebras[J]. Mathematische Nachrichten, 2007, 280(8):882-887.
[10] ZHANG Jianhua, WU Baowei, CAO Huaixin. Lie triple derivations of nest algebras[J]. Linear Algebra and Its Applications, 2006, 416(2):559-567.
[11] XIAO Zhankui, WEI Feng. Lie triple derivations of triangular algebras[J]. Linear Algebra and Its Applications, 2012, 437(5):1234-1249.
[12] BENKOVIC D. Lie triple derivations of unital algebras with idempotents[J]. Linear and Multilinear Algebra, 2015, 63(1):141-165.
[13] ASHRAFM, AKHTAR M S. Characterizations of Lie triple derivations on generalized matrix algebras[J]. Communications in Algebra, 2020, 48(9):3651-3660.
[14] LIU Lei. Lie triple derivations on factor von Neumann algebras[J]. Bulletin of the Korean Mathematical Society, 2015, 52(2):581-591.
[15] 白延丽,张建华. 三角代数上 Lie 三重导子的刻画[J]. 数学学报(中文版), 2017, 60(1):31-38.
BAI Yanli, ZHANG Jianhua. Characterizations of Lie triple derivations on triangular algebras[J]. Acta Math Sinica, 2017, 60(1):31-38.
[16] LIU Lei. Lie triple derivations on von Neumann algebras[J]. Chinese Annals of Mathematics(Series B), 2018, 39(5):817-828.
[17] ZHAO Xingpeng. Nonlinear Lie triple derivations by local actions on triangular algebras[J]. Journal of Algebra and Its Applications, 2023, 22(3):1-15.
[18] JACOBSON N. Basic algebra, II[M]. New York: W H Freeman and Company, 1989.
[19] LI Yanbo, WEI Feng. Semi-centralizing maps of generalized matrix algebras[J]. Linear Algebra and Its Applications, 2012, 436(5):1122-1153.

(编辑:陈丽萍)

(上接第 133 页)

[12] CHEN H X, MOHAMMED H S E, LIN W J, et al. The projective class rings of a family of pointed Hopf algebras of rank two[J]. Bulletin of the Belgian Mathematical Society-Simon Stevin, 2016, 23(5):693-711.
[13] CHEN H X, MOHAMMED H S E, SUN H. Indecomposable decomposition of tensor products of modules over Drinfeld doubles of Taft algebras[J]. Journal of Pure Applied Algebra, 2017, 221(11):2752-2790.
[14] SUN H, MOHAMMED H S E, LIN W J, et al. Green rings of Drinfeld doubles of Taft algebras[J]. Communications in Algebra, 2020, 48(9):3933-3947.
[15] BENKART G, BISWAL R, KIRKMAN E, et al. Tensor representations for the Drinfeld double of the Taft algebra[J]. Journal of Algebra, 2022, 606(3):764-797.
[16] FERRARO L, KIRKMAN E, MOORE W F, et al. Three infinite families of reflection Hopf algebras[J]. Journal of Pure and Applied Algebra, 2020, 224(8):106315.
[17] KIRKMAN E, ZHANGJian. The Jacobian, reflection arrangement and discriminant for reflection Hopf algebras[J]. International Mathematics Research Notices, 2021, 13(4):9853-9907.
[18] MONTGOMERY S. Hopf algebras and their actions on rings[M]. Rhode Island: AMS, 1993.
[19] KASSEL C. Quantum groups[M]. New York: Springer, 1995.

(编辑:陈丽萍)