文章编号:1671-9352(2025)11-0011-05 DOI:10.6040/j.issn.1671-9352.0.2023.397

三类子群的迹对可解群的影响

张佳[1,2],何金旅[1*],向艳辉[1],吴金莲[1]
(1.西华师范大学数学与信息学院, 四川 南充 637009; 2.东北师范大学数学与统计学院, 吉林 长春 130024)

摘要:分析容许子群的迹的超可解性质对群的可解性的影响,将所有极大子群分为$\mathscr{F}_p$(指数为素数的极大子群)、$\mathscr{F}_c$(指数为合数的极大子群),揭示$\mathscr{F}_c$中每个极大子群的迹的幂零性与可解群的结构的联系,将极大子群条件拓展到 2-极大子群,得到关于可解群的 3 个充分必要条件。

关键词:极大子群;容许子群;2-极大子群;迹;可解群
中图分类号:O152.1 **文献标志码**:A
引用格式:张佳,何金旅,向艳辉,等.三类子群的迹对可解群的影响[J]. 山东大学学报(理学版),2025,60(11):11-15.

Influence of traces of some subgroups on solvable groups

ZHANG Jia[1,2], HE Jinlü[1*], XIANG Yanhui[1], WU Jinlian[1]
(1. School of Mathematics and Information, China West Normal University, Nanchong 637009, Sichuan, China; 2. School of Mathematics and Statistics, Northeast Normal University, Changchun 130024, Jilin, China)

Abstract: The influence of the supersolvable property of trace of primitive groups (which cannot be written as a proper intersection of subgroups) on the solvability of groups is analyzed. By dividing all maximal subgroups into two classes $\mathscr{F}_p$ (maximal subgroups whose indices are prime number), $\mathscr{F}_c$ (maximal subgroups whose indices are composite number), the connection between the nilpotency of the trace of every maximal subgroup in $\mathscr{F}_c$ and the structure of solvable groups is studied. By extending maximal subgroups to second maximal subgroups, three sufficient and necessary conditions on solvable groups are obtained.

Key words: maximal subgroup; primitive subgroup; second maximal subgroups; trace; solvable group

0 引言

本文只涉及有限群,以文献[1-3]的术语和符号为标准,$|G|$表示群 G 的阶,$\pi(G)$表示$|G|$的全体素因子的集合,$M\lessdot G$ 表示 M 是 G 的一个极大子群, 令

$$\mathscr{F}_p=\{M\lessdot G \mid |G:M| \text{是素数}\},\quad \mathscr{F}_c=\{M\lessdot G \mid |G:M| \text{是合数}\}。$$

显然,G 的极大子群可以划分为这两类极大子群。

准素子群、(2-)极大子群和容许子群与可解群等群类的结构有着紧密的联系,相关的课题引起了国内外很多群论学者的关注。Hall[4]证明 G 是可解的当且仅当 G 的每个 Sylow 子群在 G 中是可补的;Huppert[5]证明 G 是超可解的当且仅当 G 的每个极大子群在 G 中的指数是素数;Johnson[6]证明若 G 的每个容许子群在 G 中的指数是素数方幂,则 G 是可解的;Feit[7]研究包含 2-极大子群的极大子群的个数问题;Wang[8]证明 G 是可解的当且仅当 G 的 c-极大子群在 G 中是 c-正规的;Levchuk 等[9]探讨极大子群的可补性质与单群结构的关系;Guo 等[10]得到 G 是可解的当且仅当每个极大子群有幂零的迹(或者次正规的迹);Shi[11]在非幂

收稿日期:2023-09-13; **网络出版时间**:2024-06-21 07:05:53
基金项目:四川省自然科学基金资助项目(2022NSFSC1843); 教育部春晖计划合作科研资助项目(HZKY20220567); 中国博士后科学基金资助项目(2023M730545); 国家自然科学基金资助项目(12001436)
第一作者:张佳(1988—),男,副教授,博士,硕士生导师,研究方向为有限群论. E-mail:zhangjia198866@126.com
***通信作者**:何金旅(1999—),男,硕士研究生,研究方向为有限群论. E-mail:2915129865@qq.com

零的极大子群都是正规的条件下,考虑群的结构;谢鑫等[12]利用某些极大准素子群的 c-正规性质分析 p-超可解群和 p-幂零群的结构;陈心丹等[13]分析特定的2-极大子群的边界因子对某些非可解群类结构的影响。

根据文献[10]中的问题:若 G 的每个极大子群有超可解的迹,则 G 是可解的? 本文做了如下的研究:将问题条件中的极大子群拓展到容许子群,将所有极大子群分为 $\mathscr{F}_p$、$\mathscr{F}_c$,考虑 $\mathscr{F}_c$ 中每个极大子群的迹的幂零性,将极大子群条件拓展到2-极大子群,得到关于可解群的3个充分必要条件。

1 预备知识

定义 1[10] 对于 G 的真子群 A,称 A 的主因子$\dfrac{H}{A_G}$是 A 的一个 G-边界因子(或者边界因子),设$\dfrac{H}{A_G}$是 A 的 G-边界因子,称$\dfrac{(A\cap H)}{A_G}$为 A 的一个 G-迹(或者迹),这里,A_G 是 A 在 G 中的柱心。

定义 2[6,14] 设 K 是 G 是一个子群,若 K 不能写成 G 的子群的真交,则称 K 是 G 的容许子群。显然,极大子群是容许子群。

引理 1[15] 若 G 的每个极大子群是超可解的,则 G 是可解的。

引理 2[10] 设 $R\leqslant A\leqslant G$,R 是 G 的正规子群,

(1) 若 $A\leqslant B\leqslant G$ 且 A 是 B 的容许子群,则存在 G 的一个容许子群 X 使得 $A=B\cap X$;

(2) A 是 G 的容许子群当且仅当$\dfrac{A}{R}$是$\dfrac{G}{R}$的容许子群。

引理 3[5] G 是超可解的充要条件是 G 的每个极大子群在 G 中的具有素数指数。

引理 4[10] G 是可解的当且仅当每个极大子群有幂零的迹(或者次正规的迹)。

引理 5[1] 设 $H\leqslant G$,如果 $|G:H|=n$,那么$\dfrac{G}{H_G}$同构于对称群 S_n 的一个子群。

引理 6[16] 设 P 是群 G 的一个 Sylow p-子群,$p\geqslant 5$,如果$\dfrac{N_G(P)}{C_G(P)}$是一个 p-群,那么 $O^p(G)<G$。

引理 7[17-18] 若 G 的每个2-极大子群是幂零的,则 G 是可解的或者 $G\cong \mathrm{PSL}(2,5)$ 或者 $G\cong \mathrm{SL}(2,5)$。

2 主要结果

定理 1 G 是可解群当且仅当每个容许子群具有一个超可解的迹。

证明 *必要性*。因为 G 是可解群,所以 G 的每个主因子是交换的,则 G 的每个容许子群的迹都是超可解的。

充分性。假设定理不真且 G 是极小阶反例。

(1) G 不是一个单群。

若 G 是一个单群,则$\dfrac{G}{1}=\dfrac{G}{M_G}$是每个容许子群 M 的唯一的 G-边界因子。根据定理的假设条件,$\dfrac{(M\cap G)}{M_G}\cong M\cap G=M$ 是超可解的。因为每个极大子群是容许子群,所以每个极大子群是超可解的。根据引理1,G 是可解群,这与 G 是极小阶反例矛盾。

(2) G 具有唯一一个极小正规子群 L,$\dfrac{G}{L}$是可解的且 L 是非可解的。

由步骤(1),可任意选取 G 的一个极小正规子群 L,考虑商群$\dfrac{G}{L}$。对于$\dfrac{G}{L}$的任意一个容许子群$\dfrac{M}{L}$,根据引理2,M 是 G 的容许子群。令$\dfrac{H}{M_G}$、$\dfrac{(H\cap M)}{M_G}$分别是 M 的一个 G-边界因子和迹。因为$\dfrac{H/L}{(M/L)_{G/L}}\cong\dfrac{H}{M_G}$和

$\frac{(H\cap M)/L}{(M/L)_{G/L}}\cong\frac{(H\cap M)}{M_G}$,所以$\frac{H/L}{(M/L)_{G/L}}$是$\frac{M}{L}$一个$\frac{G}{L}$-边界因子,$\frac{(H\cap M)/L}{(M/L)_{G/L}}$是$\frac{M}{L}$的一个迹。根据定理的假设条件,$\frac{(H\cap M)/L}{(M/L)_{G/L}}$是超可解的,因此,$\frac{G}{L}$满足定理的条件。由 G 的极小性,则$\frac{G}{L}$是可解的。因为可解群系是饱和群系且是扩张闭的,所以 L 是 G 的唯一极小正规子群,$L\not\leq\Phi(G)$且 L 是非可解的。

(3) 由步骤(2),可任意选取极小正规子群 L 的一个极大子群 L_1,根据引理 2,存在 G 的一个容许子群 M 使得 $L_1=L\cap M<L$。由于 L 的唯一性以及定理假设条件,所以 M 的迹 $L\cap M=L_1$ 是超可解的,进而,L 的每个极大子群是超可解的。根据引理 1,L 是可解群,这与(2)矛盾。

综上所述,定理 1 得证。

定理 2　设 $\pi=\pi(G)\setminus\{r,5\}$, $r<5$,G 是可解群当且仅当 G 满足下列条件:

(ⅰ) $\mathscr{F}_c$ 中每个极大子群具有一个 π-幂零的迹;

(ⅱ) PSL(2,5)不是 G 的截断。

证明　*必要性*。因为 G 是可解群,所以 G 只有交换的主因子,进而,每个极大子群具有交换的迹,即每个极大子群满足条件(ⅰ)—(ⅱ)。

充分性。假设定理不真且 G 是极小阶反例,根据引理 3 和引理 4,$\mathscr{F}_p\neq\phi$, $\mathscr{F}_c\neq\phi$。

(1) G 不是一个单群。

若 G 是一个单群,则$\frac{G}{1}=\frac{G}{M_G}$是每个极大子群 M 的唯一的 G-边界因子。根据定理的假设条件,对于 $\mathscr{F}_c$ 中每个极大子群 M,$\frac{(M\cap G)}{M_G}\cong M\cap G=M$ 是 π-幂零的。由 G 的选择,$|\pi(G)|\geq 3$,取极大素因子 $q\in\pi(G)$,令 Q 是 G 的一个 Sylow q-子群,M 是 G 的一个极大子群满足 $N_G(Q)\leq M$。断言:$M\in\mathscr{F}_c$,若否,$|G:M|=p<q$。根据引理 5,G 同构于 S_p 的一个子群,矛盾,因此 $N_G(Q)$ 是 π-幂零的。若 $q>5$, $q\in\pi$,则 $N_G(Q)$是 q-幂零的,$\frac{N_G(Q)}{C_G(Q)}$是一个 q-群。根据引理 6,可推得 $O^q(G)<G$,G 是 q-子群,这与 G 的极小性矛盾。若 $q=5$,则 $\pi(G)=\{2,3,5\}$, PSL(2,5)是 G 的截断,这与假设条件(ⅱ)矛盾。

(2) G 具有唯一一个极小正规子群 L,$\frac{G}{L}$是可解的且 L 是非可解的。

类似定理 1 的充分性证明过程的步骤(2)。对于商群$\frac{G}{L}$,若 $\mathscr{F}_c=\phi$,则$\frac{G}{L}$是可解的,因此 $\mathscr{F}_c\neq\phi$,且 $\mathscr{F}_c$ 中任意一个极大子群$\frac{M}{L}$,即$\left|\frac{G}{L}:\frac{M}{L}\right|$是合数,则$|G:M|$是合数。根据定理的假设条件(ⅰ),$\frac{(H\cap M)/L}{(M/L)_{G/L}}$是 π-幂零的,因此,$\frac{G}{L}$满足定理的条件(ⅰ)—(ⅱ)。由 G 的极小性,可知$\frac{G}{L}$是可解的。因为可解群是扩张闭的以及饱和群系的性质,所以 G 具有唯一的极小正规子群 L,$L\not\leq\Phi(G)$且 L 是非可解的。

(3) 由步骤(2),$|\pi(L)|\geq 3$,取极大素因子 $q\in\pi(L)$,令 Q 是 L 的一个 Sylow q-子群,M 是 G 的一个极大子群满足 $N_G(Q)\leq M$,由 Frattini 论断知 $G=LN_G(Q)=LM$, $M_G=1$。又根据极小正规子群的构造,$L=S\times\cdots\times S$,这里 S 是非交换单群。

情形 1　$M\in\mathscr{F}_c$。

若 $q>5$,则 $q\in\pi$。因为 M 的迹 $L\cap M$ 是 π-幂零的,所以 M 的迹 $L\cap M$ 是 q-幂零的。又因为 $N_L(Q)=L\cap N_G(Q)\leq L\cap M$,所以 $N_L(Q)$是 q-幂零的,$\frac{N_L(Q)}{C_L(Q)}$是一个 q-群。根据引理 6,可推得 $O^q(L)<L$,L 是 q-子群,这与前面的假设矛盾。若 $q=5$,则 $\pi(L)=\{2,3,5\}$,进而,PSL(2,5)是 S 的截断,这与假设条件(ⅱ)矛盾。

情形 2　$M\in\mathscr{F}_p$,不妨记$|G:M|=p$。

根据 q 的选取,$p<q$。因为 $G=LN_G(Q)=LM$, $M_G=1$ 和$|G:M|=p$,根据引理 5,所以 G 同构于 S_p 的一个

子群,这与 $p<q$ 矛盾。

综上所述,定理 2 得证。

推论 1　设 $\pi=\pi(G)\setminus\{r,5\}$, $r<5$,如果 $\mathscr{F}_c$ 中每个极大子群具有一个 π-幂零的迹,那么 G 的非交换合成因子同构于 PSL(2,5)。

推论 2　G 是可解群当且仅当 $\mathscr{F}_c$ 中每个极大子群具有一个幂零的迹。

推论 3　G 是可解群当且仅当每个极大子群具有一个幂零的迹。

定理 3　G 是可解群当且仅当 G 满足下列条件:

(ⅰ) 每个 2-极大子群具有一个幂零的迹;

(ⅱ) PSL(2,5)不是 G 的截断。

证明　*必要性*。类似于定理 2 的分析,即证。

充分性。假设定理不真且 G 是极小阶反例。

(1) G 不是一个单群。

若 G 是一个单群,则 $\frac{G}{1}=\frac{G}{H_G}$ 是每个 2-极大子群 H 的唯一的 G-边界因子。根据定理的假设条件,$\frac{(H\cap G)}{H_G}\cong H\cap G=H$ 是幂零的。进而,G 的每个 2-极大子群是幂零的。根据引理 7 和定理条件(ⅱ),G 是可解群,这与 G 是极小阶反例矛盾。

(2) G 具有唯一的极小正规子群 L,$\frac{G}{L}$ 是可解的且 L 是非可解的。

由步骤(1),可任意选取 G 的一个极小正规子群 L,考虑商群 $\frac{G}{L}$。若 L 是 G 的极大子群,则 $\frac{G}{L}$ 是素数阶群;若 L 不是 G 的极大子群,则对于 $\frac{G}{L}$ 的任意一个 2-极大子群 $\frac{H}{L}$,根据引理 2,H 是 G 的 2-极大子群。令 $\frac{A}{H_G}$、$\frac{(A\cap H)}{H_G}$ 分别是 H 的一个 G-边界因子和迹, 因为 $\frac{A/L}{(H/L)_{G/L}}\cong\frac{A}{H_G}$ 和 $\frac{(A\cap H)/L}{(H/L)_{G/L}}\cong\frac{(A\cap H)}{H_G}$,所以 $\frac{A/L}{(H/L)_{G/L}}$ 是 $\frac{H}{L}$ 一个 $\frac{G}{L}$-边界因子,$\frac{(A\cap H)/L}{(H/L)_{G/L}}$ 是 $\frac{H}{L}$ 的一个迹。根据定理的假设条件,$\frac{(A\cap H)/L}{(H/L)_{G/L}}$ 是幂零的,因此 $\frac{G}{L}$ 满足定理的条件。由 G 的极小性,则 $\frac{G}{L}$ 是可解的。因为可解群是扩张闭的以及饱和群系的性质,所以 G 具有唯一的极小正规子群 L,$L\not\leq\Phi(G)$ 且 L 是非可解的。

(3) 由步骤(2),$|\pi(L)|\geq 3$,取极大素因子 $q\in\pi(L)$,令 Q 是 L 的一个 Sylow q-子群,M 是 G 的一个极大子群满足 $N_G(Q)\leq M$。由 Frattini 论断知 $G=LN_G(Q)=LM$, $M_G=1$,则 $L\cap M<M$,存在 G 的一个 2-极大子群 H 使得 $L\cap M\leq H<M$, $H_G=1$。根据定理的假设条件(ⅰ),H 具有一个幂零的迹 $H\cap L$,因此 $L\cap M$ 是幂零的,$N_L(Q)$ 也是幂零的。根据引理 6,可推得 $O^q(L)<L$,L 是 q-子群,这与步骤(2)矛盾。

综上所述,定理 3 得证。

推论 4　若 G 的每个 2-极大子群具有一个幂零的迹,则 G 的非交换合成因子同构于 PSL(2,5)。

参考文献:

[1] 徐明曜. 有限群导引[M]. 北京:科学出版社,2007.
XU Mingyao. Introduction to finite groups[M]. Beijing: Since Press, 2007.

[2] DOERK K, HAWKES T. Finite soluble groups[M]. Berlin: De Gruyter, 1992.

[3] GUO Wenbin. The theory of classes of groups[M]. Beijing-New York-Dordrecht-Boston-London: Science Press-Kluwer Academic Publishers, 2000.

[4] HALL P. A characteristic property of soluble groups[J]. Journal of the London Mathematical Society, 1937, 12(47):198-200.

[5] HUPPERT B. Normalteiler und maximale untergruppen endlicher gruppen[J]. Mathematische Zeitschrift, 1954, 60(1):409-434.

[6] JOHNSON D L. A note on supersoluble groups[J]. Canadian Journal of Mathematics, 1971, 23(3):562-564.
[7] FEIT W. An interval in the subgroup lattice of a finite group which is isomorphic to M_7[J]. Algebra Universalis, 1983, 17: 220-221.
[8] WANG Yanming. *C*-normality of groups and its properties[J]. Journal of Algebra, 1996, 180(3):954-965.
[9] LEVCHUK V M, LIKHAREV A G. Finite simple groups with complemented maximal subgroups[J]. Siberian Mathematical Journal, 2006, 47(4):659-668.
[10] GUO Wenbin, SKIBA A N, TANG Xingzheng. On boundary factors and traces of subgroups of finite groups[J]. Communications in Mathematics and Statistics, 2014, 2(3/4):349-361.
[11] SHI Jiangtao. A finite group in which all non-nilpotent maximal subgroups are normal has a Sylow tower[J]. Hokkaido Mathematical Journal, 2019, 48(2):309-312.
[12] 谢鑫,张佳.某些极大准素 *c*-正规子群对群结构的影响[J].西华师范大学学报(自然科学版),2025,46(4):376-380.
XIE Xin, ZHANG Jia.The influence of some maximal primary *c*-normal subgroups on structure of groups[J].Journal of China West Normal University(Natural Sciences), 2025, 46(4):376-380.
[13] 陈心丹,许丽,缪龙,等. 有限群的 2-极大子群的边界因子[J]. 山东大学学报(理学版),2023,58(2):1-5.
CHEN Xindan, XU Li, MIAO Long, et al. On the boundary factors of 2-maximal subgroups of finite groups[J]. Journal of Shandong University(Natural Science), 2023, 58(2):1-5.
[14] WEINSTEIN M. Between nilpotent and solvable[M]. Passaic: Polygonal Publishing House, 1982.
[15] ROBINSON D J S. A course in the theory of groups[M]. New York: Springer, 1996.
[16] HUPPERT B, BLACKBURN N. Finite groups III[M]. New York: Springer, 1982.
[17] JANKO Z. Endliche gruppen mit lauter nilpotenten zweitmaximalen unter gruppen[J]. Mathematische Zeitschrift, 1962, 79(1):422-424.
[18] BERKOVIČ YA G. The existence of subgroups of a finite non-solvable group[J]. Doklady Akademii Nauk SSSR, 1964, 156(6):1255-1257.

(编辑:陈丽萍)

(上接第 10 页)

[12] 舒琴,龚何余,赵平. 半群 $PF(n,r)$ 的秩[J]. 山东大学学报(理学版),2024,59(12):1-6.
SHU Qin, GONG Heyu, ZHAO Ping. On the rank of the semigroup $PF(n,r)$[J]. Journal of Shandong University(Natural Science), 2024, 59(12):1-6.
[13] 吴江燕. 半群 PO_n 的高次方准幂等元[J]. 贵州师范大学学报(自然科学版),2020,38(1):44-49.
WU Jiangyan. The quasi-idempotents of high power of the semigroup PO_n[J]. Journal of Guizhou Normal University (Natural Sciences), 2020, 38(1):44-49.
[14] 黄朝霞,罗永贵. 半群 SY_{n-1} 的秩[J]. 贵州师范大学学报(自然科学版),2021,39(3):61-64.
HUANG Zhaoxia, LUO Yonggui. On the rank of the semigroup SY_{n-1}[J]. Journal of Guizhou Normal University (Natural Sciences), 2021, 39(3):61-64.
[15] 徐波,卢琳璋,游泰杰. 1-奇异变换半群 $T_n(1)$ 的格林关系[J]. 厦门大学学报(自然科学版),2023,62(3):477-480.
XU Bo, LU Linzhang, YOU Taijie. Green's equivalences on semigroups of the 1-singular transformation semigroup $T_n(1)$[J]. Journal of Xiamen University(Natural Science), 2023, 62(3):477-480.
[16] 徐波,高荣海,卢琳璋,等. 1-奇异变换半群 $T_n(1)$ 的秩[J]. 山东大学学报(理学版),2022,57(12):81-85.
XU Bo, GAO Ronghai, LU Linzhang, et al. Rank of the the 1-singular transformation semigroup $T_n(1)$[J]. Journal of Shandong University(Natural Science), 2022, 57(12): 81-85.

(编辑:陈丽萍)