山东大学学报(理学版)2025年11月 第60卷 第11期
Journal of Shandong University(Natural Science), Vol.60, No.11, 2025 http://lxbwk.njournal.sdu.edu.cn

文章编号:1671-9352(2025)11-0109-06 DOI:10.6040/j.issn.1671-9352.0.2023.484

平凡扩张环上的强 Gorenstein 投射模

贺健媛,金袁慧,王占平*
(绍兴文理学院数理信息学院, 浙江 绍兴 312000)

摘要:设 $R\ltimes M$ 是平凡扩张环,其中 R 是环,M 是 R-R-双模,本文给出了左 $R\ltimes M$-模(X,α)是强 Gorenstein 投射模的充分必要条件。

关键词:平凡扩张环;强 Gorenstein 投射模;有限投射维数
中图分类号:O153.3 **文献标志码**:A
引用格式:贺健媛,金袁慧,王占平.平凡扩张环上的强 Gorenstein 投射模[J]. 山东大学学报(理学版),2025,60(11):109-114.

Strongly Gorenstein projective modules over trivial ring extensions

HE Jianyuan, JIN Yuanhui, WANG Zhanping*
(Department of Mathematics and Information, Shaoxing University, Shaoxing 312000, Zhejiang, China)

Abstract: Let $R\ltimes M$ be a trivial ring extension, where R is a ring and M is an R-R-bimodule. We give sufficient and necessary conditions such that (X,α) is a strongly Gorenstein projective left $R\ltimes M$-module.

Key words: trivial extension; strongly Gorenstein projective module; finite projective dimension

0 引言

本文讨论的环均指有单位元的结合环,模指酉模。设 R 是环,${}_RX(X_R)$表示左(右)R-模,R-Mod(Mod-R)表示左(右)R-模范畴,设 X 是 R-模,pd(X)和 fd(X)分别表示 X 的投射维数和平坦维数,设 α 是模同态,Ker(α)(Im(α)和 Coker(α))表示 α 的核(像和余核)。

Enochs 等[1]定义了任意环 R 上的 Gorenstein 投射模,并研究了这些模的性质。随后,Holm[2]发展了 Gorenstein 同调代数,Bennis 等[3]引入强 Gorenstein 投射模,并且证明了任意的 Gorenstein 投射模是某个强 Gorenstein 投射模的直和因子。

设 R 是环,M 是 R-R-双模,则 $R\times M=\{(r,m)\mid r\in R,\ m\in M\}$,其上加法为对应分量相加,乘法定义为 $(r_1,m_1)(r_2,m_2)=(r_1r_2,r_1m_2+m_1r_2)$,易证 $R\times M$ 关于这里的加法和乘法构成环,称之为环 R 通过双模${}_RM_R$的平凡扩张环,记为 $R\ltimes M$。平凡扩张环是环模理论中非常重要的一类环,形式三角矩阵环和同态为 0 的 Morita 环是特殊的平凡扩张环。Fossum 等[4]研究了平凡扩张环的范畴和同调性质;Minamoto 等[5]研究了平凡扩张环的同调维数公式;Mao[6]研究了形式三角矩阵环上的强 Gorenstein 投射模;Asefa[7]研究了 Morita 环上的强 Gorenstein 投射模;Mao[8]研究了平凡扩张环上的 Gorenstein 投射模。

受以上结论的启发,本文主要研究平凡扩张环上的强 Gorenstein 投射模。设(X,α)是左 $R\ltimes M$-模,给出了(X,α)是强 Gorenstein 投射模的一个充分必要条件。

收稿日期:2023-11-21; **网络出版时间**:2024-09-10 12:17:00
基金项目:绍兴文理学院科学研究基金资助项目(13011001002/112); 绍兴文理学院学生科学研究基金资助项目(Y20230217)
第一作者:贺健媛(2000—),女,硕士研究生,研究方向为环的同调理论. E-mail:1729267164@qq.com
* **通信作者**:王占平(1978—),女,教授,博士,研究方向为环的同调理论. E-mail:wangzp28@163.com

回顾文献[4],$R\ltimes M$-Mod 范畴同构于范畴 $\mathscr{M}$,这里范畴 $\mathscr{M}$ 中的对象是(X,α),其中 X 是左 R-模,$\alpha:M\otimes_R X\to X$是左 R-模同态,并且 $\alpha(M\otimes\alpha)=0$;(X_1,α_1)与(X_2,α_2)之间的态射为 R-同态 $f:X_1\to X_2$,并且满足 $\alpha_2(M\otimes f)=f\alpha_1$。显然,范畴 $\mathscr{M}$ 中的序列 $0\to(X_1,\alpha_1)\to(X_2,\alpha_2)\to(X_3,\alpha_3)\to 0$ 是正合的当且仅当R-Mod 中的序列 $0\to X_1\to X_2\to X_3\to 0$ 是正合的。众所周知,$\otimes$函子与 Hom 函子是伴随对。于是,$R\ltimes M$-Mod 范畴同构于范畴 $\mathscr{M}'$,这里范畴 $\mathscr{M}'$中的对象是$[X,\beta]$,其中 X 是左 R-模,$\beta:X\to\mathrm{Hom}_R(M,X)$是左 R-模同态,并且 $\mathrm{Hom}_R(M,\beta)\beta=0$;$[X_1,\beta_1]$与$[X_2,\beta_2]$之间的态射为 R-同态 $f:X_1\to X_2$,并且满足$\beta_2 f=\mathrm{Hom}_R(M,f)\beta_1$。显然,范畴 $\mathscr{M}'$中的序列 $0\to[X_1,\beta_1]\to[X_2,\beta_2]\to[X_3,\beta_3]\to 0$ 是正合的当且仅当 R-Mod 中的序列 $0\to X_1\to X_2\to X_3\to 0$ 是正合的。有以下几个重要的函子。

函子 $T:R\text{-Mod}\to\mathscr{M}$,使得对任意对象 $X\in R$-Mod,$T(X)=(X\oplus(M\otimes_R X),\mu)$,其中 $\mu=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$:$(M\otimes_R X)\oplus(M\otimes_R M\otimes_R X)\to X\oplus(M\otimes_R X)$,且对 R-Mod 中任意态射 f,$T(f)=\begin{pmatrix}f&0\\0&M\otimes f\end{pmatrix}$。

函子 $U:\mathscr{M}\to R$-Mod,使得对任意对象$(X,\alpha)\in\mathscr{M}$,$U(X,\alpha)=X$,且对 $\mathscr{M}$ 中任意态射 f,$U(f)=f$。

函子 $Z:R\text{-Mod}\to\mathscr{M}$,使得对任意对象 $X\in R$-Mod,$Z(X)=(X,0)$,且对 R-Mod 中任意态射 f,$Z(f)=f$。

函子 $C:\mathscr{M}\to R$-Mod,使得对任意对象$(X,\alpha)\in\mathscr{M}$,$C(X,\alpha)=\mathrm{Coker}(\alpha)$,且对 $\mathscr{M}$ 中任意态射 f,$C(f)=$诱导态射。

函子 $H:R\text{-Mod}\to\mathscr{M}'$,使得对任意对象 $X\in R$-Mod,$H(X)=[\mathrm{Hom}_R(M,X)\oplus X,\vartheta]$其中 $\vartheta=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$:$\mathrm{Hom}_R(M,X)\oplus X\to\mathrm{Hom}_R(M,\mathrm{Hom}_R(M,X))\oplus\mathrm{Hom}_R(M,X)$,且对 R-Mod 中任意态射 f,$H(f)=\begin{pmatrix}\mathrm{Hom}_R(M,f)&0\\0&f\end{pmatrix}$。

函子 $U:\mathscr{M}'\to R$-Mod,使得对任意对象$[X,\beta]\in\mathscr{M}'$,$U[X,\beta]=X$,且对 $\mathscr{M}'$中任意态射 f,$U(f)=f$。

函子 $Z:R\text{-Mod}\to\mathscr{M}'$,使得对任意对象 $X\in R$-Mod,$Z(X)=[X,0]$,且对 R-Mod 中任意态射 f,$Z(f)=f$。

函子 $K:\mathscr{M}'\to R$-Mod,使得对任意对象$[X,\beta]\in\mathscr{M}'$,$K[X,\beta]=\mathrm{Ker}(\beta)$,且对 $\mathscr{M}'$中任意态射 f,$K(f)=$诱导态射。

函子 U 和 Z 是正合的,T 和 C 是右正合的,H 和 K 是左正合的;(T,U),(C,Z),(Z,K)和(U,H)是伴随对,并且 $CT=\mathrm{id}_{R\text{-Mod}}$,$UZ=\mathrm{id}_{R\text{-Mod}}$,$KH=\mathrm{id}_{R\text{-Mod}}$。

1 平凡扩张环上的强 Gorenstein 投射模

设 R 是环,M 是 R-R-双模,$R\ltimes M$ 是平凡扩张环,由文献[3]中强 Gorenstein 投射模的定义,如果存在投射左 R-模的正合列 $\mathfrak{P}:\cdots\xrightarrow{f}P\xrightarrow{f}P\xrightarrow{f}P\xrightarrow{f}\cdots$使得 $X\cong\mathrm{Ker}(f)$,且对任意的投射左 R-模 Q,序列$\mathrm{Hom}_R(\mathfrak{P},Q)$是正合的,那么称 X 是强 Gorenstein 投射左 R-模。根据定义知,强 Gorenstein 投射模是 Gorenstein 投射模,并且由文献[3]中定理 2.7 可知,Gorenstein 投射模是某个强 Gorenstein 投射模的直和因子。

引理 1[2] 设 X 是 Gorenstein 投射左 R-模,则存在投射左 R-模的正合列 $\mathfrak{P}:\cdots\to P^{-1}\xrightarrow{f^{-1}}P^0\xrightarrow{f^0}P^1\xrightarrow{f^1}\cdots$使得 $X\cong\mathrm{Ker}(f^0)$,且对任意的投射维数有限的左 R-模 L,序列$\mathrm{Hom}_R(\mathfrak{P},L)$是正合的。

引理 2[9] 设 R 是环,$\mathrm{fd}(U_R)<\infty$,且 $\mathfrak{F}:\cdots\to F^{n-1}\to F^n\to F^{n+1}\to\cdots$是平坦左 R-模的正合列,则序列 $U\otimes_R\mathfrak{F}$是正合的。

引理 3[4] 设(X,α)是左 $R\ltimes M$-模。则(X,α)是投射左 $R\ltimes M$-模当且仅当存在投射左 R-模 P,使得$(X,\alpha)\cong T(P)$。

引理 4[8] 设(X,α)是左 $R\ltimes M$-模,则

(1) 对任意的右 R-模 W,$Z(W)\otimes_{R\ltimes M}(X,\alpha)\cong W\otimes_R\mathrm{Coker}(\alpha)$;

(2) 序列 $0\to Z(\mathrm{Im}(\alpha))\to(X,\alpha)\to Z(\mathrm{Coker}(\alpha))\to 0$ 是正合的。

定理 1　设(X,α)是左 $R\ltimes M$-模, $\mathrm{fd}(M_R)<\infty$, $\mathrm{pd}({}_RM)<\infty$。若满足条件(1)—(3),则$(X,\alpha)$是强 Gorenstein 投射左 R⋉M-模:

(1) $\mathrm{Coker}(\alpha)$是强 Gorenstein 投射左 R-模;

(2) 序列 $M\otimes_R M\otimes_R X\xrightarrow{M\otimes\alpha}M\otimes_R X\xrightarrow{\alpha}X$ 是正合的;

(3) 存在左 R-同态 $\eta:P\to X$ 和 $\psi:X\to M\otimes_R P$,使得 $\rho\eta=\pi$ 和 $\psi\delta=M\otimes l$,且 $\mathrm{Ker}\begin{pmatrix}f & 0\\ \psi\eta & M\otimes f\end{pmatrix}=\mathrm{Im}\begin{pmatrix}f & 0\\ \psi\eta & M\otimes f\end{pmatrix}$,其中 $l:\mathrm{Coker}(\alpha)\to P$ 和 $\delta:M\otimes_R\mathrm{Coker}(\alpha)\to X$ 是单同态,$\pi:P\to\mathrm{Coker}(\alpha)$ 和 $\rho:X\to\mathrm{Coker}(\alpha)$是满同态,$\begin{pmatrix}f & 0\\ \psi\eta & M\otimes f\end{pmatrix}\in\mathrm{End}(P\oplus(M\otimes_R P))$。

证明　因为 $\mathrm{Coker}(\alpha)$是强 Gorenstein 投射左 R-模,所以存在投射左 R-模的正合列

$$\mathfrak{P}:\cdots\xrightarrow{f}P\xrightarrow{f}P\xrightarrow{f}P\xrightarrow{f}\cdots$$

使得 $\mathrm{Coker}(\alpha)\cong\mathrm{Ker}(f)$,且对任意的投射左 R-模 Q,序列$\mathrm{Hom}_R(\mathfrak{P},Q)$是正合的。根据引理 2,由 $\mathrm{fd}(M_R)<\infty$ 可得到左 R-模的正合列

$$M\otimes_R\mathfrak{P}:\cdots\xrightarrow{M\otimes f}M\otimes_R P\xrightarrow{M\otimes f}M\otimes_R P\xrightarrow{M\otimes f}M\otimes_R P\xrightarrow{M\otimes f}\cdots$$

使得 $M\otimes_R\mathrm{Coker}(\alpha)\cong\mathrm{Ker}(M\otimes f)$。由正合列

$$M\otimes_R X\xrightarrow{\alpha}X\xrightarrow{\rho}\mathrm{Coker}(\alpha)\to 0,$$

诱导出正合列

$$M\otimes_R M\otimes_R X\xrightarrow{M\otimes\alpha}M\otimes_R X\xrightarrow{M\otimes\rho}M\otimes_R\mathrm{Coker}(\alpha)\to 0。$$

因为 $M\otimes_R M\otimes_R X\xrightarrow{M\otimes\alpha}M\otimes_R X\xrightarrow{\alpha}X$ 是正合的,所以序列

$$M\otimes_R M\otimes_R X\xrightarrow{M\otimes\alpha}M\otimes_R X\xrightarrow{\alpha}X\xrightarrow{\rho}\mathrm{Coker}(\alpha)\to 0。$$

是正合的。由于 $\alpha(M\otimes\alpha)=0$,存在 $\delta:M\otimes_R\mathrm{Coker}(\alpha)\to X$,使得 $\delta(M\otimes\rho)=\alpha$。设 $u\in\mathrm{Ker}(\delta)$,则 $\delta(u)=0$。因为 $M\otimes\rho$ 是满同态,所以存在 $v\in M\otimes_R X$ 使$(M\otimes\rho)(v)=u$。于是 $0=\delta(u)=\delta(M\otimes\rho)(v)=\alpha(v)$,从而 $v\in\mathrm{Ker}(\alpha)$。又因为 $\mathrm{Ker}(\alpha)=\mathrm{Im}(M\otimes\alpha)$,所以存在 $w\in M\otimes_R M\otimes_R X$ 使$(M\otimes\alpha)(w)=v$,因此 $u=(M\otimes\rho)(v)=(M\otimes\rho)(M\otimes\alpha)(w)=0$,故 $\mathrm{Ker}(\delta)=0$,即 δ 是单同态。因为 $\mathrm{Ker}(\rho)=\mathrm{Im}(\alpha)=\mathrm{Im}(\delta(M\otimes\rho))=\mathrm{Im}(\delta)$,所以存在正合列

$$0\to M\otimes_R\mathrm{Coker}(\alpha)\xrightarrow{\delta}X\xrightarrow{\rho}\mathrm{Coker}(\alpha)\to 0。$$

设$\lambda_1:M\otimes_R P\to P\oplus(M\otimes_R P)$是标准嵌入,$\pi_1:P\oplus(M\otimes_R P)\to P$ 是典范投影。根据条件(3),令 $\xi=(\eta,\delta(M\otimes\pi)):P\oplus(M\otimes_R P)\to X$, $\lambda=\begin{pmatrix}l\rho\\ \psi\end{pmatrix}:X\to P\oplus(M\otimes_R P)$,从而有行正合交换图

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M\otimes_R P \arrow[r, "\lambda_1"] \arrow[d, "M\otimes\pi"] & P\oplus(M\otimes_R P) \arrow[r, "\pi_1"] \arrow[d, "\xi"] & P \arrow[r] \arrow[d, "\pi"] & 0\\
0 \arrow[r] & M\otimes_R\mathrm{Coker}(\alpha) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "M\otimes l"] & X \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "\lambda"] & \mathrm{Coker}(\alpha) \arrow[r] \arrow[d, "l"] & 0\\
0 \arrow[r] & M\otimes_R P \arrow[r, "\lambda_1"] & P\oplus(M\otimes_R P) \arrow[r, "\pi_1"] & P \arrow[r] & 0。
\end{tikzcd}$$

因为 $\mathrm{Coker}(\alpha)\cong\mathrm{Ker}(f)$和 $M\otimes_R\mathrm{Coker}(\alpha)\cong\mathrm{Ker}(M\otimes f)$,所以 π 和 $M\otimes\pi$ 是满同态,l 和 $M\otimes l$ 是单同态。根据三引理可知,ξ 是满同态,λ 是单同态。又因为 $\lambda\xi=\begin{pmatrix}l\rho\\ \psi\end{pmatrix}(\eta,\delta(M\otimes\pi))=\begin{pmatrix}l\rho\eta & l\rho\delta(M\otimes\pi)\\ \psi\eta & \psi\delta(M\otimes\pi)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}f & 0\\ \psi\eta & M\otimes f\end{pmatrix}$,所以 $\mathrm{Ker}(\lambda\xi)=\mathrm{Im}(\lambda\xi)$,从而得到左 R-模的正合列

$$\cdots\xrightarrow{\lambda\xi}P\oplus(M\otimes_R P)\xrightarrow{\lambda\xi}P\oplus(M\otimes_R P)\xrightarrow{\lambda\xi}P\oplus(M\otimes_R P)\xrightarrow{\lambda\xi}\cdots$$

使得 $X\cong \mathrm{Ker}(\lambda\xi)$。因为有以下两个交换图:

$$\begin{array}{ccccccc}
M\otimes_R X & \xrightarrow{M\otimes\lambda} & M\otimes_R(P\oplus(M\otimes_R P)) & \xrightarrow{M\otimes(\lambda\xi)} & M\otimes_R(P\oplus(M\otimes_R P)) & \to & \cdots \\
\downarrow\alpha & & \downarrow\mu & & \downarrow\mu & & \\
0\longrightarrow X & \xrightarrow{\lambda} & P\oplus(M\otimes_R P) & \xrightarrow{\lambda\xi} & P\oplus(M\otimes_R P) & \longrightarrow & \cdots
\end{array}$$

和

$$\begin{array}{ccccc}
\cdots\to M\otimes_R(P\oplus(M\otimes_R P)) & \xrightarrow{M\otimes(\lambda\xi)} & M\otimes_R(P\oplus(M\otimes_R P)) & \xrightarrow{M\otimes\xi} & M\otimes_R X \\
\downarrow\mu & & \downarrow\mu & & \downarrow\alpha \\
\cdots\longrightarrow P\oplus(M\otimes_R P) & \xrightarrow{\lambda\xi} & P\oplus(M\otimes_R P) & \xrightarrow{\xi} & X\longrightarrow 0
\end{array}$$

且根据引理 3 可知,$T(P)$是投射模,所以有投射左 $R\ltimes M$-模的正合列

$$\Delta:\cdots\xrightarrow{\lambda\xi}T(P)\xrightarrow{\lambda\xi}T(P)\xrightarrow{\lambda\xi}T(P)\xrightarrow{\lambda\xi}\cdots$$

使得$(X,\alpha)\cong \mathrm{Ker}(\lambda\xi)$。

设(Y,β)是任意的投射左 $R\ltimes M$-模,根据引理 3 知,存在投射左 R-模 W,使得$(Y,\beta)\cong T(W)$。根据引理 4(2)可得,$R\ltimes M$-Mod 中的正合列

$$0\to Z(M\otimes_R W)\to T(W)\to Z(W)\to 0,$$

从而诱导出复形的正合列

$$0\to \mathrm{Hom}_{R\ltimes M}(\Delta,Z(M\otimes_R W))\to \mathrm{Hom}_{R\ltimes M}(\Delta,T(W))\to \mathrm{Hom}_{R\ltimes M}(\Delta,Z(W))\to 0。$$

由于(T,U)是伴随对,且 $UZ=\mathrm{id}_{R\text{-Mod}}$,于是 $\mathrm{Hom}_{R\ltimes M}(T(P),Z(W))\cong \mathrm{Hom}_R(P,W)$ 和 $\mathrm{Hom}_{R\ltimes M}(T(P),Z(M\otimes_R W))\cong \mathrm{Hom}_R(P,M\otimes_R W)$,因此序列 $\mathrm{Hom}_{R\ltimes M}(\Delta,Z(W))\cong \mathrm{Hom}_R(\mathfrak{P},W)$ 是正合的。又因为 $\mathrm{pd}({}_R M)<\infty$,所以 $\mathrm{pd}(M\otimes_R W)<\infty$,从而根据引理 1 可知,序列 $\mathrm{Hom}_R(\mathfrak{P},M\otimes_R W)$ 是正合的,又因为序列 $\mathrm{Hom}_{R\ltimes M}(\Delta,Z(M\otimes_R W))\cong \mathrm{Hom}_R(\mathfrak{P},M\otimes_R W)$,所以序列 $\mathrm{Hom}_{R\ltimes M}(\Delta,T(W))$ 是正合的。

综上,(X,α)是强 Gorenstein 投射左 $R\ltimes M$-模。

推论 1 设(X,α)是左 $R\ltimes M$-模,$\mathrm{fd}(M_R)<\infty$,$\mathrm{pd}({}_R M)<\infty$,若 X 是强 Gorenstein 投射左 R-模,则 $T(X)$ 是强 Gorenstein 投射左 $R\ltimes M$-模。

定理 2 设(X,α)是左 $R\ltimes M$-模,$\mathrm{fd}(Z(R)_{R\ltimes M})<\infty$,$\mathrm{pd}({}_{R\ltimes M}Z(R))<\infty$,若$(X,\alpha)$是强 Gorenstein 投射左 $R\ltimes M$-模,则:

(1) $\mathrm{Coker}(\alpha)$是强 Gorenstein 投射左 R-模;

(2) 序列 $M\otimes_R M\otimes_R X\xrightarrow{M\otimes\alpha}M\otimes_R X\xrightarrow{\alpha}X$ 是正合的;

(3) 存在左 R-同态 $\eta:P\to X$ 和 $\psi:X\to M\otimes_R P$,使得 $\rho\eta=\pi$ 和 $\psi\delta=M\otimes l$,且 $\mathrm{Ker}\begin{pmatrix} f & 0\\ \psi\eta & M\otimes f\end{pmatrix}=\mathrm{Im}\begin{pmatrix} f & 0\\ \psi\eta & M\otimes f\end{pmatrix}$,其中 $l:\mathrm{Coker}(\alpha)\to P$ 和 $\delta:M\otimes_R\mathrm{Coker}(\alpha)\to X$ 是单同态,$\pi:P\to\mathrm{Coker}(\alpha)$ 和 $\rho:X\to\mathrm{Coker}(\alpha)$是满同态,$\begin{pmatrix} f & 0\\ \psi\eta & M\otimes f\end{pmatrix}\in \mathrm{End}(P\oplus(M\otimes_R P))$。

证明 因为(X,α)是强 Gorenstein 投射左 $R\ltimes M$-模,所以存在投射左 $R\ltimes M$-模的正合列

$$\Delta:\cdots\xrightarrow{g}T(P)\xrightarrow{g}T(P)\xrightarrow{g}T(P)\xrightarrow{g}\cdots$$

使得$(X,\alpha)\cong \mathrm{Ker}(g)$,且对任意的投射 $R\ltimes M$-模(Y,β),序列 $\mathrm{Hom}_{R\ltimes M}(\Delta,(Y,\beta))$ 是正合的。因为 $\mathrm{fd}(Z(R)_{R\ltimes M})<\infty$,所以序列 $Z(R)\otimes_{R\ltimes M}\Delta$ 是正合的。根据引理 4(1)知,$Z(R)\otimes_{R\ltimes M}T(P)\cong R\otimes_R P\cong P$,从而有投射左 R-模的正合列

$$\mathfrak{P}:\cdots\xrightarrow{f}P\xrightarrow{f}P\xrightarrow{f}P\xrightarrow{f}\cdots$$

使得 $\mathrm{Coker}(\alpha)\cong \mathrm{Ker}(f)$。

设 W 是投射左 R-模,则 $Z(W)$ 是 $Z(R)$ 拷贝直和的直和因子。因为 $\mathrm{pd}({}_{R\ltimes M}Z(R))<\infty$,所以 $\mathrm{pd}({}_{R\ltimes M}Z(W))<\infty$。从而序列 $\mathrm{Hom}_R(\mathfrak{P},W)\cong \mathrm{Hom}_{R\ltimes M}(\Delta,Z(W))$ 是正合的,因此 $\mathrm{Coker}(\alpha)$是强 Gorenstein

投射左 R-模。

根据引理 4(2)知,有 Mod-$R\ltimes M$ 中的正合列 $0\to Z(M)\to T(R)\to Z(R)\to 0$,并且它诱导出复形的正合列

$$0\to Z(M)\otimes_{R\ltimes M}\Delta\to T(R)\otimes_{R\ltimes M}\Delta\to Z(R)\otimes_{R\ltimes M}\Delta\to 0。$$

因为序列 $T(R)\otimes_{R\ltimes M}\Delta$ 和 $Z(R)\otimes_{R\ltimes M}\Delta$ 是正合的,所以根据文献[10]的定理 1.4.7 知,序列 $Z(M)\otimes_{R\ltimes M}\Delta$ 是正合的。从而序列 $M\otimes_R\mathfrak{P}\cong Z(M)\otimes_{R\ltimes M}\Delta$ 是正合的。设 l: Coker$(\alpha)\to P$ 是单的左 R-同态,则 $M\otimes l$: $M\otimes_R\mathrm{Coker}(\alpha)\to M\otimes_R P$是单同态。考虑正合列

$$M\otimes_R X\xrightarrow{\alpha}X\xrightarrow{\rho}\mathrm{Coker}(\alpha)\to 0,$$

它诱导出正合列

$$M\otimes_R M\otimes_R X\xrightarrow{M\otimes\alpha}M\otimes_R X\xrightarrow{M\otimes\rho}M\otimes_R\mathrm{Coker}(\alpha)\to 0。$$

因为 $\alpha(M\otimes\alpha)=0$,所以存在同态 $\delta:M\otimes_R\mathrm{Coker}(\alpha)\to X$,使得 $\delta(M\otimes\rho)=\alpha$。设 $\varepsilon=\begin{pmatrix}\varepsilon_1\\ \varepsilon_2\end{pmatrix}:(X,\alpha)\to T(P)=(P\oplus(M\otimes_R P),\mu)$ 是单的左 $R\ltimes M$-同态,其中 $\mu=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$,$\lambda_1:P\to P\oplus(M\otimes_R P)$ 和 $\lambda_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}:M\otimes_R P\to P\oplus(M\otimes_R P)$ 是标准嵌入,$\pi_1=(1,0):P\oplus(M\otimes_R P)\to P$ 和 $\pi_2:P\oplus(M\otimes_R P)\to M\otimes_R P$ 是典范投影,则 $M\otimes\pi_1:M\otimes(P\oplus(M\otimes_R P))\to M\otimes P$ 是满同态。考虑正合交换图

$$\begin{tikzcd}
M\otimes_R X \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "M\otimes\varepsilon"'] & X \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "\varepsilon"] & \mathrm{Coker}(\alpha) \arrow[r] \arrow[d, "l"] & 0 \\
M\otimes_R(P\oplus(M\otimes_R P)) \arrow[r, "\mu"] & P\oplus(M\otimes_R P) \arrow[r, "\pi_1"] & P \arrow[r] & 0,
\end{tikzcd}$$

可得 $\varepsilon_1\alpha=0$,$\varepsilon_2\alpha=M\otimes\varepsilon_1$ 和 $l\rho=\pi_1\varepsilon=\varepsilon_1$,则 $\lambda_2(M\otimes l)(M\otimes\rho)=\lambda_2(M\otimes(l\rho))=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}(M\otimes\varepsilon_1)=\begin{pmatrix}0\\M\otimes\varepsilon_1\end{pmatrix}$,而 $\varepsilon\delta(M\otimes\rho)=\varepsilon\alpha=\begin{pmatrix}\varepsilon_1\\ \varepsilon_2\end{pmatrix}\alpha=\begin{pmatrix}\varepsilon_1\alpha\\ \varepsilon_2\alpha\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\M\otimes\varepsilon_1\end{pmatrix}$,于是 $\lambda_2(M\otimes l)(M\otimes\rho)=\varepsilon\delta(M\otimes\rho)$。又因为 $M\otimes\rho$ 是满同态,所以 $\lambda_2(M\otimes l)=\varepsilon\delta$。即有 R-Mod 中的交换图

$$\begin{tikzcd}
M\otimes_R\mathrm{Coker}(\alpha) \arrow[r, "M\otimes l"] \arrow[d, "\delta"'] & M\otimes_R P \arrow[d, "\lambda_2"] \\
X \arrow[r, "\varepsilon"] & P\oplus(M\otimes_R P)。
\end{tikzcd}$$

因为 λ_2 和 $M\otimes l$ 是单同态,所以 δ 是单同态。又因为有正合列 $M\otimes_R M\otimes_R X\xrightarrow{M\otimes\alpha}M\otimes_R X\xrightarrow{M\otimes\rho}M\otimes_R\mathrm{Coker}(\alpha)\to 0$,所以序列

$$M\otimes_R M\otimes_R X\xrightarrow{M\otimes\alpha}M\otimes_R X\xrightarrow{\alpha}X$$

是正合的。

设 $\xi=(\xi_1,\xi_2):T(P)\to(X,\alpha)$是满的左 $R\ltimes M$-同态,$\pi:P\to\mathrm{Coker}(\alpha)$ 是满的左 R-同态,则 $g=\varepsilon\xi$ 和 $f=l\pi$。考虑下列正合交换图

$$\begin{tikzcd}
M\otimes_R(P\oplus(M\otimes_R P)) \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "M\otimes\xi"'] & P\oplus(M\otimes_R P) \arrow[r, "\pi_1"] \arrow[d, "\xi"] & P \arrow[r] \arrow[d, "\pi"] & 0 \\
M\otimes_R X \arrow[r, "\alpha"] & X \arrow[r, "\rho"] & \mathrm{Coker}(\alpha) \arrow[r] & 0,
\end{tikzcd}$$

可得 $\pi\pi_1=\rho\xi$,$\alpha(M\otimes\xi_1)=\xi_2$,$\alpha(M\otimes\xi_2)=0$,则 $\delta(M\otimes\pi)(M\otimes\pi_1)=\delta(M\otimes(\pi\pi_1))=\delta(M\otimes(\rho\xi))=\delta(M\otimes\rho)(M\otimes\xi)=\alpha(M\otimes\xi)$,而 $\xi\lambda_2(M\otimes\pi_1)=(\xi_1,\xi_2)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}(1,0)=(\xi_1,\xi_2)\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}=(\xi_2,0)=(\alpha(M\otimes\xi_1),\alpha(M\otimes\xi_2))=\alpha(M\otimes\xi)$,于是 $\xi\lambda_2(M\otimes\pi_1)=\delta(M\otimes\pi)(M\otimes\pi_1)$。因为 $M\otimes\pi_1$ 是满同态,所以 $\xi\lambda_2=$

$\delta(M\otimes\pi)$,即有 R-Mod 中的交换图

$$\begin{array}{ccc} M\otimes_R P & \xrightarrow{\lambda_2} & P\oplus(M\otimes_R P) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle M\otimes\pi} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \xi} \\ M\otimes_R \mathrm{Coker}(\alpha) & \xrightarrow{\delta} & X。\end{array}$$

令 $\eta=\xi\lambda_1:P\to X$, $\psi=\pi_2\varepsilon:X\to M\otimes_R P$,则 $\rho\eta=\rho\xi\lambda_1=\pi\pi_1\lambda_1=\pi$ 和 $\psi\delta=\pi_2\varepsilon\delta=\pi_2\lambda_2(M\otimes l)=M\otimes l$。

因为 $\pi_1 g\lambda_1=\pi_1\varepsilon\xi\lambda_1=l\rho\eta=l\pi=f$, $\pi_1 g\lambda_2=\pi_1\varepsilon\xi\lambda_2=l\rho\delta(M\otimes\pi)=0$, $\pi_2 g\lambda_1=\pi_2\varepsilon\xi\lambda_1=\psi\eta$ 和 $\pi_2 g\lambda_2=\pi_2\varepsilon\xi\lambda_2=\psi\delta(M\otimes\pi)=(M\otimes l)(M\otimes\pi)=M\otimes f$,所以 $g=\begin{pmatrix}\pi_1 g\lambda_1 & \pi_1 g\lambda_2\\ \pi_2 g\lambda_1 & \pi_2 g\lambda_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} f & 0\\ \psi\eta & M\otimes f\end{pmatrix}$,并且$\mathrm{Ker}\begin{pmatrix} f & 0\\ \psi\eta & M\otimes f\end{pmatrix}=\mathrm{Im}\begin{pmatrix} f & 0\\ \psi\eta & M\otimes f\end{pmatrix}$。

推论 2 设(X,α)是左 $R\ltimes M$-模, $\mathrm{fd}(Z(R)_{R\ltimes M})<\infty$, $\mathrm{pd}({}_{R\ltimes M}Z(R))<\infty$,若 $T(X)$是强 Gorenstein 投射左 $R\ltimes M$-模,则 X 是强 Gorenstein 投射左 R-模。

参考文献:

[1] ENOCHS E E, JENDA O M G. Gorenstein injective and Gorenstein projective modules[J]. Mathematische Zeitschrift, 1995, 200(1):611-633.

[2] HOLM H. Gorenstein homological dimensions[J]. Journal of Pure and Applied Algebra, 2004, 189(1):167-196.

[3] BENNIS D, MAHDOU N. Strongly Gorenstein projective, injective and flat modules[J]. Journal of Pure and Applied Algebra, 2007, 210(2):437-445.

[4] FOSSUM R M, GRIFFITH P, REITEN I. Trivial extensions of abelian categories, homological algebra of trivial extensions of abelian categories with applications to ring theory[M]. Berlin: Springer, 1975.

[5] MINAMOTO H, YAMAURA K. Homological dimension formulas for trivial extension algebras[J]. Journal of Pure and Applied Algebra, 2020, 224(8):106344.

[6] MAO Lixin. Strongly Gorenstein projective, injective and flat modules over formal triangular matrix rings[J]. Bulletin Mathematique de la Societe des Sciences Mathematiques de Roumanie, 2020, 63(3):271-283.

[7] ASEFA D. Strongly Gorenstein-projective modules over rings of Morita contexts[J]. Beiträge zur Algebra und Geometrie/Contributions to Algebra and Geometry, 2024, 65(1):43-57.

[8] MAO Lixin. Gorenstein projective, injective and flat modules over trivial ring extensions[J]. Journal of Algebra and Its Applications, 2025, 24(2):2550030.

[9] ENOCHS E E, IZURDIAGA M C, TORREILLAS B. Gorenstein conditions over triangular matrix rings[J]. Journal of Pure and Applied Algebra, 2014, 218(8):1544-1554.

[10] ENOCHS E E, JENDA O M G. Relative homological algebra[M]. Berlin-New York: Walter de Gruyter, 2000.

(编辑:陈丽萍)