文章编号:1671-9352(2025)11-0065-05 DOI:10.6040/j.issn.1671-9352.0.2023.429

半环簇的满同余

陶炳辉,邵勇*
(西北大学数学学院, 陕西 西安 710127)

摘要:引入半环簇的满等价关系和满同余的定义,给出由满等价关系生成满同余的方法,证明由满同余所确定的半环类均是半环簇,并揭示这些簇之间的关系。所获结果推广了已有文献的相关结论。
关键词:半环;同余;簇;同态像;次直积
中图分类号:O153.5 **文献标志码**:A
引用格式:陶炳辉,邵勇.半环簇的满同余[J]. 山东大学学报(理学版),2025,60(11):65-69.

Full congruences of a semiring variety

TAO Binghui, SHAO Yong*
(School of Mathematics, Northwest University, Xi'an 710127, Shaanxi, China)

Abstract: The definitions of full equivalence relations and full congruences of a semiring variety are introduecd. A method of generating a full congruence with an arbitrary full equivalence relation is presented. Several varieties of semirings defined by full congruences are characterized and described. Some connections between these semring varieties are given and discussed. The results obtained generalize the relevant conclusions.
Key words: semiring; congruence; variety; homomorphic image; subdirect product

1 引言与预备知识

设$(S,+,\cdot)$是$(2,2)$-型代数,若 S 满足如下恒等式:

(1) $x+(y+z)\approx(x+y)+z$;

(2) $x(yz)\approx(xy)z$;

(3) $x(y+z)\approx xy+xz$, $(x+y)z\approx xz+yz$,

则称$(S,+,\cdot)$是半环,简记为 S。称$(S,+)$和$(S,\cdot)$分别为 S 的加法导出和乘法导出。若 S 的加法导出(乘法导出)是幂等的,则称 S 是加法(乘法)幂等元半环。若 S 的加法导出和乘法导出都是幂等的,则称 S 是幂等元半环。

设 $\mathscr{V}$ 是非空的同型代数类,若 $\mathscr{V}$ 关于取子代数,同态像和直积封闭,则称 $\mathscr{V}$ 是簇[1]。由 Birkhoff 定理可知,$\mathscr{V}$ 是簇当且仅当它是等式类。显然,半环的全体构成簇。

为了方便讨论,将半环 S 的加法导出$(S,+)$上的格林关系记为 $\mathscr{L}_+$、$\mathscr{R}_+$、$\mathscr{J}_+$、$\mathscr{D}_+$和 $\mathscr{H}_+$,将乘法导出$(S,\cdot)$上的格林关系记为 $\mathscr{L}_\bullet$、$\mathscr{R}_\bullet$、$\mathscr{J}_\bullet$、$\mathscr{D}_\bullet$和 $\mathscr{H}_\bullet$[2]。由文献[3]可知,

收稿日期:2023-10-16; **网络出版时间**:2024-06-20 12:35:39
基金项目:国家自然科学基金资助项目(11971383); 重庆市自然科学基金资助项目(cstc2020jcyj-msxmX0272); 陕西数理基础科学研究项目(22JSY023)
第一作者:陶炳辉(2000—),女,硕士研究生,研究方向为半环代数理论的研究. E-mail:taobinghui@126.com
***通信作者**:邵勇(1980—),男,教授,硕士生导师,博士,研究方向为半环代数理论的研究. E-mail:yongshaomath@126.com

$$(s,t)\in\mathscr{L}_+\Leftrightarrow(\exists p,q\in S^0)p+s=t,\ q+t=s,$$
$$(s,t)\in\mathscr{R}_+\Leftrightarrow(\exists p,q\in S^0)s+p=t,\ t+q=s,$$
$$(s,t)\in\mathscr{J}_+\Leftrightarrow(\exists p,q,m,n\in S^0)p+s+q=t,\ m+t+n=s,$$
$$(s,t)\in\mathscr{L}_\bullet\Leftrightarrow(\exists p,q\in S^1)ps=t,\ qt=s,$$
$$(s,t)\in\mathscr{R}_\bullet\Leftrightarrow(\exists p,q\in S^1)sp=t,\ tq=s,$$
$$(s,t)\in\mathscr{J}_\bullet\Leftrightarrow(\exists p,q,m,n\in S^0)psq=t,\ mtn=s。$$

近些年,一些学者借助半环的加法导出和乘法导出上的格林关系对加法(乘法)幂等元半环和幂等元半环簇进行研究[4]。Pastijn[2]证明在幂等分配半环上 $\mathscr{D}_+$ 和 $\mathscr{D}_\bullet$ 都是同余;Pastijn 等[5]给出幂等元半环上 $\mathscr{D}_\bullet$ 是最小格同余的等价刻画;Zhao 等[6]研究幂等元半环上加法导出和乘法导出的格林关系 $\mathscr{D}$,证明了 $\mathscr{D}_\bullet$ 是同余当且仅当 $\mathscr{D}_+\cap\mathscr{D}_\bullet$ 和 $\mathscr{D}_+\vee\mathscr{D}_\bullet$ 是同余,给出了 $\mathscr{D}_+\cap\mathscr{D}_\bullet$ 和 $\mathscr{D}_+\vee\mathscr{D}_\bullet$ 是同余的充分必要条件,并且证明由这些同余确定的半环类都是簇。

经过梳理会发现,在绝大部分已发表的研究成果中,借助格林关系研究时,均要求讨论的格林关系是半环同余。但通常情况下,半环的加法和乘法导出上的格林关系不是同余[7],于是一些学者探究了由格林关系生成的半环同余。Damljanović等[8]研究半环上由等价关系生成的开同余,即包含于该等价关系的最大半环同余,给出了格林关系 $\mathscr{L}_+$,$\mathscr{R}_+$的开同余的刻画和性质,利用商半环及同态像,定义了与 $\mathscr{L}_+$,$\mathscr{R}_+$的开同余相关的半环类,证明这些半环类是簇;Cheng 等[9]研究半环上格林关系 $\mathscr{L}_\bullet$,$\mathscr{R}_\bullet$,$\mathscr{H}_\bullet$,$\mathscr{D}_\bullet$ 的开同余,证明由这些开同余确定的半环类是簇,揭示了半环的加法和乘法导出上的格林关系的开同余所确定的半环簇之间的关系;Xian 等[10]给出半环上由二元关系生成闭同余的方法,研究半环的加法导出和乘法导出上格林关系的闭同余,定义与这些闭同余相关的半环类,证明这些半环类是簇,揭示半环的加法和乘法导出上的格林关系的开、闭同余所确定的半环簇之间的关系。

显然,半环的加法和乘法导出上的格林关系是给定半环簇中任意半环都具有的等价关系,且与该簇中任意两个半环之间的满同态都具有相容性。本文将半环的加法和乘法导出上的格林关系所满足的性质提炼,引入半环簇的满等价关系的定义,进一步定义半环簇的满同余,证明由满等价关系生成的开、闭同余一定是满同余。借助商半环和同态像,定义与满同余相关的半环类,证明这些由满同余所确定的半环类均是簇,揭示这些半环簇之间的关系。所获结果推广了文献[8-10]中的相关结论。

2 满同余的刻画

定义 1 设 $\mathscr{V}$ 是半环簇,θ 是 $\mathscr{V}$ 中任意半环都具有的等价关系,若对 $S,T\in\mathscr{V}$,以及满同态 $\phi:S\to T$,均有 $a,b\in S$, $(a,b)\in\theta$ 蕴含 $(a\phi,b\phi)\in\theta$,则称 θ 是 $\mathscr{V}$ 的满等价关系。进一步地,若 θ 是同余,则称 θ 是 $\mathscr{V}$ 的满同余。

注 1 半环的全体构成的簇记为 $\mathscr{S}$,显然半环的加法导出和乘法导出上的格林关系是 $\mathscr{S}$ 的满等价关系。恒等关系和泛关系不仅是 $\mathscr{S}$ 的满等价关系,而且是 $\mathscr{S}$ 的满同余。

注 2 如果 θ 是半环簇 $\mathscr{V}$ 的满等价关系,那么 θ 也是 $\mathscr{V}$ 的任一子簇的满等价关系,反之则不一定成立。

用 $\mathscr{T}$ 表示幂等元半环簇,则有 $\mathscr{D}_\bullet$ 是 $\mathscr{T}$ 的满等价关系。设 $\mathscr{N}$ 是 $\mathscr{T}$ 的满足附加恒等式

$$x+xyx+x\approx x$$

的子簇,由文献[5]的定理 2.11 可知,对 $\mathscr{N}$ 中的半环 S,均有 $\mathscr{D}_\bullet$ 是 S 上的同余,这表明 $\mathscr{D}_\bullet$ 是 $\mathscr{N}$ 的满同余。下面例子说明 $\mathscr{D}_\bullet$ 不是 $\mathscr{T}$ 的满同余。

例 1 设半环$(T,+,\cdot)$的加法和乘法运算表如下所示:

$+$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	b	c	c
c	c	c	c	c
d	d	c	c	d

$\cdot$	a	b	b	b
a	a	a	a	a
b	b	b	b	b
c	b	b	c	c
d	a	b	c	d

容易验证 T 是幂等元半环,且 $\mathscr{L}_{\bullet}=\mathscr{D}_{\bullet}$。由运算表可知 $a\mathscr{L}_{\bullet}b$,但$(a+d=d,b+d=c)\notin\mathscr{L}_{\bullet}$,因此 $\mathscr{D}_{\bullet}=\mathscr{L}_{\bullet}$ 不是同余。

下面将借助开同余和闭同余的刻画,给出从满等价关系出发,构造满同余的方法。

设 ρ 是半环 S 上的等价关系,$\rho^{\oplus}$ 和 $\rho^{\odot}$ 分别表示 ρ 在加法导出$(S,+)$和乘法导出$(S,\cdot)$上的开同余。由文献[8]可知

$$(a,b)\in\rho^{\oplus}\Leftrightarrow(\forall x,y\in S^0)(x+a+y,x+b+y)\in\rho,$$
$$(a,b)\in\rho^{\odot}\Leftrightarrow(\forall u,v\in S^1)(uav,ubv)\in\rho,$$

其中 a、$b\in S$,称 $\rho^{\oplus}$ 和 $\rho^{\odot}$ 分别为 ρ 在 S 上的加法开同余和乘法开同余。

引理 1[8]　设$(S,+,\cdot)$是半环,ρ 是 S 上的等价关系,则 ρ 在 S 上的开同余 $\rho^{\circ}=(\rho^{\oplus})^{\odot}$,即对任意 a、$b\in S$,均有

$$(a,b)\in\rho^{\circ}\Leftrightarrow(\forall x,y\in S^0)(\forall u,v\in S^1)(x+uav+y,\ x+ubv+y)\in\rho。$$

文献[10]给出了半环上由任意二元关系生成闭同余的方法。设 R 是半环 S 上的二元关系,则存在唯一的由 R 生成的同余 $R^{\#}$,即包含 R 的最小半环同余,称 $R^{\#}$ 为 R 在 S 上的闭同余。

定义如下 2 个关系:

$$R^{\boxplus}=\{(x+a+y,x+b+y):x,y\in S^0,\ (a,b)\in R\},$$
$$R^{\boxtimes}=\{(uav,ubv):u,v\in S^1,\ (a,b)\in R\},$$

显然,$R^{\boxplus}$ 和 $R^{\boxtimes}$ 是包含 R 的分别与加法相容和乘法相容的关系。若半环上的二元关系同时满足加法相容和乘法相容,则称它是相容的,将半环 S 上包含 R 的最小相容关系表示为 $R^{\square}$。

引理 2[10]

$$R^{\square}=(R^{\boxtimes})^{\boxplus}=\{(x+uav+y,x+ubv+y):u,v\in S^1,x,y\in S^0,\ (a,b)\in R\}。$$

引理 3[10]　设 R 是半环 S 上的任意二元关系,则 $R^{\#}=(R^{\square})^{e}$。

定理 1　设 $\mathscr{V}$ 是半环簇,若 ρ 是 $\mathscr{V}$ 的满等价关系,则 ρ° 和 $\rho^{\#}$ 都是满同余。

证明　设 S 和 T 是 $\mathscr{V}$ 中两个半环,$\phi:S\to T$ 是满同态。为了方便起见,取 $0\phi=0$, $1\phi=1$。设 $a,b\in S$,$(a,b)\in\rho^{\circ}$,由于 ϕ 是满同态,对 r、$s\in T^0$ 和 $p,q\in T^1$,存在 x、$y\in S^0$ 和 u、$v\in S^1$,使得 $x\phi=r$, $y\phi=s$, $u\phi=p$ 和 $v\phi=q$。由 ρ° 是开同余可知

$$(x+uav+y,x+ubv+y)\in\rho,$$

再由 ρ 是满等价关系,得

$$((x+uay+y)\phi,(x+uby+y)\phi)\in\rho,$$

于是

$$(x\phi+u\phi a\phi y+y\phi,x\phi+u\phi b\phi y\phi+y\phi)\in\rho,$$

进而$(r+p(a\phi)q+s,r+p(b\phi)q+s)\in\rho$。这表明$(a\phi,b\phi)\in\rho^{\circ}$,即 ρ° 是满同余。

由文献[3]的命题 1.4.9 可得 $\rho^{\#}=(\rho^{\square})^{\infty}$。设 $s,t\in S$, $(s,t)\in(\rho^{\square})^{\infty}$,则存在正整数 n 和 $z_1,z_2,\cdots,z_{n-1}\in S$,使得

$$(s,z_1),(z_1,z_2),\cdots,(z_{n-1},t)\in\rho^{\square}。$$

由于$(s,z_1)\in\rho^{\square}$,故存在 $u,v\in S$, $x,y\in S^0$ 和$(a,b)\in\rho$,使得

$$s=x+uay+y,\quad z_1=x+uby+y。$$

在 T 中有$(a\phi,b\phi)\in\rho$ 且

$$s\phi=x\phi+u\phi a\phi y\phi+y\phi,\quad z_1\phi=x\phi+u\phi b\phi y+y\phi,$$

从而可知$(s\phi,z_1\phi)\in\rho^{\square}$。于是

$$(s\phi,z_1\phi),(z_1\phi,z_2\phi),\cdots,(z_{n-1}\phi,t\phi)\in\rho^{\square},$$

由文献[10]的命题 2.6 可得$(s\phi,t\phi)\in\rho^{\#}$,故 $\rho^{\#}$ 是满同余。

例 2　设 $\mathscr{V}$ 是半环簇,S 是 $\mathscr{V}$ 中半环,取定正整数 $n\geqslant 2$,定义二元关系 $\sim_{(n)}$ 为

$$a\sim_{(n)}b\Leftrightarrow na=nb。$$

显然,$\sim_{(n)}$ 是 S 上的同余。进一步有,$\sim_{(n)}$ 是 $\mathscr{V}$ 的满同余。特别地,同余 $\sim_{(2)}$ 在乘法幂等元半环的研究中发

挥了关键作用[11]。

3 由满同余所确定的半环簇

设 $\mathscr{V}$ 是半环簇,θ 是 $\mathscr{V}$ 的满同余,借助满同余可定义如下半环类:

$$\mathscr{V}_\theta = \boldsymbol{H}(\{S/\theta : S \in \mathscr{V}\})。$$

设 $\mathscr{C}$ 是半环类,$\boldsymbol{H}(\mathscr{C})$ 表示取自 $\mathscr{C}$ 中的半环的同态像的全体。

由文献[1]的定理 11.12 可知,一个非空的同型代数类是簇当且仅当它在同态像和次直积下封闭。

引理 4[1] 设 $\boldsymbol{A}$ 是代数,$\{\theta_i\}_{i \in I}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 上一族同余且 $\theta = \bigcap_{i \in I} \theta_i$,则 $\boldsymbol{A}/\theta$ 能次直嵌入 $\prod_{i \in I} \boldsymbol{A}/\theta_i$。

引理 5[12] 半环 S 是一族半环 $\{S_i\}_{i \in I}$ 的次直积,当且仅当存在 S 上的一族同余 $\{\rho_i\}_{i \in I}$,使得对 $i \in I$, $S/\rho_i \cong S_i$,且 $\bigcap_{i \in I} \rho_i = 1_S$,其中 1_S 是 S 上的恒等关系。

如果 $\{S_i\}_{i \in I}$ 是一族有共同同态像 H 的半环,即对 $i \in I$,存在一个满同态 $\phi_i : S_i \to H$,且对 $j \in I$, $\pi_j : \prod_{i \in I} S_i \to S_j$ 是投影满射,那么

$$S = \{a \in \prod_{i \in I} S_i : (\forall i, j \in I)\, a\pi_i\phi_i = a\pi_j\phi_j\}$$

是 $\{S_i\}_{i \in I}$ 的特殊的次直积,称为 $\{S_i\}_{i \in I}$ 的 pullback 积[13]。

定理 2 设 $\mathscr{V}$ 是半环簇,若 θ 是 $\mathscr{V}$ 的满同余,则 $\mathscr{V}_\theta$ 是簇。

证明 显然 $\mathscr{V}_\theta$ 关于取同态像封闭,只需证明它关于次直积封闭。设 $\{T_i\}_{i \in I}$ 是一族取自 $\mathscr{V}_\theta$ 的半环且 T 是 $\{T_i\}_{i \in I}$ 的次直积,对于 $i \in I$,设 $\pi_i : \prod_{j \in I} T_j \to T_i$ 表示投影满射。由 $\mathscr{V}_\theta$ 的定义可知,存在半环 $S_i \in \mathscr{V}$ 且对 $T_i \in \{T_i\}_{i \in I}$,存在满同态 $\phi_i : S_i/\theta \to T_i$。此外,对 $i \in I$,设 $\lambda_i : S_i \to S_i/\theta$ 是自然同态,$\rho_i : \prod_{j \in I} S_j \to S_i$,令

$$S = \{s \in \prod_{i \in I} S_i : (\exists t \in T)(\forall i \in I)\, t\pi_i = s\rho_i\lambda_i\phi_i\}。$$

容易验证 S 非空。对 $s \in S$,存在 $t \in T$,使得对 $i \in I$,有 $t\pi_i = s\rho_i\lambda_i\phi_i$。若还存在 $t' \in T$,使得 $t'\pi_i = s\rho_i\lambda_i\phi_i$,则有 $t'\pi_i = t\pi_i$,由 π_i 是投影满射可知 $t' = t$。根据 t 的唯一性,对 $s \in S$,通过下述方式定义映射 $\varphi : S \to T$,

$$s\varphi = t \Leftrightarrow (\forall i \in I)\, t\pi_i = s\rho_i\lambda_i\phi_i。$$

由 π_i,ρ_i,λ_i 和 ϕ_i 是满同态可知,φ 也是满同态。对 $s_1, s_2 \in S$,存在 $t_1, t_2 \in T$,使得对 $i \in I$,均有

$$t_1\pi_i = s_1\rho_i\lambda_i\phi_i, \quad t_2\pi_i = s_2\rho_i\lambda_i\phi_i,$$

进而 $(t_1t_2)\pi_i = (s_1s_2)\rho_i\lambda_i\phi_i$ 且 $t_1t_2 \in T$,因此,可得 $s_1s_2 \in S$。类似地有 $s_1 + s_2 \in S$,故 S 是 $\prod_{i \in I} S_i$ 的子半环。因为 $\mathscr{V}$ 是簇且对于 $i \in I$,有 $S_i \in \mathscr{V}$,所以 $S \in \mathscr{V}$。

设 $s_1, s_2 \in S$, $(s_1, s_2) \in \theta$,由 θ 是满同余可知,在 S_i 上有 $(s_1\rho_i, s_2\rho_i) \in \theta$,即对于 $i \in I$,有 $s_1\rho_i\lambda_i = s_2\rho_i\lambda_i$,故

$$(s_1\varphi)\pi_i = s_1\rho_i\lambda_i = s_2\rho_i\lambda_i = (s_2\varphi)\pi_i,$$

于是 $s_1\varphi = s_2\varphi$,即 $(s_1, s_2) \in \ker\varphi$,从而 $\theta \subseteq \ker\varphi$,得到 $S/\ker\varphi$ 是 S/θ 的同态像。由 $S/\ker\varphi \cong T$ 可知,$T \in \mathscr{V}_\theta$,因此 $\mathscr{V}_\theta$ 关于次直积封闭,这表明 $\mathscr{V}_\theta$ 是簇。

定理 3 设 $\mathscr{V}$ 是半环簇,若 θ 和 σ 是 $\mathscr{V}$ 的满同余,则

$$\mathscr{V}_{\theta \vee \sigma} = \mathscr{V}_\theta \cap \mathscr{V}_\sigma, \quad \mathscr{V}_{\theta \cap \sigma} = \mathscr{V}_\theta \vee \mathscr{V}_\sigma。$$

证明 对 $S \in \mathscr{V}_\theta \cap \mathscr{V}_\sigma$,存在 $T_1, T_2 \subseteq \mathscr{V}$,满同态 $\phi_1 : T_1/\theta \to S$ 和 $\phi_2 : T_2/\sigma \to S$。设 $\nu_1 : T_1 \to T_1/\theta$ 和 $\nu_2 : T_2 \to T_2/\sigma$ 是自然同态,$\pi_1 : T_1 \times T_2 \to T_1$ 和 $\pi_2 : T_1 \times T_2 \to T_2$ 是投影满射,$T = \{t \in T_1 \times T_2 : t\pi_1\nu_1\phi_1 = t\pi_2\nu_2\phi_2\}$ 是 T_1 和 T_2 关于 S 的 pullback 积。由满同态 $\nu_1\phi_1 : T_1 \to S$ 和 $\nu_2\phi_2 : T_2 \to S$ 可得,$T \in \mathscr{V}$。设 $\phi = \pi_1\nu_1\phi_1 = \pi_2\nu_2\phi_2$,则 ϕ 是从 T 到 S 的满同态。

设 $s, t \in T$ 且 $(s, t) \in \theta \vee \sigma$,则由文献[3]的命题 1.5.11 可知,存在正整数 n 和 $c_1, c_2, \cdots, c_{2n-1} \in T$,使得

$$(s, c_1) \in \theta, (c_1, c_2) \in \sigma, (c_2, c_3) \in \theta, \cdots, (c_{2n-1}, t) \in \sigma,$$

进而

$$\begin{aligned} s\phi &= s\pi_1\nu_1\phi_1 = c_1\pi_1\nu_1\phi_1 = c_2\pi_2\nu_2\phi_2 = c_3\pi_1\nu_1\phi_1 = \cdots \\ &= c_{2n-1}\pi_2\nu_2\phi_2 = t\pi_2\nu_2\phi_2 = t\phi, \end{aligned}$$

故 $s\phi = t\phi$。于是$(s,t) \in \ker\phi$,即 $\theta \vee \sigma \subseteq \ker\phi$,这表明 S 是 $T/(\theta \vee \sigma)$的同态像。再由 $T \in \mathscr{V}$ 可得,$S \in \mathscr{V}_{\theta\vee\sigma}$,从而 $\mathscr{V}_\theta \cap \mathscr{V}_\sigma \subseteq \mathscr{V}_{\theta\vee\sigma}$,因此,$\mathscr{V}_\theta \cap \mathscr{V}_\sigma = \mathscr{V}_{\theta\vee\sigma}$。

由于 $\theta\cap\sigma\subseteq\theta$, $\theta\cap\sigma\subseteq\sigma$,结合第二同构定理可知,$S/\theta$ 和 S/σ 是 $S/(\theta\cap\sigma)$的同态像,得到 $S/\theta, S/\sigma \in \mathscr{V}_{\theta\cap\sigma}$,即 $\mathscr{V}_\theta$、$\mathscr{V}_\sigma \subseteq \mathscr{V}_{\theta\cap\sigma}$,故 $\mathscr{V}_\theta \vee \mathscr{V}_\sigma \subseteq \mathscr{V}_{\theta\cap\sigma}$。

反之,对 $S \in \mathscr{V}_{\theta\cap\sigma}$,存在 $T \in \mathscr{V}$,使得 S 是 $T/(\theta\cap\sigma)$的同态像。由引理 4 可得,$T/(\theta\cap\sigma)$是 T/θ 和 T/σ 的次直积,这表明 $T/(\theta\cap\sigma) \in \mathscr{V}_\theta \vee \mathscr{V}_\sigma$,即 $S \in \mathscr{V}_\theta \vee \mathscr{V}_\sigma$,故 $\mathscr{V}_{\theta\cap\sigma} \subseteq \mathscr{V}_\theta \vee \mathscr{V}_\sigma$。综上,$\mathscr{V}_{\theta\cap\sigma} = \mathscr{V}_\theta \vee \mathscr{V}_\sigma$。

将半环的加法和乘法导出上的格林关系的开同余和闭同余分别表示为

$$\mathscr{L}^\circ_+, \mathscr{R}^\circ_+, \mathscr{J}^\circ_+, \mathscr{D}^\circ_+, \mathscr{H}^\circ_+, \mathscr{L}^\circ_\bullet, \mathscr{R}^\circ_\bullet, \mathscr{J}^\circ_\bullet, \mathscr{D}^\circ_\bullet, \mathscr{H}^\circ_\bullet,$$
$$\mathscr{L}^\#_+, \mathscr{R}^\#_+, \mathscr{J}^\#_+, \mathscr{D}^\#_+, \mathscr{H}^\#_+, \mathscr{L}^\#_\bullet, \mathscr{R}^\#_\bullet, \mathscr{J}^\#_\bullet, \mathscr{D}^\#_\bullet, \mathscr{H}^\#_\bullet。$$

另外,用 $\mathscr{P}_\bullet$ 和 $\mathscr{P}_+$ 分别表示 $\mathscr{L}^\circ_\bullet \circ \mathscr{R}^\circ_\bullet$ 和 $\mathscr{L}^\circ_+ \circ \mathscr{R}^\circ_+$,$\mathscr{O}_\bullet$ 和 $\mathscr{O}_+$ 分别表示 $\mathscr{L}^\#_\bullet \vee \mathscr{R}^\#_\bullet$ 和 $\mathscr{L}^\#_+ \vee \mathscr{R}^\#_+$,$\mathscr{Q}_\bullet$ 和 $\mathscr{Q}_+$ 分别表示 $\mathscr{L}^\#_\bullet \vee \mathscr{R}^\#_\bullet$ 和 $\mathscr{L}^\#_+ \vee \mathscr{R}^\#_+$,显然以上都是 $\mathscr{S}$ 的满同余。

当 θ、σ 取 $\mathscr{L}^\circ_+$、$\mathscr{R}^\circ_+$ 和 $\mathscr{P}_+$ 时,上述结论即是文献[8]中的定理 4.1;当 θ、σ 取 $\mathscr{L}^\circ_\bullet$、$\mathscr{R}^\circ_\bullet$、$\mathscr{H}^\circ_\bullet$ 和 $\mathscr{D}^\circ_\bullet$ 时,上述结论即是文献[9]中的定理 4.1;任取 θ、$\sigma \in \{\mathscr{L}^\#_+, \mathscr{R}^\#_+, \mathscr{H}^\#_+, \mathscr{Q}_+, \mathscr{D}^\#_+, \mathscr{O}_+, \mathscr{J}^\#_+, \mathscr{L}^\#_\bullet, \mathscr{R}^\#_\bullet, \mathscr{H}^\#_\bullet, \mathscr{Q}_\bullet, \mathscr{D}^\#_\bullet, \mathscr{O}_\bullet, \mathscr{J}^\#_\bullet, \mathscr{L}^\circ_+, \mathscr{R}^\circ_+, \mathscr{P}_+, \mathscr{H}^\circ_+, \mathscr{D}^\circ_+, \mathscr{J}^\circ_+, \mathscr{L}^\circ_\bullet, \mathscr{R}^\circ_\bullet, \mathscr{P}_\bullet, \mathscr{H}^\circ_\bullet, \mathscr{D}^\circ_\bullet, \mathscr{J}^\circ_\bullet\}$,上述结论即是文献[10]中的定理 3.2 和定理 3.3。

参考文献:

[1] BURRIS S, SANKAPPANAVAR H P. A course in universal algebra[M]. New York: Springer, 1981.

[2] PASTIJN F. Idempotent distributive semirings II[J]. Semigroup Forum, 1983, 26(1):151-166.

[3] HOWIE J M. Fundamentals of semigroup theory[M]. New York: Oxford University Press, 1995.

[4] 赵宪钟,邵勇,任苗苗. 中国半环理论研究综述[J]. 数学进展,2022,51(5):781-795.
ZHAO Xianzhong, SHAO Yong, REN Miaomiao. A survey on the study of semiring theory in China[J]. Advance In Mathematics, 2022, 51(5):781-795.

[5] PASTIJN F, ZHAO X Z. Green's $\mathscr{D}$-relation for the multiplicative reduct of an idempotent semiring[J]. Archivum Mathematicum, 2000, 36(2):77-93.

[6] ZHAO X Z, GUO Y Q, SHUM K P. $\mathscr{D}$-subvarieties of the variety of idempotent semirings[J]. Algebra Colloquium, 2002, 9(1):15-28.

[7] ZHAO X Z, SHUM K P, GUO Y Q. $\mathscr{L}$-subvarieties of idempotent semirings[J]. Algebra Universalis, 2001, 46(1/2):75-96.

[8] DAMLJANOVIĆ N, ĆIRIĆ M, BOGDANOVIĆ S. Congruence openings of additive Green's relations on a semiring[J]. Semigroup Forum, 2011, 82(3):437-454.

[9] CHENG Yanliang, SHAO Yong. Semiring varieties related to multiplicative Green's relations on a semiring[J]. Semigroup Forum, 2020, 101(3):571-584.

[10] XIAN X L, SHAO Y, CRVENKOVIĆ S. Semiring varieties related to closure congruences of Green's relations[J]. Publicationes Mathematicae Debrecen, 2023, 102(3/4):401-413.

[11] VECHTOMOV E M, PETROV A A. Multiplicatively idempotent semirings[J]. Journal of Mathematical Sciences, 2015, 206(6):634-653.

[12] BIRKHOFF G. Subdirect unions in universal algebra[J]. Bulletin of the American Mathematical, 1944, 50:764-768.

[13] FUCHS L. On subdirect unions I[J]. Acta Mathematica Hungarica, 1952, 3:103-120.

(编辑:陈丽萍)