山东大学学报(理学版)2025年11月 第60卷 第11期
Journal of Shandong University(*Natural Science*), Vol.60, No.11, 2025　　http://lxbwk.njournal.sdu.edu.cn

文章编号:1671-9352(2025)11-0054-05　　DOI:10.6040/j.issn.1671-9352.0.2023.470

平凡扩张范畴中的 Gorenstein 同调对象

秦晓宇,梁力*
(兰州交通大学数理学院, 甘肃 兰州 730070)

摘要:介绍函子的(余)相容性,给出阿贝尔范畴的平凡扩张范畴中 Gorenstein 同调对象的刻画。

关键词:Gorenstein 投射对象;Gorenstein 内射对象;阿贝尔范畴;平凡扩张;(余)相容性
中图分类号:O154.2　　**文献标志码**:A
引用格式:秦晓宇,梁力.平凡扩张范畴中的 Gorenstein 同调对象[J]. 山东大学学报(理学版),2025,60(11):54-58,64.

Gorenstein homological objects in trivial extensions

QIN Xiaoyu, LIANG Li*
(School of Mathematics and Physics, Lanzhou Jiaotong University, Lanzhou 730070, Gansu, China)

Abstract: By introducing the (co)compatibility of functors, we give the characterizations of Gorenstein homological objects in trivial extensions of abelian categories.

Key words: Gorenstein projective object; Gorenstein injective object; Abel category; trivial extension; (co)compatibility

1　引言及预备知识

Gorenstein 同调代数源于上世纪60年代关于双边诺特环上有限生成模的 Gorenstein 维数的研究[1]。文献[2-4]在任意环上介绍 Gorenstein 投射模、Gorenstein 内射模和 Gorenstein 平坦模,发展了 Gorenstein 同调代数。1975年,Fossum 等[5]介绍阿贝尔范畴的平凡扩张范畴。在具体的模范畴的平凡扩张范畴中,Mao[6]给出 Gorenstein 投射对象和 Gorenstein 内射对象的刻画,证明若 M 是广义相容 R-R-双模,$Z(R)$ 是广义相容 $R\ltimes M$-$R\ltimes M$-双模,则 (X,α) 是 Gorenstein 投射左 $R\ltimes M$-模当且仅当序列 $M\otimes_R M\otimes_R X\xrightarrow{M\otimes\alpha}M\otimes_R X\xrightarrow{\alpha}X$ 正合且 $\mathrm{Coker}(\alpha)$ 是 Gorenstein 投射左 R-模。本文将 Mao 的结论推广到阿贝尔范畴的平凡扩张范畴中,证明以下结论。

定理 A　令 $\mathscr{A}$ 是具有足够投射和内射对象的阿贝尔范畴,$F:\mathscr{A}\to\mathscr{A}$ 是右正合函子且具有相容性,(X,α) 是 $\mathscr{A}\ltimes F$ 中的对象。考虑以下条件:

(1) 序列 $F^2(X)\to F(X)\xrightarrow{\alpha}X$ 正合,$\mathrm{Coker}(\alpha)$ 是 Gorenstein 投射的;

(2) (X,α) 是 Gorenstein 投射的,

则(1)⇒(2)成立。进一步地,若对 $\mathscr{A}\ltimes F$ 中的任意完全投射分解 Δ 以及 $\mathscr{A}$ 中的任意投射对象 Q,有 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}\ltimes F}(\Delta,Z(Q))$ 正合,且 $C:\mathscr{A}\ltimes F\to\mathscr{A}$ via $(X,\alpha)\to\mathrm{Coker}(\alpha)$ 是左正合函子,则(2)⇒(1)成立。

$\mathscr{A}$ 是具有足够投射和内射对象的阿贝尔范畴,$F:\mathscr{A}\to\mathscr{A}$ 是右正合函子,$\mathscr{A}$ 关于加法函子 F 的右平凡扩张记作 $\mathscr{A}\ltimes F$,则 $\mathscr{A}\ltimes F$ 是阿贝尔范畴。$\mathscr{A}\ltimes F$ 的对象形如 (X,f),其中 $X\in\mathrm{Ob}(\mathscr{A})$, $f:F(X)\to X$,使得

收稿日期:2023-11-08; **网络出版时间**:2024-09-03 10:51:52
基金项目:国家自然科学基金资助项目(12271230); 兰州交通大学“百名青年优秀人才培养计划”基金资助项目
第一作者:秦晓宇(1999—),女,硕士研究生,研究方向为同调代数. E-mail:lyqinxiaoyu@163.com
* **通信作者**:梁力(1980— ,男,教授,硕士生导师,博士,研究方向为同调代数. E-mail:lliangnju@gmail.com

$fF(f)=0$,并且态射 $\gamma:(X,\alpha)\to(Y,\beta)$ 是指 $\mathscr{A}$ 中的态射 $\gamma:X\to Y$ 使得

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "F(\gamma)"] \arrow[d, "\alpha"'] & F(Y) \arrow[d, "\beta"] \\ X \arrow[r, "\gamma"] & Y \end{tikzcd}$$

可交换。

在这种情况下 $\mathscr{A}\ltimes F$ 中的序列正合当且仅当 $\mathscr{A}$ 中的序列正合,即序列

$$0\to(A,\alpha)\to(B,\beta)\to(C,\gamma)\to 0$$

正合当且仅当序列

$$0\to A\to B\to C\to 0$$

正合。

以下定义一些重要函子。

定义函子 $T:\mathscr{A}\to\mathscr{A}\ltimes F$,其中对任意 $X\in\mathscr{A}$,有 $T(X)=(X\oplus F(X),\mu)$,其中 $\mu=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}:F^2(X)\oplus F(X)\to X\oplus F(X)$,且对任意态射 $\alpha:X\to X'$ 有 $T(\alpha)=\begin{pmatrix}\alpha&0\\0&F(\alpha)\end{pmatrix}$。

定义函子 $U:\mathscr{A}\ltimes F\to\mathscr{A}$,其中对任意 $(X,f)\in\mathscr{A}\ltimes F$,有 $U(X,f)=X$,且对任意态射 $\alpha:(X,f)\to(X',f')$ 有 $U(\alpha)=\alpha$。

定义函子 $Z:\mathscr{A}\to\mathscr{A}\ltimes F$,其中对任意 $X\in\mathscr{A}$,有 $Z(X)=(X,0)$,且对任意态射 $\alpha:X\to X'$ 有 $Z(\alpha)=\alpha$。

定义函子 $C:\mathscr{A}\ltimes F\to\mathscr{A}$,其中对任意 $(X,f)\in\mathscr{A}\ltimes F$,有 $C(X,f)=\mathrm{Coker}(f)$,且对任意态射 $\alpha:(X,f)\to(X',f')$ 有 $C(\alpha)=$ 诱导态射。

注意到 T 和 C 是右正合函子,U 和 Z 是正合函子,其中 (T,U),(C,Z) 均是伴随对,且 $CT=id_{\mathscr{A}}$, $UZ=id_{\mathscr{A}}$。

2 平凡扩张范畴中的 Gorenstein 同调对象

定义 1 称 F 具有相容性,如果对 $\mathscr{A}$ 中的任意完全投射分解 Δ,有 $F(\Delta)$ 和 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(\Delta,F(P))$ 正合,其中 P 是 $\mathscr{A}$ 中的任意投射对象。

定理 1 假设 F 具有相容性,令 (X,α) 是 $\mathscr{A}\ltimes F$ 中的对象,如果 $F^2(X)\to F(X)\xrightarrow{\alpha}X$ 正合,并且 $\mathrm{Coker}(\alpha)$ 是 Gorenstein 投射的,那么 (X,α) 是 Gorenstein 投射的。

证明 因为 $\mathrm{Coker}(\alpha)$ 是 Gorenstein 投射的,所以在 $\mathscr{A}$ 中有完全投射分解,

$$\Delta:\cdots P^{-1}\xrightarrow{f^{-1}}P^0\xrightarrow{f^0}P^1\xrightarrow{f^1}P^2\to\cdots,$$

其中 P^i 均是 $\mathscr{A}$ 中的投射对象且 $\mathrm{Coker}(\alpha)\cong\mathrm{Ker}(f^0)$。又因为 F 具有相容性,所以

$$F(\Delta):\cdots\longrightarrow F(P^{-1})\xrightarrow{F(f^{-1})}F(P^0)\xrightarrow{F(f^0)}F(P^1)\xrightarrow{F(f^1)}F(P^2)\longrightarrow\cdots$$

正合,且 $F(\mathrm{Coker}(\alpha))\cong\mathrm{Ker}(F(f^0))$。由条件知序列

$$F^2(X)\to F(X)\xrightarrow{\alpha}X\xrightarrow{\rho}\mathrm{Coker}(\alpha)\to 0$$

正合,故序列

$$F^2(X)\to F(X)\xrightarrow{F(\rho)}F(\mathrm{Coker}(\alpha))\to 0$$

正合,则由余核的泛性质知存在 $\delta:F(\mathrm{Coker}(\alpha))\to X$,使得 $\alpha=\delta F(\rho)$。

考虑交换图

$$\begin{tikzcd} F^2(X) \arrow[r] \arrow[d] & F(X) \arrow[r, "F(\rho)"] \arrow[d] & F(\mathrm{Coker}(\alpha)) \arrow[r] \arrow[d, "\delta"'] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\ F^2(X) \arrow[r] & F(X) \arrow[r, "\alpha"] & X \arrow[r] & \mathrm{Coker}(\alpha) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd},$$

则由五引理知 δ 是单的,所以 $\mathrm{Coker}(\alpha)\cong\mathrm{Coker}(\delta)$,故有正合列

$$0\to F(\mathrm{Coker}(\alpha))\xrightarrow{\delta}X\xrightarrow{\rho}\mathrm{Coker}(\alpha)\to 0,$$

令 $K^i=\mathrm{Ker}(f^i)$，考虑正合列

$$0\to K^0\to P^0\to K^1\to 0,$$

用 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(-,F(P^i))$ 作用该正合列，有

$$0\to\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(K^1,F(P^i))\to\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(P^0,F(P^i))\to\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(K^0,F(P^i))\to\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{A}}(K^1,F(P^i))\to 0$$

正合。因为 F 具有相容性，所以序列 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(\Delta,F(P^i))$ 正合，因此 $\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{A}}(K^1,F(P^i))=0$，以此类推知 $\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{A}}(K^j,F(P^i))=0$，其中 $i,j\geqslant 0$。令 $\pi:P^{-1}\to\mathrm{Coker}(\alpha)$ 是满态射，结合序列

$$0\to F(\mathrm{Coker}(\alpha))\xrightarrow{\delta}X\xrightarrow{\rho}\mathrm{Coker}(\alpha)\to 0$$

正合，可知存在 $\eta:P^{-1}\to X$ 使得 $\pi=\rho\eta$。用 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(-,F(P^0))$ 作用正合列

$$0\to F(\mathrm{Coker}(\alpha))\xrightarrow{\delta}X\xrightarrow{\rho}\mathrm{Coker}(\alpha)\to 0,$$

得序列

$$\begin{aligned}&0\to\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(\mathrm{Coker}(\alpha),F(P^0))\to\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(X,F(P^0))\xrightarrow{\delta^*}\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(F(\mathrm{Coker}(\alpha)),F(P^0))\\&\to\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{A}}(\mathrm{Coker}(\alpha),F(P^0))\to 0\end{aligned}$$

正合。注意到 $\mathrm{Coker}(\alpha)=K^0$，由 $\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{A}}(K^j,F(P^i))=0$ 知 $\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{A}}(\mathrm{Coker}(\alpha),F(P^0))=0$，所以序列

$$0\to\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(\mathrm{Coker}(\alpha),F(P^0))\to\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(X,F(P^0))\xrightarrow{\delta^*}\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(F(\mathrm{Coker}(\alpha)),F(P^0))\to 0$$

正合，所以存在 $\psi:X\to F(P^0)$ 使得 $\psi\delta=F(\varepsilon)$，其中 $\varepsilon:\mathrm{Coker}(\alpha)\to P^0$ 是标准嵌入。

考虑行正合的交换图

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & F(\mathrm{Coker}(\alpha)) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "F(\varepsilon)"'] & X \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "\binom{\varepsilon\rho}{\psi}"'] & \mathrm{Coker}(\alpha) \arrow[r] \arrow[d, "\varepsilon"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & F(P^0) \arrow[r] \arrow[d, "F(f^0)"'] & P^0\oplus F(P^0) \arrow[r] \arrow[d, "g^0"'] & P^0 \arrow[r] \arrow[d, "f^0"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & F(P^1) \arrow[r] \arrow[d, "F(f^1)"'] & P^1\oplus F(P^1) \arrow[r] \arrow[d, "g^1"'] & P^1 \arrow[r] \arrow[d, "f^1"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & F(P^2) \arrow[r] \arrow[d] & P^2\oplus F(P^2) \arrow[r] \arrow[d] & P^2 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{tikzcd}$$

其中 $g^i=\begin{pmatrix}f^i & 0\\ 0 & F(f^i)\end{pmatrix}$（$i$ 为整数且 $i\neq -1$）。由第一、三列正合知序列

$$0\to X\xrightarrow{\binom{\varepsilon\rho}{\psi}}P^0\oplus F(P^0)\xrightarrow{g^0}P^1\oplus F(P^1)\xrightarrow{g^1}P^2\oplus F(P^2)\to\cdots$$

正合。同理考虑行正合的交换图

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & F(P^{-2}) \arrow[r] \arrow[d, "F(f^{-2})"'] & P^{-2}\oplus F(P^0) \arrow[r] \arrow[d, "g^{-2}"'] & P^{-2} \arrow[r] \arrow[d, "f^{-2}"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & F(P^{-1}) \arrow[r] \arrow[d, "F(\pi)"'] & P^{-1}\oplus F(P^1) \arrow[r] \arrow[d, "(\eta,\delta F(\pi))"'] & P^{-1} \arrow[r] \arrow[d, "\pi"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & F(\mathrm{Coker}(\alpha)) \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Coker}(\alpha) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd},$$

其中 $\eta:P^{-1}\to X$ 使得 $\pi=\rho\eta$。由第一、三列正合知序列

$$\cdots\longrightarrow P^{-2}\oplus F(P^{-2})\xrightarrow{g^{-2}}P^{-1}\oplus F(P^{-1})\xrightarrow{(\eta,\delta F(\pi))}X\longrightarrow 0$$

正合，令 $g^{-1}=\begin{pmatrix} f^{-1} & 0 \\ \psi\eta & F(f^{-1})\end{pmatrix}$，则有正合列

$$\cdots\to P^{-2}\oplus F(P^{-2})\xrightarrow{g^{-2}}P^{-1}\oplus F(P^{-1})\xrightarrow{g^{-1}}P^{0}\oplus F(P^{0})\xrightarrow{g^{0}}P^{1}\oplus F(P^{1})\to\cdots$$

其中 $X\cong\mathrm{Ker}(g^0)$。再由正合列

$$0\to X\to P^0\oplus F(P^0)\to P^1\oplus F(P^1)\to P^2\oplus F(P^2)\to\cdots,$$

得到交换图

$$\begin{tikzcd}
 & F(X) \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"'] & F(P^0)\oplus F^2(P^0) \arrow[r] \arrow[d, "\mu_0"'] & F(P^1)\oplus F^2(P^1) \arrow[r] \arrow[d, "\mu_1"'] & \cdots \\
0 \arrow[r] & X \arrow[r] & P^0\oplus F(P^0) \arrow[r] & P^1\oplus F(P^1) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

其中 $\mu_i=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0\end{pmatrix}$。由此可得正合列

$$0\longrightarrow(X,\alpha)\xrightarrow{\binom{\varepsilon\rho}{\psi}}T(P^0)\xrightarrow{g^0}T(P^1)\xrightarrow{g^1}T(P^2)\longrightarrow\cdots,$$

再由正合列

$$\cdots\to P^{-2}\oplus F(P^{-2})\to P^{-1}\oplus F(P^{-1})\to X\to 0,$$

得到交换图

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & F(P^{-2})\oplus F^2(P^{-2}) \arrow[r] \arrow[d, "\mu_{-2}"'] & F(P^{-1})\oplus F^2(P^{-1}) \arrow[r] \arrow[d, "\mu_{-1}"'] & F(X) \arrow[d, "\alpha"'] & \\
\cdots \arrow[r] & P^{-2}\oplus F(P^{-2}) \arrow[r] & P^{-1}\oplus F(P^{-1}) \arrow[r] & X \arrow[r] & 0,
\end{tikzcd}$$

由此可得正合列

$$\cdots\longrightarrow T(P^{-2})\xrightarrow{g^{-2}}T(P^{-1})\xrightarrow{(\eta,\delta F(\pi))}(X,\alpha)\longrightarrow 0,$$

又有 $g^{-1}=\begin{pmatrix} f^{-1} & 0 \\ \psi\eta & F(f^{-1})\end{pmatrix}$，故可知序列

$$T(\Delta):\cdots\to T(P^{-2})\xrightarrow{g^{-2}}T(P^{-1})\xrightarrow{g^{-1}}T(P^{0})\xrightarrow{g^{0}}T(P^{1})\xrightarrow{g^{1}}T(P^{2})\to\cdots$$

正合，其中 $(X,\alpha)\cong\mathrm{Ker}(f^0)$。由文献[5]中推论 1.6 知 $T(P^i)$ 是 $\mathscr{A}\ltimes F$ 中的投射对象。令 Q 是 $\mathscr{A}$ 中的投射对象，则序列

$$0\to Z(F(Q))\to T(Q)\to Z(Q)\to 0$$

正合，故

$$0\to\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}\ltimes F}(T(\Delta),Z(F(Q)))\to\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}\ltimes F}(T(\Delta),T(Q))\to\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}\ltimes F}(T(\Delta),Z(Q))\to 0$$

正合。因为 (T,U) 是伴随对，所以

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}\ltimes F}(T(\Delta),Z(Q))\cong\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(\Delta,Q)$$

正合，且

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}\ltimes F}(T(\Delta),Z(F(Q)))\cong\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(\Delta,F(Q))$$

正合，所以 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}\ltimes F}(T(\Delta),T(Q))$ 正合。由文献[5]中推论 1.6 知 $\mathscr{A}\ltimes F$ 中的任意投射对象形如 $T(Q)$，其中 Q 是 $\mathscr{A}$ 中的投射对象，故 $T(\Delta)$ 是完全投射分解，所以 (X,α) 是 $\mathscr{A}\ltimes F$ 中的 Gorenstein 投射对象。

定理 2　假设对 $\mathscr{A}\ltimes F$ 中的任意完全投射分解 Δ 以及 $\mathscr{A}$ 中的任意投射对象 Q，有 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}\ltimes F}(\Delta,Z(Q))$ 正合，F 具有相容性。若 (X,α) 是 $A\ltimes F$ 中的 Gorenstein 投射对象，则 $\mathrm{Coker}(\alpha)$ 是 $\mathscr{A}$ 中的 Gorenstein 投射对象，且序列 $F^2(X)\to F(X)\xrightarrow{\alpha}X$ 正合。

证明　由 (X,α) 是 $\mathscr{A}\ltimes F$ 中的 Gorenstein 投射对象，可知在 $\mathscr{A}\ltimes F$ 中存在完全投射分解，

$$\Delta:\cdots\to T(P^{-1})\xrightarrow{g^{-1}}T(P^{0})\xrightarrow{g^{0}}T(P^{1})\xrightarrow{g^{1}}T(P^{2})\to\cdots,$$

其中 P^i 均是 $\mathscr{A}$ 中的投射对象且 $(X,\alpha)\cong\mathrm{Ker}(g^0)$，则存在单态射 $\lambda:X\to P^0\oplus F(P^0)$。易知 C 是正合函子，且 $CT=id_{\mathscr{A}}$，故有 $\mathscr{A}$ 中正合列

$$C(\Delta):\cdots\longrightarrow P^{-1}\xrightarrow{C(g^{-1})}P^{0}\xrightarrow{C(g^{0})}P^{1}\xrightarrow{C(g^{1})}P^{2}\longrightarrow\cdots$$

且 $\mathrm{Coker}(\alpha)\cong\mathrm{Ker}(C(g^0))$,则存在单态射 $\varepsilon:\mathrm{Coker}(\alpha)\to P^0$。任取 $\mathscr{A}$ 中投射对象 Q,由条件知 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}\ltimes F}(\Delta,Z(Q))$ 正合。又 (C,Z) 是伴随对,故 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(C(\Delta),Q)\cong\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}\ltimes F}(\Delta,Z(Q))$ 正合,所以 $\mathrm{Coker}(\alpha)$ 是 $\mathscr{A}$ 中的 Gorenstein 投射对象。

已知序列

$$F(X)\xrightarrow{\alpha}X\xrightarrow{\rho}\mathrm{Coker}(\alpha)\to 0$$

正合,所以有正合列

$$F^2(X)\to F(X)\xrightarrow{F(\rho)}F(\mathrm{Coker}(\alpha))\to 0,$$

则由余核的泛性质知存在 $F(\varepsilon):F(\mathrm{Coker}(\alpha))\to F(P^0)$ 是单同态。考虑交换图

$$\begin{tikzcd}
F(X) \arrow[r, "F(\lambda)"] \arrow[d, "\alpha"'] & F(P^0)\oplus F^2(P^0) \arrow[d, "\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}"] \\
X \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, "\rho"'] & P^0\oplus F(P^0) \arrow[d, "(1\quad 0)"] \\
\mathrm{Coker}(\alpha) \arrow[r, "\varepsilon"] & P^0
\end{tikzcd},$$

故 $(1,0)F(\lambda)=F(\varepsilon)F(\rho)$,并且 $\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}F(\lambda)=\lambda\alpha=\lambda\delta F(\rho)$,从而

$$\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}F(\varepsilon)F(\rho)=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}(1\quad 0)F(\lambda)=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}F(\lambda)=\lambda\delta F(\rho),$$

注意到 $F(\rho)$ 是满态射,故 $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}F(\varepsilon)=\lambda\delta$,因此 δ 单,从而 $F^2(X)\to F(X)\xrightarrow{\alpha}X$ 正合。

对偶地,$\mathscr{A}$ 是具有足够投射和内射对象的阿贝尔范畴,$G:\mathscr{A}\to\mathscr{A}$ 是左正合函子,$\mathscr{A}$ 关于加法函子 G 的左平凡扩张记作 $G\rtimes\mathscr{A}$,则 $G\rtimes\mathscr{A}$ 是阿贝尔范畴。$G\rtimes\mathscr{A}$ 的对象形如 $[X,g]$,其中 $X\in\mathrm{Ob}(\mathscr{A})$, $g:X\to G(X)$,使得 $G(g)g=0$,并且态射 $\gamma:[X,\alpha]\to[Y,\beta]$ 是指 $\mathscr{A}$ 中的态射 $\gamma:X\to Y$ 使得图

$$\begin{tikzcd}
G(X) \arrow[r, "G(\gamma)"] & G(Y) \\
X \arrow[r, "\gamma"] \arrow[u, "\alpha"] & Y \arrow[u, "\beta"']
\end{tikzcd}$$

可交换。在这种情况下 $G\rtimes\mathscr{A}$ 中的序列正合当且仅当 $\mathscr{A}$ 中的序列正合,即序列

$$0\to[A,\alpha]\to[B,\beta]\to[C,\gamma]\to 0$$

正合当且仅当序列

$$0\to A\to B\to C\to 0$$

正合。

以下定义一些重要函子:

定义函子 $H:\mathscr{A}\to G\rtimes\mathscr{A}$,其中对任意 $X\in\mathscr{A}$,有 $H(X)=(G(X)\oplus X,\nu)$,其中 $\nu=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}:G(X)\oplus X\to G^2(X)\oplus G(X)$,且对任意态射 $\beta:X\to X'$ 有 $H(\beta)=\begin{pmatrix}G(\beta)&0\\0&\beta\end{pmatrix}$。

定义函子 $U:G\rtimes\mathscr{A}\to\mathscr{A}$,其中对任意 $[X,g]\in G\rtimes\mathscr{A}$,有 $U[X,g]=X$,且对任意态射 $\alpha:[X,g]\to[X',g']$ 有 $U(\alpha)=\alpha$。

定义函子 $Z:\mathscr{A}\to G\rtimes\mathscr{A}$,其中对任意 $X\in\mathscr{A}$,有 $Z(X)=[X,0]$,且对任意态射 $\alpha:X\to X'$ 有 $Z(\alpha)=\alpha$。

定义函子 $K:G\rtimes\mathscr{A}\to\mathscr{A}$,其中对任意 $[X,g]\in G\rtimes\mathscr{A}$,有 $K[X,g]=\mathrm{Ker}(g)$,且对任意态射 $\alpha:[X,g]\to[X',g']$ 有 $K(\alpha)=$ 诱导态射。

(下转第 64 页)