

# Morita 环上的强 Gorenstein 投射模

夏旭, 陈文静\*

(西北师范大学数学与统计学院, 甘肃 兰州 730070)

**摘要:** 设  $\Lambda_\psi = \begin{pmatrix} A & N \\ M & B \end{pmatrix}_{(0,\psi)}$  是有一个双模同态为零的 Morita 环, 其中  $A, B$  都是诺特环,  $N$  是  $A$ - $B$ -双模,  $M$  是  $B$ - $A$ -双模, 且

$\psi: N \otimes_B M \rightarrow A$  是  $A$ - $A$ -双模同态, 给出了  $\Lambda_\psi$ -模是强 Gorenstein 投射模的充分条件。

**关键词:** Morita 环; 强 Gorenstein 投射模; 强完全投射分解; 弱可相容模

**中图分类号:** O153.3 **文献标志码:** A

**引用格式:** 夏旭, 陈文静. Morita 环上的强 Gorenstein 投射模[J]. 山东大学学报(理学版), 2025, 60(11): 95-100, 108.

## Strongly Gorenstein projective modules over Morita rings

XIA Xu, CHEN Wenjing\*

(College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou 730070, Gansu, China)

**Abstract:** Let  $\Lambda_\psi = \begin{pmatrix} A & N \\ M & B \end{pmatrix}_{(0,\psi)}$  be a Morita ring with one bimodule homomorphism zero, where  $A$  and  $B$  are noetherian rings,  $N$

is an  $A$ - $B$ -bimodule,  $M$  is a  $B$ - $A$ -bimodule, and  $\psi: N \otimes_B M \rightarrow A$  is a homomorphism of  $A$ - $A$ -bimodules. We give the sufficient condition that a  $\Lambda_\psi$ -module is a strongly Gorenstein projective module.

**Key words:** Morita ring; strongly Gorenstein projective module; strongly complete projective resolution; weakly compatible module

## 0 引言

对于双边诺特环上的有限生成模, Auslander 等<sup>[1]</sup>引入 G-维数的概念, 这种维数是投射维数的细化. Enochs 等<sup>[2]</sup>将 G-维数为零的模推广到任意环上, 并称之为 Gorenstein 投射模. 称左  $R$ -模  $M$  是 Gorenstein 投射模, 如果存在投射左  $R$ -模的正合序列

$$P^\bullet: \dots \rightarrow P^{-1} \xrightarrow{d^{-1}} P^0 \xrightarrow{d^0} P^1 \rightarrow \dots$$

使得  $M \cong \text{Ker}(d^0)$ , 并且对任意投射左  $R$ -模  $Q$ , 序列  $\text{Hom}_R(P^\bullet, Q)$  是正合的. 此时, 称  $P^\bullet$  是  $M$  的完全投射分解. 注意到投射模均是 Gorenstein 投射模, 反之一般不成立. Enochs 等<sup>[3]</sup>证明在整体维数有限的代数上, Gorenstein 投射模均是投射模; Holm<sup>[4]</sup>研究 Gorenstein 投射模, 给出了一些有趣的结论; Bennis 等<sup>[5]</sup>引入强 Gorenstein 投射模的概念. 称左  $R$ -模  $M$  是强 Gorenstein 投射模, 如果存在投射左  $R$ -模的正合序列

$$P^\bullet: \dots \rightarrow P \xrightarrow{f} P \xrightarrow{f} P \rightarrow \dots$$

使得  $M \cong \text{Ker}(f)$ , 并且对任意投射左  $R$ -模  $Q$ , 序列  $\text{Hom}_R(P^\bullet, Q)$  是正合的. 此时, 称  $P^\bullet$  是  $M$  的强完全投射分解. 注意到强 Gorenstein 投射模均是 Gorenstein 投射模, 反之一般不成立. 在文献[5]证明了一个模是 Gorenstein 投射模当且仅当它是某个强 Gorenstein 投射模的直和项。

Bass<sup>[6]</sup>引入 Morita 环的概念,这是一类重要的非交换环,这类环的研究为三角矩阵环的研究给出了更一般的理论方法,进而在模论的研究中占有重要的地位。Green<sup>[7]</sup>通过对广义下三角矩阵环上模的研究系统刻画了 Morita 环上的模。Gao 等<sup>[8]</sup>在双模同态为零的 Morita 环上构造一类 Gorenstein 投射模。Guo 等<sup>[9]</sup>研究一个  $\Lambda_\psi$ -模是 Gorenstein 投射模的充要条件,其中  $\Lambda_\psi$  是有一个双模同态为零的 Morita 环  $\Lambda_\psi = \begin{pmatrix} A & N \\ M & B \end{pmatrix}_{(0,\psi)}$ 。受以上文献的启发,本文主要讨论了在有一个双模同态为零的 Morita 环上,一个  $\Lambda_\psi$ -模是强 Gorenstein 投射模的充分条件。

### 1 预备知识

设  $R$  是结合环,用  $R\text{-Mod}$  表示左  $R$ -模范畴, $R\text{-mod}$  表示有限生成左  $R$ -模范畴, $R\text{-proj}$  表示由有限生成投射左  $R$ -模构成的全子范畴。用  $\mathcal{C}(\mathcal{B})$  表示  $\mathcal{B}$  的复形范畴,其中  $\mathcal{B}$  是左  $R$ -模范畴的全子范畴。

设  $A$  和  $B$  是环, ${}_A N_B$  是  $A$ - $B$ -双模, ${}_B M_A$  是  $B$ - $A$ -双模, $\phi: M \otimes_A N \rightarrow B$  是  $B$ - $B$ -双模同态, $\psi: N \otimes_B M \rightarrow A$  是  $A$ - $A$ -双模同态。令一个 Morita 系统  $\mathcal{M} = (A, B, M, N, \phi, \psi)$ ,定义 Morita 环为  $\Lambda_{(\phi,\psi)}(\mathcal{M}) = \begin{pmatrix} A & N \\ M & B \end{pmatrix}_{(\phi,\psi)}$ ,  $\Lambda_{(\phi,\psi)}(\mathcal{M})$  中元素的加法为对应元素相加,乘法定义为

$$\begin{pmatrix} a & n \\ m & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & n' \\ m' & b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' + \psi(n \otimes m') & an' + nb' \\ ma' + bm' & bb' + \phi(m \otimes n') \end{pmatrix},$$

为保证  $\Lambda_{(\phi,\psi)}(\mathcal{M})$  是结合环,规定  $\phi(m \otimes n)m' = m\psi(n \otimes m')$ ,  $n\phi(m \otimes n') = \psi(n \otimes m)n'$ ,其中  $m, m' \in M, n, n' \in N$ 。为方便起见,简记 Morita 环  $\Lambda_{(\phi,\psi)}(\mathcal{M})$  为  $\Lambda_{(\phi,\psi)}$ 。

在文献[7]中,Green 对 Morita 环  $\Lambda_{(\phi,\psi)}$  上的模进行了详细刻画,本文不再赘述。 $\Lambda_{(\phi,\psi)}$ -模范畴等价于范畴  $\mathcal{M}(\Lambda)$ ,这里  $\mathcal{M}(\Lambda)$  范畴的对象是四元组  $(X, Y, f, g)$ ,其中  $X \in A\text{-Mod}, Y \in B\text{-Mod}, f \in \text{Hom}_B(M \otimes_A X, Y), g \in \text{Hom}_A(N \otimes_B Y, X)$ ,并且使得图

$$\begin{array}{ccc} N \otimes_B M \otimes_A X & \xrightarrow{1_N \otimes f} & N \otimes_B Y \\ \psi \otimes 1_X \downarrow & & \downarrow g \\ A \otimes_A X & \xrightarrow{\cong} & X \end{array} \quad \begin{array}{ccc} M \otimes_A N \otimes_B Y & \xrightarrow{1_M \otimes g} & M \otimes_A X \\ \phi \otimes 1_Y \downarrow & & \downarrow f \\ B \otimes_B Y & \xrightarrow{\cong} & Y \end{array}$$

可交换。设  $(X, Y, f, g)$  和  $(X', Y', f', g')$  是  $\mathcal{M}(\Lambda)$  范畴中的两个对象, $\mathcal{M}(\Lambda)$  中的态射  $(X, Y, f, g) \rightarrow (X', Y', f', g')$  是一个态射对  $(\alpha, \beta)$ ,其中  $\alpha \in \text{Hom}_A(X, X'), \beta \in \text{Hom}_B(Y, Y')$ ,并且使得图

$$\begin{array}{ccc} M \otimes_A X & \xrightarrow{f} & Y \\ 1_M \otimes \alpha \downarrow & & \downarrow \beta \\ M \otimes_A X' & \xrightarrow{f'} & Y' \end{array} \quad \begin{array}{ccc} N \otimes_B Y & \xrightarrow{g} & X \\ 1_N \otimes \beta \downarrow & & \downarrow \alpha \\ N \otimes_B Y' & \xrightarrow{g'} & X' \end{array}$$

可交换。用  $\mathcal{M}(\Lambda)$  中的四元组去代替  $\Lambda_{(\phi,\psi)}$ -模范畴中的模。

设  $(\alpha, \beta): (X, Y, f, g) \rightarrow (X', Y', f', g')$  是  $\Lambda_{(\phi,\psi)}\text{-Mod}$  中的态射,则  $(\alpha, \beta)$  的核是  $(\text{Ker}(\alpha), \text{Ker}(\beta), h, j)$ ,其中  $h, j$  是由下列交换图诱导的态射:

$$\begin{array}{ccccc} M \otimes_A \text{Ker}(\alpha) & \xrightarrow{1_M \otimes i_X} & M \otimes_A X & \xrightarrow{1_M \otimes \alpha} & M \otimes_A X' \\ h \downarrow & & f \downarrow & & \downarrow f' \\ \text{Ker}(\beta) & \xrightarrow{i_Y} & Y & \xrightarrow{\beta} & Y' \end{array} \quad \begin{array}{ccccc} N \otimes_B \text{Ker}(\beta) & \xrightarrow{1_N \otimes i_Y} & N \otimes_B Y & \xrightarrow{1_N \otimes \beta} & N \otimes_B Y' \\ j \downarrow & & g \downarrow & & \downarrow g' \\ \text{Ker}(\alpha) & \xrightarrow{i_X} & X & \xrightarrow{\alpha} & X' \end{array}$$

交换图中的  $i_X: \text{Ker}(\alpha) \rightarrow X, i_Y: \text{Ker}(\beta) \rightarrow Y$  是嵌入态射。类似地,可定义态射  $(\alpha, \beta)$  的余核。

一个  $\Lambda_{(\phi,\psi)}$ -模序列  $0 \rightarrow (X_1, Y_1, f_1, g_1) \xrightarrow{(\alpha_1, \beta_1)} (X_2, Y_2, f_2, g_2) \xrightarrow{(\alpha_2, \beta_2)} (X_3, Y_3, f_3, g_3) \rightarrow 0$  正合当且仅当独立的  $A$ -模序列  $0 \rightarrow X_1 \xrightarrow{\alpha_1} X_2 \xrightarrow{\alpha_2} X_3 \rightarrow 0$  和  $B$ -模序列  $0 \rightarrow Y_1 \xrightarrow{\beta_1} Y_2 \xrightarrow{\beta_2} Y_3 \rightarrow 0$  均正合。

设  $X \in A\text{-Mod}, Y \in B\text{-Mod}, {}_B M_A$  和  ${}_A N_B$  是双模,用  $\Psi_X$  和  $\Phi_Y$  表示合成态射:

$$\Psi_X: N \otimes_B M \otimes_A X \xrightarrow{\psi \otimes 1_X} A \otimes_A X \xrightarrow{\cong} X, \quad \Phi_Y: M \otimes_A N \otimes_B Y \xrightarrow{\phi \otimes 1_Y} B \otimes_B Y \xrightarrow{\cong} Y.$$

设  $(X, Y, f, g)$  是  $\Lambda_{(\phi, \psi)}$ -模, 为方便后续证明, 定义以下函子:

$$\begin{aligned} T_A: A\text{-Mod} &\rightarrow \Lambda_{(\phi, \psi)}\text{-Mod}, & {}_A X &\mapsto T_A(X) = (X, M \otimes_A X, 1_{M \otimes_A X}, \Psi_X), \\ T_B: B\text{-Mod} &\rightarrow \Lambda_{(\phi, \psi)}\text{-Mod}, & {}_B Y &\mapsto T_B(Y) = (N \otimes_B Y, Y, \Phi_Y, 1_{N \otimes_B Y}), \\ Z_{A/I}: (A/I)\text{-Mod} &\rightarrow \Lambda_{(\phi, \psi)}\text{-Mod}, & {}_{A/I} U &\mapsto Z_{A/I}(U) = ({}_A U, 0, 0, 0), \\ Z_B: B\text{-Mod} &\rightarrow \Lambda_{(\phi, \psi)}\text{-Mod}, & {}_B V &\mapsto Z_B(V) = (0, {}_B V, 0, 0), \end{aligned}$$

其中  $I = \text{Im}(\psi)$ 。上述函子在态射上的作用都是自然的。

若无特别说明, 接下来的环均指双边诺特环, 模均指有限生成模。

**定义 1**<sup>[9]</sup> 一个双模  ${}_A N_B$  是弱可相容模, 如果满足:

- (1) 对  $\mathcal{C}(A\text{-proj})$  中的任意完全投射分解  $P^\bullet$ , 序列  $\text{Hom}_A(P^\bullet, N)$  是正合的;
- (2) 对  $\mathcal{C}(B\text{-proj})$  中的任意完全投射分解  $Q^\bullet$ , 序列  $N \otimes_B Q^\bullet$  是正合的。

## 2 $\Lambda_\psi$ -模是强 Gorenstein 模的充分条件

本节考虑  $\phi=0$  的 Morita 系统, 则 Morita 环  $\Lambda_\psi = \begin{pmatrix} A & N \\ M & B \end{pmatrix}_{(0, \psi)}$ , 令  $I := \text{Im}(\psi)$ 。设  $\Lambda$  是  $A$  的子环, 且  $\Lambda$  与

$A$  具有相同的单位元,  $A$  是  $\Lambda$  通过  $I$  的平凡扩张, 则有同构式  $\Lambda \cong A/I$ , 进而可知每个  $\Lambda$ -模  $X$  可诱导一个  $A$ -模结构  $A \otimes_\Lambda X$ , 记  ${}_A A \otimes_\Lambda X$  为  $X(I)$ , 即  $X(I) = {}_A A \otimes_\Lambda X \cong X \oplus (I \otimes_\Lambda X)$ 。

设  ${}_A X \in \Lambda\text{-Mod}$ , 定义  $T_A(X) := (A \otimes_\Lambda X, {}_B M \otimes_\Lambda X, \pi_X, \psi_X)$ , 其中  $\pi_X$  是  $B$ -模同构,  $\psi_X$  是  $A$ -模同态,  $\pi_X: M \otimes_\Lambda (A \otimes_\Lambda X) \xrightarrow{\cong} M \otimes_\Lambda X$ ,  $\psi_X: N \otimes_B (M \otimes_\Lambda X) \rightarrow A \otimes_\Lambda X$ ,  $n \otimes (m \otimes x) \mapsto \psi(n \otimes m) \otimes x$ ,  $n \in N, m \in M, x \in X$ 。

假设  $(X, Y, f, g)$  是  $\Lambda_\psi$ -模, 令  $\lambda_X: X \rightarrow \text{Coker}(g)$  和  $\mu_Y: Y \rightarrow \text{Coker}(f)$  是标准满态射。

**引理 1**<sup>[9]</sup> 设  $X, X' \in \Lambda\text{-mod}$ ,  $Y, Y' \in B\text{-mod}$ , 则有以下同构:

- (1)  $\text{Hom}_\Lambda(X, X') \cong \text{Hom}_{\Lambda_\psi}(T_A(X), Z_A(X'))$ ,  $g \mapsto (g, 0, 0)$ ;
- (2)  $\text{Hom}_B(Y, Y') \cong \text{Hom}_{\Lambda_\psi}(T_B(Y), Z_B(Y'))$ ,  $t \mapsto (0, t)$ ;
- (3)  $\text{Hom}_{\Lambda_\psi}(T_B(Y), Z_A(X)) = \text{Hom}_{\Lambda_\psi}(T_A(X), Z_B(Y)) = 0$ 。

**定理 1** 设  ${}_A N_B, {}_B M_A, {}_A I_A$  是弱可相容模, 若  $\Lambda_\psi$ -模  $(X, Y, f, g)$  满足下列条件:

- (1)  ${}_A \text{Coker}(g)$  和  ${}_B \text{Coker}(f)$  都是强 Gorenstein 投射模,
- (2)  ${}_B M \otimes_\Lambda \text{Coker}(g) \cong {}_B \text{Im}(f)$ ,  ${}_A N \otimes_B \text{Coker}(f) \cong {}_A \text{Im}(g)/IX$ ,  ${}_A IX \cong {}_A I \otimes_\Lambda \text{Coker}(g)$ ,

则  $(X, Y, f, g)$  是强 Gorenstein 投射模。

**证明** 因为  ${}_A \text{Coker}(g)$  是强 Gorenstein 投射模, 所以存在  $\Lambda$ -模的强完全投射分解

$$P^\bullet: \dots \rightarrow P \xrightarrow{d_p} P \xrightarrow{d_p} P \rightarrow \dots$$

使得  $\text{Ker}(d_p) \cong {}_A \text{Coker}(g)$ 。同理, 因为  ${}_B \text{Coker}(f)$  是强 Gorenstein 投射模, 所以存在  $B$ -模的强完全投射分解

$$Q^\bullet: \dots \rightarrow Q \xrightarrow{d_q} Q \xrightarrow{d_q} Q \rightarrow \dots$$

使得  $\text{Ker}(d_q) \cong {}_B \text{Coker}(f)$ 。要证  $(X, Y, f, g)$  是强 Gorenstein 投射模, 只需证存在投射  $\Lambda_\psi$ -模的正合序列

$$T^\bullet: \dots \rightarrow T \xrightarrow{d_T} T \xrightarrow{d_T} T \rightarrow \dots$$

使得  $\text{Ker}(d_T) \cong (X, Y, f, g)$ , 并且对任意投射  $\Lambda_\psi$ -模  $L$ , 有  $\text{Hom}_{\Lambda_\psi}(T^\bullet, L)$  正合。

令  $T \cong T_A(P) \oplus T_B(Q) = (A \otimes_\Lambda P, M \otimes_\Lambda P, \pi_P, \psi_P) \oplus (N \otimes_B Q, Q, 0, 1_{N \otimes_B Q}) = ((A \otimes_\Lambda P) \oplus (N \otimes_B Q),$

$(M \otimes_\Lambda P) \oplus Q, \begin{pmatrix} \pi_P & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \psi_P & 0 \\ 0 & 1_{N \otimes_B Q} \end{pmatrix})$ , 由文献[10]定理 3.1 知,  $T$  是投射  $\Lambda_\psi$ -模。令  $d_T = (\alpha, \beta)$ , 其中

$\alpha: (A \otimes_\Lambda P) \oplus (N \otimes_B Q) \rightarrow (A \otimes_\Lambda P) \oplus (N \otimes_B Q)$ ,  $\beta: (M \otimes_\Lambda P) \oplus Q \rightarrow (M \otimes_\Lambda P) \oplus Q$ 。为了定义  $d_T = (\alpha, \beta)$ , 进行如下步骤。

**步骤 1** 定义  $\beta: (M \otimes_\Lambda P) \oplus Q \rightarrow (M \otimes_\Lambda P) \oplus Q$ 。

条件(2)给出  ${}_B M \otimes_\Lambda \text{Coker}(g) \cong {}_B \text{Im}(f)$ , 由文献[9]引理 3.1, 存在  $B$ -模同态  $\eta_Y: M \otimes_\Lambda \text{Coker}(g) \rightarrow Y$  使得

下列的  $B$ -模序列正合

$$0 \rightarrow {}_B M \otimes_A \text{Coker}(g) \xrightarrow{\eta_Y} {}_B Y \xrightarrow{\mu_Y} {}_B \text{Coker}(f) \rightarrow 0.$$

已知  ${}_B M_A$  是弱可相容模, 因此由定义 1,  $M \otimes_A P^\bullet$  和  $\text{Hom}_B(Q^\bullet, M)$  正合, 并且有  $\text{Ker}(1_M \otimes d_P) \cong M \otimes_A \text{Coker}(g)$ 。又由  $M \otimes_A P \in \text{add}({}_B M)$ ,  $\text{Hom}_B(Q^\bullet, M \otimes_A P)$  正合, 故  $\text{Ext}_B^1(\text{Ker}(d_Q), M \otimes_A P) = 0$ 。因为正合复形  $M \otimes_A P^\bullet$  各层次均为  $M \otimes_A P$ , 层次间态射均为  $1_M \otimes d_P$ , 正合复形  $Q^\bullet$  各层次均为  $Q$ , 层次间态射均为  $d_Q$ , 所以根据文献[9]引理 2.1 可知, 存在如下复形的正合列

$$0 \rightarrow M \otimes_A P^\bullet \rightarrow H^\bullet \rightarrow Q^\bullet \rightarrow 0,$$

使得  $\text{Ker}(d_H) \cong Y$ , 其中  $H^\bullet: \dots \rightarrow H \xrightarrow{d_H} H \xrightarrow{d_H} H \rightarrow \dots$  是  $B$ -模的正合复形,  $H = (M \otimes_A P) \oplus Q$ ,  $d_H = \begin{pmatrix} 1_M \otimes d_P & \rho \\ 0 & d_Q \end{pmatrix}$ ,  $\rho \in \text{Hom}_B(Q, M \otimes_A P)$ 。令  $\beta = d_H$ , 则  $\text{Ker}(\beta) \cong Y$ 。

**步骤 2** 定义  $\alpha: (A \otimes_A P) \oplus (N \otimes_B Q) \rightarrow (A \otimes_A P) \oplus (N \otimes_B Q)$ 。

首先定义各层次均为  $Z$ , 层次间态射均为  $d_Z$ , 且  $\text{Ker}(d_Z) \cong \text{Im}(g)$  的  $A$ -模正合复形  $Z^\bullet$ , 即

$$Z^\bullet: \dots \rightarrow Z \xrightarrow{d_Z} Z \xrightarrow{d_Z} Z \rightarrow \dots$$

令  $Z = (I \otimes_A P) \oplus (N \otimes_B Q)$ ,  $d_Z = \begin{pmatrix} 1_I \otimes d_P & (\psi \otimes 1_P)(1_N \otimes \rho) \\ 0 & 1_N \otimes d_Q \end{pmatrix}$ 。因为  ${}_A N_B, {}_A I_A$  是弱可相容模, 所以由定义 1, 序列  $I \otimes_A P^\bullet$  和  $N \otimes_B Q^\bullet$  是正合的。由复形  $H^\bullet$  可得

$$\begin{pmatrix} 1_M \otimes d_P & \rho \\ 0 & d_Q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1_M \otimes d_P & \rho \\ 0 & d_Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & (1_M \otimes d_P)\rho + \rho d_Q \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0, \tag{1}$$

进而  $(1_M \otimes d_P)\rho + \rho d_Q = 0$ 。式(1)两边同时被  $1_N \otimes$ -作用, 则有

$$(1_N \otimes 1_M \otimes d_P)(1_N \otimes \rho) + (1_N \otimes \rho)(1_N \otimes d_Q) = 0,$$

再用  $\psi \otimes 1_P$  作用, 得到

$$(\psi \otimes 1_P)(1_N \otimes 1_M \otimes d_P)(1_N \otimes \rho) + (\psi \otimes 1_P)(1_N \otimes \rho)(1_N \otimes d_Q) = 0.$$

又因为  $(\psi \otimes 1_P)(1_N \otimes 1_M \otimes d_P) = (1_I \otimes d_P)(\psi \otimes 1_P)$ , 所以, 整理可得

$$(1_I \otimes d_P)(\psi \otimes 1_P)(1_N \otimes \rho) + (\psi \otimes 1_P)(1_N \otimes \rho)(1_N \otimes d_Q) = 0,$$

进而有

$$d_Z d_Z = \begin{pmatrix} 1_I \otimes d_P & (\psi \otimes 1_P)(1_N \otimes \rho) \\ 0 & 1_N \otimes d_Q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1_I \otimes d_P & (\psi \otimes 1_P)(1_N \otimes \rho) \\ 0 & 1_N \otimes d_Q \end{pmatrix} = 0,$$

因此序列  $Z^\bullet$  是复形。由于存在  $A$ -模的复形正合列

$$0 \rightarrow I \otimes_A P^\bullet \rightarrow Z^\bullet \rightarrow N \otimes_B Q^\bullet \rightarrow 0,$$

且  $I \otimes_A P^\bullet$  和  $N \otimes_B Q^\bullet$  都是正合的, 故复形  $Z^\bullet$  正合。

下证  $\text{Ker}(d_Z) \cong \text{Im}(g)$ 。令  $\sigma = \begin{pmatrix} \psi \otimes 1_P & 0 \\ 0 & 1_N \otimes 1_Q \end{pmatrix}: N \otimes_B H \rightarrow Z$ ,  $\sigma^\bullet := (\sigma)$ , 则  $\sigma^\bullet$  是正合交换图成立的复形链映射, 即

$$\begin{array}{ccccccc} N \otimes_B M \otimes_A P^\bullet & \longrightarrow & N \otimes_B H^\bullet & \longrightarrow & N \otimes_B Q^\bullet & \longrightarrow & 0 \\ \psi \otimes 1_P \cdot \downarrow & & \sigma^\bullet \downarrow & & \parallel & & \\ 0 & \longrightarrow & I \otimes_A P^\bullet & \longrightarrow & Z^\bullet & \longrightarrow & N \otimes_B Q^\bullet \longrightarrow 0. \end{array}$$

取 0 层次的核, 得到  $A$ -模的正合交换图

$$\begin{array}{ccccccc} N \otimes_B M \otimes_A \text{Coker}(g) & \xrightarrow{1_N \otimes_B \eta_Y} & N \otimes_B Y & \longrightarrow & N \otimes_B \text{Coker}(f) & \longrightarrow & 0 \\ \psi \otimes_A 1_{\text{Coker}(g)} \downarrow & & \downarrow & & \parallel & & \\ 0 & \longrightarrow & I \otimes_A \text{Coker}(g) & \longrightarrow & \text{Ker}(d_Z) & \longrightarrow & N \otimes_B \text{Coker}(f) \longrightarrow 0. \end{array}$$

由此交换图可知  $\text{Ker}(d_Z)$  是  $\psi \otimes_A 1_{\text{Coker}(g)}$  和  $1_N \otimes_B \eta_Y$  的推出。条件规定  ${}_A N \otimes_B \text{Coker}(f) \cong {}_A \text{Im}(g) / IX$ ,

${}_AIX \cong {}_A I \otimes_A \text{Coker}(g)$ , 由文献[9]引理 3.2,  $\text{Im}(g)$  是  $\psi \otimes_A 1_{\text{Coker}(g)}$  和  $1_N \otimes_B \eta_\gamma$  的推出, 故由推出的泛性质知  $\text{Ker}(d_Z) \cong \text{Im}(g)$ 。

其次定义各层次均为  $E$ , 层次间态射均为  $d_E$ , 且  $\text{Ker}(d_E) \cong {}_A X$  的  $A$ -模正合复形  $E^\bullet$ 。  ${}_A I_A$  是弱可相容模, 故  $\text{Hom}_A(P^\bullet, I)$  正合, 进而  $\text{Ext}_A^1(\text{Ker}(d_p), I) = 0$ , 又由  $I \otimes_A P \in \text{add}({}_A I)$ ,  $\text{Ext}_A^1(\text{Ker}(d_p), I \otimes_A P) = 0$ 。同理,  ${}_A N_B$  是弱可相容双模, 故  $\text{Hom}_A(P^\bullet, N)$  正合, 又由  $N \otimes_B Q \in \text{add}({}_A N)$ , 知  $\text{Ext}_A^1(\text{Ker}(d_p), N \otimes_B Q) = 0$ , 进而  $\text{Ext}_A^1(\text{Ker}(d_p), Z) = \text{Ext}_A^1(\text{Ker}(d_p), (I \otimes_A P) \oplus (N \otimes_B Q)) = 0$ 。已知复形  $Z^\bullet$  和  $P^\bullet$  都是正合的,  $\text{Ker}(d_Z) \cong \text{Im}(g)$ ,  $\text{Ker}(d_p) \cong {}_A \text{Coker}(g)$ , 并且存在  $A$ -模的正合列

$$0 \rightarrow {}_A \text{Im}(g) \rightarrow {}_A X \rightarrow {}_A \text{Coker}(g) \rightarrow 0,$$

将其限制在  $A$ -模上, 则有  $A$ -模的正合列

$$0 \rightarrow {}_A \text{Im}(g) \rightarrow {}_A X \rightarrow {}_A \text{Coker}(g) \rightarrow 0,$$

由文献[9]引理 2.1 知, 存在  $A$ -模的复形正合列

$$0 \rightarrow Z^\bullet \rightarrow E^\bullet \rightarrow P^\bullet \rightarrow 0,$$

使得  $\text{Ker}(d_E) \cong {}_A X$ , 其中  $E^\bullet : \dots \rightarrow E \xrightarrow{d_E} E \xrightarrow{d_E} E \rightarrow \dots$  是  $A$ -模的正合复形,  $E = P \oplus (I \otimes_A P) \oplus (N \otimes_B Q)$ ,  $d_E =$

$$\begin{pmatrix} d_p & 0 & 0 \\ \gamma & 1_I \otimes d_p & (\psi \otimes 1_p)(1_N \otimes \rho) \\ \tau & 0 & 1_N \otimes d_Q \end{pmatrix}, \gamma: P \rightarrow I \otimes_A P, \tau: P \rightarrow N \otimes_B Q.$$

接着定义各层次均为  $F$ , 层次间态射均为  $d_F$ , 且  $\text{Ker}(d_F) \cong {}_A X$  的  $A$ -模正合复形  $F^\bullet$ 。因为  $\Lambda$  是  $A$  的子环,  $A$  是  $\Lambda$  通过  $I$  的平凡扩张, 所以  ${}_A P \oplus (I \otimes_A P)$  可扩张为  ${}_A P \oplus (I \otimes_A P)$ , 进而  ${}_A P \oplus (I \otimes_A P)$  有一个  $A$ -模结构

$$P(I). \text{ 设 } F = P(I) \oplus (N \otimes_B Q) \cong P \oplus (I \otimes_A P) \oplus (N \otimes_B Q), d_F = \begin{pmatrix} d_p & 0 & 0 \\ \gamma & 1_I \otimes d_p & (\psi \otimes 1_p)(1_N \otimes \rho) \\ \tau & 0 & 1_N \otimes d_Q \end{pmatrix}, \text{ 由 } P(I)$$

是  $A$ -模可得  $F$  是  $A$ -模。下证  $d_F$  是  $A$ -模同态, 且复形

$$F^\bullet : \dots \rightarrow F \xrightarrow{d_F} F \xrightarrow{d_F} F \rightarrow \dots$$

是  ${}_A X$  的一个强完全投射分解。由文献[9]引理 3.3 可知,  $(\tau, 0)$  和  $\begin{pmatrix} d_p & 0 \\ \gamma & 1_I \otimes d_p \end{pmatrix}$  分别是  $\tau$  和  $\begin{pmatrix} d_p \\ \gamma \end{pmatrix}$  被同构态射

作用后得到的像, 因此  $(\tau, 0)$  和  $\begin{pmatrix} d_p & 0 \\ \gamma & 1_I \otimes d_p \end{pmatrix}$  都是  $A$ -模同态。显然  $1_N \otimes d_Q$  和  $\begin{pmatrix} 0 \\ (\psi \otimes 1_p)(1_N \otimes \rho) \end{pmatrix}$  是  $A$ -模同

态, 故  $d_F = \begin{pmatrix} d_p & 0 & 0 \\ \gamma & 1_I \otimes d_p & (\psi \otimes 1_p)(1_N \otimes \rho) \\ \tau & 0 & 1_N \otimes d_Q \end{pmatrix}$  是一个  $A$ -模同态。当复形  $F^\bullet$  限制在  $A$ -模上时是正合复形  $E^\bullet$ ,

因此复形  $F^\bullet$  也是正合的。因为存在  $A$ -模的正合序列  $0 \rightarrow {}_A X \xrightarrow{d_{AX}} E \xrightarrow{d_E} E \rightarrow \dots$ , 所以有  $A$ -模的正合序列  $0 \rightarrow X \xrightarrow{d_X} F \xrightarrow{d_F} F \rightarrow \dots$ , 即  ${}_A X$  有一个强完全投射分解  $F^\bullet$ 。令  $\alpha = d_F$ , 则  $\text{Ker}(\alpha) \cong {}_A X$ 。

**步骤 3** 验证  $d_T = (\alpha, \beta)$  是  $\Lambda_\psi$ -模同态。

$$\text{定义 } d_T = (\alpha, \beta) = \left( \begin{pmatrix} d_p & 0 & 0 \\ \gamma & 1_I \otimes d_p & (\psi \otimes 1_p)(1_N \otimes \rho) \\ \tau & 0 & 1_N \otimes d_Q \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1_M \otimes d_p & \rho \\ 0 & d_Q \end{pmatrix} \right), \text{ 记 } d_T \text{ 为 } \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{pmatrix}, \text{ 其中}$$

$$t_{11} = \left( \begin{pmatrix} d_p & 0 \\ \gamma & 1_I \otimes d_p \end{pmatrix}, 1_M \otimes d_p \right) : T_A(P) \rightarrow T_A(P), \quad t_{12} = \left( \begin{pmatrix} 0 \\ (\psi \otimes 1_p)(1_N \otimes \rho) \end{pmatrix}, \rho \right) : T_B(Q) \rightarrow T_A(P),$$

$$t_{21} = ((\tau, 0), 0) : T_A(P) \rightarrow T_B(Q), \quad t_{22} = (1_N \otimes d_Q, d_Q) : T_B(Q) \rightarrow T_B(Q).$$

由文献[9]引理 3.3, 得  $t_{11}, t_{12}, t_{21}, t_{22}$  都是  $\Lambda_\psi$ -模同态, 进而  $d_T$  是  $\Lambda_\psi$ -模同态。至此, 定义了一个  $\Lambda_\psi$ -模同态  $d_T$ , 前文已构造出  $\Lambda_\psi$ -模的复形

$$T^\bullet : \dots \rightarrow T \xrightarrow{d_T} T \xrightarrow{d_T} T \rightarrow \dots,$$

其中  $T \cong ((A \otimes_A P) \oplus (N \otimes_B Q), (M \otimes_A P) \oplus Q, \begin{pmatrix} \pi_P & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \psi_P & 0 \\ 0 & 1_{N \otimes_B Q} \end{pmatrix}) = (F, H, \begin{pmatrix} \pi_P & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \psi_P & 0 \\ 0 & 1_{N \otimes_B Q} \end{pmatrix})$ ,

态射  $d_T = (\alpha, \beta) = (d_F, d_H) = \left( \begin{pmatrix} d_P & 0 & 0 \\ \gamma & 1_I \otimes d_P & (\psi \otimes 1_P)(1_N \otimes \rho) \\ \tau & 0 & 1_N \otimes d_Q \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1_M \otimes d_P & \rho \\ 0 & d_Q \end{pmatrix} \right)$ 。因为  $F^\bullet$  和  $H^\bullet$  分别是  $A$ -

模和  $B$ -模的正合复形,所以  $T^\bullet$  是  $A_\psi$ -模的正合复形。

下证对任意投射  $A_\psi$ -模  $L$ , 序列  $\text{Hom}_{A_\psi}(T^\bullet, L)$  正合, 即证  $\text{Hom}_{A_\psi}(T^\bullet, {}_{A_\psi}A_\psi)$  是正合的。由  ${}_{A_\psi}A_\psi \cong T_A(\Lambda) \oplus T_B(B)$  知, 要证  $\text{Hom}_{A_\psi}(T^\bullet, {}_{A_\psi}A_\psi)$  正合, 只需证  $\text{Hom}_{A_\psi}(T^\bullet, T_A(\Lambda))$  和  $\text{Hom}_{A_\psi}(T^\bullet, T_B(B))$  都正合。首先证明  $\text{Hom}_{A_\psi}(T^\bullet, T_B(B))$  正合。存在  $A_\psi$ -模的正合列

$$0 \rightarrow Z_A(N) \rightarrow T_B(B) \rightarrow Z_B(B) \rightarrow 0,$$

因为左  $A_\psi$ -模  $T$  是投射模, 所以有复形正合列:

$$0 \rightarrow \text{Hom}_{A_\psi}(T^\bullet, Z_A(N)) \rightarrow \text{Hom}_{A_\psi}(T^\bullet, T_B(B)) \rightarrow \text{Hom}_{A_\psi}(T^\bullet, Z_B(B)) \rightarrow 0.$$

已知  ${}_A N_B$  是弱可相容模, 由定义 1 知  $\text{Hom}_A(P^\bullet, N)$  正合。由引理 1(1) 和(3) 得  $\text{Hom}_{A_\psi}(T^\bullet, Z_A(N)) \cong \text{Hom}_A(P^\bullet, N)$ , 因此  $\text{Hom}_{A_\psi}(T^\bullet, Z_A(N))$  正合。因为  $Q^\bullet$  是强完全投射分解, 所以  $\text{Hom}_B(Q^\bullet, B)$  正合。由引理 1(2) 和(3) 可得  $\text{Hom}_{A_\psi}(T^\bullet, Z_B(B)) \cong \text{Hom}_B(Q^\bullet, B)$ , 因此  $\text{Hom}_{A_\psi}(T^\bullet, Z_B(B))$  正合。综上所述, 序列  $\text{Hom}_{A_\psi}(T^\bullet, T_B(B))$  正合。

其次证明  $\text{Hom}_{A_\psi}(T^\bullet, T_A(\Lambda))$  正合。考虑如下  $A_\psi$ -模的正合列

$$0 \rightarrow Z_A(I) \rightarrow T_A(\Lambda) \rightarrow T'_A(\Lambda) \rightarrow 0,$$

其中  $T'_A(\Lambda) := (\Lambda, M, \mu, 0)$ ,  $\mu : {}_B M \otimes_A \Lambda \rightarrow {}_B M$ 。因为左  $A_\psi$ -模  $T$  是投射模, 所以有复形正合列

$$0 \rightarrow \text{Hom}_{A_\psi}(T^\bullet, Z_A(I)) \rightarrow \text{Hom}_{A_\psi}(T^\bullet, T_A(\Lambda)) \rightarrow \text{Hom}_{A_\psi}(T^\bullet, T'_A(\Lambda)) \rightarrow 0.$$

已知  ${}_A I_A$  是弱可相容模, 由定义 1 知  $\text{Hom}_A(P^\bullet, I)$  正合。由引理 1(1) 和(3) 可得  $\text{Hom}_{A_\psi}(T^\bullet, Z_A(I)) \cong \text{Hom}_A(P^\bullet, I)$ , 于是  $\text{Hom}_{A_\psi}(T^\bullet, Z_A(I))$  正合。因为序列

$$0 \rightarrow Z_B(M) \rightarrow T'_A(\Lambda) \rightarrow Z_A(\Lambda) \rightarrow 0$$

是正合的, 且  $T$  是投射  $A_\psi$ -模, 所以有复形正合列

$$0 \rightarrow \text{Hom}_{A_\psi}(T^\bullet, Z_B(M)) \rightarrow \text{Hom}_{A_\psi}(T^\bullet, T'_A(\Lambda)) \rightarrow \text{Hom}_{A_\psi}(T^\bullet, Z_A(\Lambda)) \rightarrow 0.$$

因为  ${}_B M_A$  是弱可相容模, 所以  $\text{Hom}_B(Q^\bullet, M)$  是正合的, 且由引理 1(2) 和(3) 可知  $\text{Hom}_{A_\psi}(T^\bullet, Z_B(M)) \cong \text{Hom}_B(Q^\bullet, M)$ , 进而  $\text{Hom}_{A_\psi}(T^\bullet, Z_B(M))$  正合。同理, 因为  $P^\bullet$  是强完全投射分解, 由引理 1(1) 和(3) 可得  $\text{Hom}_{A_\psi}(T^\bullet, Z_A(\Lambda))$  正合, 故  $\text{Hom}_{A_\psi}(T^\bullet, T'_A(\Lambda))$  正合。综上所述, 序列  $\text{Hom}_{A_\psi}(T^\bullet, T_A(\Lambda))$  正合。

最后证明  $\text{Ker}(d_T) \cong (X, Y, f, g)$ 。前文已证得  $\text{Ker}(d_F) \cong X$ ,  $\text{Ker}(d_H) \cong Y$ , 根据交换图

$$\begin{array}{ccccccc} M \otimes_A X & \longrightarrow & M \otimes_A F & \xrightarrow{1_M \otimes d_F} & M \otimes_A F & & \\ \downarrow f & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & H & \xrightarrow{d_H} & H \\ & & \downarrow g & & \downarrow & & \downarrow \\ N \otimes_B Y & \longrightarrow & N \otimes_B H & \xrightarrow{1_N \otimes d_H} & N \otimes_B H & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & X & \longrightarrow & F & \xrightarrow{d_F} & F \end{array}$$

可得  $\text{Ker}(d_T) \cong (X, Y, f, g)$ , 因此  $(X, Y, f, g)$  是强 Gorenstein 投射模。

**推论 1** 令  $A_\psi = \begin{pmatrix} A & A \\ A & A \end{pmatrix}_{(0, \psi)}$ , 设  ${}_A A_A, {}_A I_A$  是弱可相容模, 若  $A_\psi$ -模  $(X, Y, f, g)$  满足下列条件:

- (1)  ${}_A \text{Coker}(g)$  和  ${}_A \text{Coker}(f)$  都是强 Gorenstein 投射模,