

一类含导数项的二阶时滞微分方程的周期解

喜霞,李永祥*

(西北师范大学数学与统计学院,甘肃兰州730070)

摘要:讨论非线性项中含导数项的二阶时滞常微分方程

$$-u''(t)+a(t)u(t)=f(t,u(t),u(t-\tau),u'(t)), \quad t \in \mathbf{R}$$

的 2π -周期解的存在性与唯一性,其中 $a:\mathbf{R} \rightarrow (0,+\infty)$ 为以 2π 为周期的连续函数, $f:\mathbf{R}^4 \rightarrow \mathbf{R}$ 连续, $f(t,x,y,z)$ 关于 t 以 2π 为周期, $\tau>0$ 为常数。在非线项 f 满足适当的不等式条件下,应用Leray-Schauder不动点定理与先验估计技巧,获得该方程 2π -周期解的存在性与唯一性结果。

关键词:二阶时滞常微分方程; 2π -周期解;存在性和唯一性;Leray-Schauder不动点定理

中图分类号:O175.8; O175.14 文献标志码:A

引用格式:喜霞,李永祥.一类含导数项的二阶时滞微分方程的周期解[J].山东大学学报(理学版),2025,60(12):103-109,120.

Periodic solutions of a second-order delay ordinary differential equation with derivative term

XI Xia, LI Yongxiang*

(College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou 730070, Gansu, China)

Abstract: In this paper, the existence and uniqueness of 2π -periodic solutions are discussed for the second-order delay ordinary differential equations with derivative term in the nonlinearity

$$-u''(t)+a(t)u(t)=f(t,u(t),u(t-\tau),u'(t)), \quad t \in \mathbf{R}$$

where $a:\mathbf{R} \rightarrow (0,+\infty)$ is a 2π periodic continuous function, $f:\mathbf{R}^4 \rightarrow \mathbf{R}$ is a continuous function and $f(t,x,y,z)$ is 2π -periodic on t , $\tau>0$ is a constant. The nonlinearity f satisfies some appropriate inequality conditions, the existence and uniqueness results of 2π -periodic solutions are obtained by using the Leray-Schauder fixed point theorem and the technique of prior estimates.

Key words: second order delay differential equations; 2π -periodic solution; existence and uniqueness; Leray-Schauder fixed point theorem

0 引言

本文讨论非线性项中含有时滞项与导数项的二阶常微分方程

$$-u''(t)+a(t)u(t)=f(t,u(t),u(t-\tau),u'(t)), \quad t \in \mathbf{R} \quad (1)$$

的 2π -周期解的存在性与唯一性,其中系数函数 $a:\mathbf{R} \rightarrow (0,+\infty)$ 连续,以 2π 为周期,非线性项 $f(t,x,y,z)$ 连续,关于 t 以 2π 为周期, $\tau>0$ 为常数。

时滞微分方程在生物学、生态学、经济学以及工程技术等诸多领域有着广泛的应用前景,用以描述具有时间滞后效应的生态系统如人口动力系统。在时滞微分方程中,周期解的存在性是人们一直关注的研究

课题,多种非线性的工具与方法用于该问题的研究,尤其是二阶时滞微分方程周期解的存在性。文献[1-4]应用拓扑度理论及不动点定理研究非线性项中不含未知函数的导数项的一些二阶时滞微分方程周期解的存在性,文献[5]应用临界点理论研究 \mathbf{R}^n 中二阶时滞微分方程

$$-u''(t) = -f(u(t-\tau)), \quad t \in \mathbf{R}$$

周期解的存在性,获得了多重周期解的存在性结果,文献[6-8]应用锥上的不动点指数理论研究了非线性项非负的一些二阶时滞微分方程正周期解的存在性。文献[9-10]研究有序 Banach 空间中二阶时滞微分方程周期解的存在性,作者非线性项 f 满足一些拟单调性的条件下,用上下解的单调迭代方法,获得了方程周期解的存在性结果。

上述文献讨论的都是非线性项 f 中不含导数项的特殊情形。对于非线性项含有导数项的但不含时滞项的特殊情形,即完全二阶常微分方程

$$u''(t) = f(t, u(t), u'(t)), \quad t \in \mathbf{R}$$

周期解的存在性也被一些作者研究,见文献[11-14]。对无时滞的二阶周期问题,可限制在一个周期上,化为 $[0, 2\pi]$ 上的周期边值问题,用常规的方法处理。但对有时滞的二阶周期问题,由于时滞量 τ 的存在,不能化为 $[0, 2\pi]$ 上的周期边值问题,只能在周期函数空间 $C_{2\pi}^1(\mathbf{R})$ 中讨论周期解的存在性。

本文研究非线性项中既含时滞项也含导数项的一般二阶时滞微分方程(1)周期解的存在性。在非线性项 f 满足一些不等式条件下,应用 Leray-Schauder 不动点定理和先验估计技巧,获得了方程(1)周期解的存在性和唯一性结果(定理1和定理2)。这些不等式条件允许 $f(t, x, y, z)$ 关于 x, y, z 超线性增长(例1与例2)。本文的结果表明,时滞项 $u(t-\tau)$ 影响周期解的存在性,而时滞量 τ 不影响周期解的存在性。

1 预备知识

记 $C_{2\pi}(\mathbf{R})$ 为以 2π 为周期的全体连续函数按最大模范数 $\|u\|_C = \max_{t \in [0, 2\pi]} |u(t)|$ 构成的 Banach 空间, $C_{2\pi}^1(\mathbf{R})$ 为以 2π 为周期的全体连续可微函数按范数 $\|u\|_{C^1} = \max\{\|u\|_C, \|u'\|_C\}$ 构成的 Banach 空间。在以下讨论中,对 $u \in C_{2\pi}(\mathbf{R})$, 本文也使用 u 的 2-范数 $\|u\|_2 = \left(\int_0^{2\pi} |u(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}$ 。

在方程(1)中,我们总假设其系数函数 $a \in C_{2\pi}(\mathbf{R})$, $a(t) > 0$, $t \in \mathbf{R}$ 。令

$$\underline{a} = \min_{t \in [0, 2\pi]} a(t), \quad \bar{a} = \max_{t \in [0, 2\pi]} a(t),$$

则 $0 < \underline{a} \leq a(t) \leq \bar{a}$, $t \in \mathbf{R}$ 。

为了研究非线性方程(1)周期解的存在性,先讨论对应的线性方程

$$-u''(t) + a(t)u(t) = h(t), \quad t \in \mathbf{R} \quad (2)$$

周期解的存在唯一性,其中 $h \in C_{2\pi}(\mathbf{R})$ 。先考察其特殊情形

$$-u''(t) + \bar{a}u(t) = h(t), \quad t \in \mathbf{R}, \quad (3)$$

对 $\forall h \in C_{2\pi}(\mathbf{R})$, 按文献[15], 方程(3)存在唯一的 2π -周期解 u , 其可表示为

$$u(t) = \int_{t-2\pi}^t \Phi(t-s)h(s) ds := Th(t), \quad (4)$$

其中积分核函数

$$\Phi(t) = \frac{\cosh \sqrt{\bar{a}}(t-\pi)}{2\sqrt{\bar{a}} \sinh(\sqrt{\bar{a}}\pi)}, \quad t \in [0, 2\pi],$$

由式(4)易见,周期解算子 $T: C_{2\pi}(\mathbf{R}) \rightarrow C_{2\pi}^1(\mathbf{R})$ 为线性全连续算子。对一般的线性方程(2),有如下的存在唯一性结果:

引理 1 对 $\forall h \in C_{2\pi}(\mathbf{R})$, 线性微分方程(2)有唯一的 2π -周期解 $u := Sh$, 且 $S: C_{2\pi}(\mathbf{R}) \rightarrow C_{2\pi}^1(\mathbf{R})$ 为线性全连续算子。

证明 改写方程(2)为如下形式:

$$-u''(t) + \bar{a}u(t) = (\bar{a} - a(t))u(t) + h(t), \quad t \in \mathbf{R},$$

由线性方程(3)的 2π -周期解的表示知, $u \in C_{2\pi}^2(\mathbf{R})$ 是方程(2)的 2π -周期解, 当且仅当 u 满足积分方程:

$$u(t) = \int_{t-2\pi}^t \Phi(t-s) [(\bar{a}-a(s))u(s) + h(s)] ds, \quad t \in \mathbf{R}. \quad (5)$$

定义算子 $B: C_{2\pi}(\mathbf{R}) \rightarrow C_{2\pi}(\mathbf{R})$

$$Bu(t) = (\bar{a}-a(t))u(t),$$

则 B 为 $C_{2\pi}(\mathbf{R})$ 中的正有界线性算子。按 T 的定义, 方程(5)等价于 $C_{2\pi}(\mathbf{R})$ 中的算子方程:

$$(I-TB)u = Th, \quad (6)$$

其中 I 为 $C_{2\pi}(\mathbf{R})$ 中的单位算子。对 $\forall u \in C_{2\pi}(\mathbf{R}), t \in \mathbf{R}$, 根据 T 与 B 的定义, 有

$$\begin{aligned} |(TB)u(t)| &= |T(Bu)(t)| = \left| \int_{t-2\pi}^t \Phi(t-s) (\bar{a}-a(s))u(s) ds \right| \\ &\leq \int_{t-2\pi}^t \Phi(t-s) |(\bar{a}-a(s))u(s)| ds \\ &\leq (\bar{a}-\underline{a}) \|u\|_C \int_{t-2\pi}^t \Phi(t-s) ds \\ &= (\bar{a}-\underline{a}) \|u\|_C \int_0^{2\pi} \Phi(s) ds \\ &= \left(1 - \frac{\underline{a}}{\bar{a}}\right) \|u\|_C, \end{aligned}$$

因此 $\|(TB)u\|_C \leq \left(1 - \frac{\underline{a}}{\bar{a}}\right) \|u\|_C$ 。复合算子 $TB: C_{2\pi}(\mathbf{R}) \rightarrow C_{2\pi}(\mathbf{R})$ 的范数:

$$\|TB\| \leq 1 - \frac{\underline{a}}{\bar{a}} < 1。$$

因为单位算子扰动定理, $I-TB$ 在 $C_{2\pi}(\mathbf{R})$ 中有有界逆算子 $(I-TB)^{-1}$, 且

$$(I-TB)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (TB)^n, \quad (7)$$

所以算子方程(6)有唯一解:

$$u = (I-TB)^{-1}Th := Sh,$$

其中 $S = (I-TB)^{-1}T$ 。因此, 方程(2)有唯一的 2π -周期解 $u := Sh$ 。根据式(7)有

$$S = (I-TB)^{-1}T = \sum_{n=0}^{\infty} (TB)^n T = T + \sum_{n=1}^{\infty} (TB)(TB)^{n-1}T = T \left(I + \sum_{n=1}^{\infty} B(TB)^{n-1}T \right),$$

因此 S 可表示为 $S=TQ$, 其中 $Q = I + \sum_{n=1}^{\infty} B(TB)^{n-1}T$ 为 $C_{2\pi}(\mathbf{R})$ 中的线性有界算子, 按 $T: C_{2\pi}(\mathbf{R}) \rightarrow C_{2\pi}^1(\mathbf{R})$ 的全连续性, $S=TQ: C_{2\pi}(\mathbf{R}) \rightarrow C_{2\pi}^1(\mathbf{R})$ 是线性全连续算子。

考虑非线性方程(1)。设非线性项 $f: \mathbf{R}^4 \rightarrow \mathbf{R}$ 连续, $f(t, x, y, z)$ 关于 t 以 2π 为周期。定义非线性映射

$$F: C_{2\pi}^1(\mathbf{R}) \rightarrow C_{2\pi}(\mathbf{R}), \quad F(u)(t) = f(t, u(t), u(t-\tau), u'(t)), \quad u \in C_{2\pi}^1(\mathbf{R}), \quad t \in \mathbf{R},$$

则 $F: C_{2\pi}^1(\mathbf{R}) \rightarrow C_{2\pi}(\mathbf{R})$ 连续, 把 $C_{2\pi}^1(\mathbf{R})$ 中的有界集映为 $C_{2\pi}(\mathbf{R})$ 的有界集。因此, 按 $S: C_{2\pi}(\mathbf{R}) \rightarrow C_{2\pi}^1(\mathbf{R})$ 的全连续性, 复合映射

$$A = S \circ F: C_{2\pi}^1(\mathbf{R}) \rightarrow C_{2\pi}^1(\mathbf{R}) \quad (8)$$

全连续。由算子 S 和 F 的定义, 方程(1)的 2π -周期解等价于 A 的不动点, 将用 Leray-Schauder 不动点定理获得 A 的不动点。在论证中, 为了处理非线性项中的导数项, 本文假设 $f(t, x, y, z)$ 关于 z 的增长满足如下 Nagumo 型条件:

(F1) 对 $\forall M > 0$, 均存在 $[0, +\infty)$ 上的正值连续增函数 $G_M(r)$ 满足

$$\int_0^{+\infty} \frac{r dr}{G_M(r)} = +\infty, \quad (9)$$

使得 f 满足

$$|f(t, x, y, z)| \leq G_M(|z|), \quad t \in [0, 2\pi], \quad x, y \in [-M, M], \quad z \in \mathbf{R}.$$

引理 2 设 $f: \mathbf{R}^4 \rightarrow \mathbf{R}$ 连续, 满足条件(F1), 则对 $\forall M > 0$, 存在仅与 M 有关的常数 $M_1 = M_1(M) > 0$, 使得对方程(1)的任意 2π -周期解 $u \in C_{2\pi}^2(\mathbf{R})$, 当 $\|u\|_C \leq M$ 时, 有 $\|u'\|_C \leq M_1$.

证明 设 $M > 0$, $u \in C_{2\pi}^2(\mathbf{R})$ 为方程(1)的 2π -周期解, 满足 $\|u\|_C \leq M$. 由条件(9)可得

$$\int_0^{+\infty} \frac{rdr}{G_M(r) + \bar{a}M} = +\infty,$$

因此, $\exists M_1 > 0$, 使得

$$\int_0^{M_1} \frac{rdr}{G_M(r) + \bar{a}M} > 2M. \quad (10)$$

下证 $\|u'\|_C \leq M_1$. 不妨设 $\|u'\|_C \neq 0$, 由连续函数的最大值定理, $\exists t_1 \in [0, 2\pi]$ 使得 $\|u'\|_C = |u'(t_1)|$. 按 $u(t)$ 的周期性, $u(0) = u(2\pi)$, 由罗尔中值定理, $\exists t_0 \in (0, 2\pi)$ 使得 $u'(t_0) = 0$. 因为 $u'(t_1) \neq 0$, $t_0 \neq t_1$, 所以, 可能出现的共有以下 4 种情形:

- (1) $u'(t_1) > 0$, $t_0 < t_1$;
- (2) $u'(t_1) > 0$, $t_0 > t_1$;
- (3) $u'(t_1) < 0$, $t_0 < t_1$;
- (4) $u'(t_1) < 0$, $t_0 > t_1$.

本文仅证明情形(1), 其它 3 种情形可类似证明. 令

$$t_2 = \sup \{ t' \in [t_0, t_1] \mid u'(t') = 0 \},$$

则按上确界的定义及 $u'(t)$ 的连续性, 有

$$0 < t_2 < t_1 \leq 2\pi, \quad u'(t_2) = 0; \quad u'(t) > 0, \quad t \in (t_2, t_1].$$

当 $t \in [t_2, t_1]$ 时, 由方程(1)和条件(F1), 有

$$u''(t) = -f(t, u(t), u(t-\tau), u'(t)) + a(t)u(t) \leq G_M(u'(t)) + \bar{a}M,$$

因此, 有

$$\frac{u'(t)u''(t)}{G_M(u'(t)) + \bar{a}M} \leq u'(t), \quad t \in [t_2, t_1].$$

将上式两端在 $[t_2, t_1]$ 上积分, 且对左端的积分作变量替换 $r = u'(t)$, 得

$$\int_0^{u'(t_1)} \frac{rdr}{G_M(r) + \bar{a}M} \leq u(t_1) - u(t_2) \leq 2\|u\|_C \leq 2M.$$

由式(10)知, $u'(t_1) \leq M_1$. 从而有

$$\|u'\|_C = |u'(t_1)| = u'(t_1) \leq M_1,$$

即引理 2 结论成立.

2 主要结果

定理 1 设 $a: \mathbf{R} \rightarrow (0, +\infty)$ 连续, 以 2π 为周期, $f: \mathbf{R}^4 \rightarrow \mathbf{R}$ 连续, $f(t, x, y, z)$ 关于 t 以 2π 为周期, 若 f 满足假设(F1)及下列条件:

(F2) 存在常数 $\alpha, \beta, \gamma \geq 0$ 及常数 $c > 0$, 满足 $\alpha + \beta < \bar{a}$, $\gamma < 1$, 使得

$$f(t, x, y, z)x \leq \alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 + c, \quad t, x, y, z \in \mathbf{R},$$

则方程(1)至少有一个 2π -周期解.

证明 设 $A: C_{2\pi}^1(\mathbf{R}) \rightarrow C_{2\pi}^1(\mathbf{R})$ 是式(8)定义的全连续映射, 则方程(1)的 2π -周期解等价于 A 的不动点. 对 A 应用 Leray-Schauder 不动点定理. 为此, 考虑方程簇:

$$u = \lambda Au, \quad 0 < \lambda < 1. \quad (11)$$

证明方程簇(11)的解集在 $C_{2\pi}^1(\mathbf{R})$ 中有界.

设 $u \in C_{2\pi}^1(\mathbf{R})$ 为方程簇(11)中某个 λ 对应的方程的解, 则 $u = S(\lambda F(u))$, 按 S 的定义, u 为 $h = \lambda F(u) \in$

$C_{2\pi}(\mathbf{R})$ 相应的线性方程(2)的 2π -周期解,因此 $u \in C_{2\pi}^2(\mathbf{R})$ 满足微分方程:

$$-u''(t) + a(t)u(t) = \lambda f(t, u(t), u(t-\tau), u'(t)), \quad t \in \mathbf{R}. \quad (12)$$

方程(12)两端同乘以 $u(t)$ 并在 $[0, 2\pi]$ 上积分,右端应用条件(F2),有

$$\begin{aligned} -\int_0^{2\pi} u''(t)u(t) dt + \int_0^{2\pi} a(t)u^2(t) dt &= \lambda \int_0^{2\pi} f(t, u(t), u(t-\tau), u'(t))u(t) dt \\ &\leq \lambda \int_0^{2\pi} (\alpha u^2(t) + \beta u^2(t-\tau) + \gamma u'^2(t) + c) dt \\ &\leq \int_0^{2\pi} (\alpha u^2(t) + \beta u^2(t-\tau) + \gamma u'^2(t) + c) dt \\ &= \alpha \|u\|_2^2 + \beta \int_0^{2\pi} u^2(t-\tau) dt + \gamma \|u'\|_2^2 + 2\pi c \\ &= (\alpha + \beta) \|u\|_2^2 + \gamma \|u'\|_2^2 + 2\pi c. \end{aligned} \quad (13)$$

式(13)最后一步应用了

$$\int_0^{2\pi} u^2(t-\tau) dt = \int_{-\tau}^{2\pi-\tau} u^2(s) ds = \int_0^{2\pi} u^2(t) dt = \|u\|_2^2,$$

这是因为以 2π 为周期的函数在长度为 2π 的区间上的积分均相等。

对式(13)的左端应用分部积分公式,有

$$-\int_0^{2\pi} u''(t)u(t) dt + \int_0^{2\pi} a(t)u^2(t) dt = \int_0^{2\pi} |u'(t)|^2 dt + \int_0^{2\pi} a(t)u^2(t) dt \geq \|u'\|_2^2 + \underline{a} \|u\|_2^2.$$

结合式(13),得

$$\|u'\|_2^2 + \underline{a} \|u\|_2^2 \leq (\alpha + \beta) \|u\|_2^2 + \gamma \|u'\|_2^2 + 2\pi c,$$

从而有

$$(1-\gamma) \|u'\|_2^2 + (\underline{a} - (\alpha + \beta)) \|u\|_2^2 \leq 2\pi c,$$

因此

$$\|u'\|_2 \leq \frac{2\pi c}{1-\gamma}, \quad \|u\|_2 \leq \frac{2\pi c}{\underline{a} - (\alpha + \beta)}. \quad (14)$$

对 $\forall t \in \mathbf{R}$, 应用 Hölder 不等式及式(14),有

$$\begin{aligned} |u(t)| &\leq \left| u(t) - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(s) ds \right| + \frac{1}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} u(s) ds \right| \\ &= \frac{1}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} (u(t) - u(s)) ds \right| + \frac{1}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} u(s) ds \right| \\ &= \frac{1}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} \int_s^t u'(\tau) d\tau ds \right| + \frac{1}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} u(s) ds \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} \left| \int_s^t u'(\tau) d\tau \right| ds \right| + \frac{1}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} u(s) ds \right| \\ &\leq \int_0^{2\pi} |u'(\tau)| d\tau + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |u(s)| ds \\ &\leq (2\pi)^{\frac{1}{2}} \|u'\|_2 + (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \|u\|_2 \\ &\leq 2\pi \left(\frac{c}{1-\gamma} \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{c}{\underline{a} - (\alpha + \beta)} \right)^{\frac{1}{2}} := M, \end{aligned}$$

因此 $\|u\|_c \leq M$ 。再由引理 2, 存在仅与 M 有关的常数 $M_1 = M_1(M) > M$, 使得 $\|u'\|_c \leq M_1$ 。因此

$$\|u\|_{C^1} = \max \{ \|u\|_c, \|u'\|_c \} \leq M_1,$$

即方程簇(11)的解集在 $C_{2\pi}^1(\mathbf{R})$ 中有界。由 Leray-Schauder 不动点定理, A 在 $C_{2\pi}^1(\mathbf{R})$ 中有不动点, 该不动点为方程(1)的 2π -周期解。

定理 2 设 $a: \mathbf{R} \rightarrow (0, +\infty)$ 连续, 以 2π 为周期, $f: \mathbf{R}^4 \rightarrow \mathbf{R}$ 连续, $f(t, x, y, z)$ 关于 t 以 2π 为周期, 若 f 满足假设(F1)及下列条件:

(F3) 存在常数 $\alpha, \beta, \gamma \geq 0$, 满足 $\alpha + \beta < \underline{a}$, $\gamma < 1$, 使得对 $\forall t, x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2 \in \mathbf{R}$, 有

$$(f(t, x_2, y_2, z_2) - f(t, x_1, y_1, z_1))(x_2 - x_1) \leq \alpha(x_2 - x_1)^2 + \beta(y_2 - y_1)^2 + \gamma(z_2 - z_1)^2,$$

则方程(1)存在唯一的 2π -周期解。

证明 先证(F3) \Rightarrow (F2)。取常数

$$\delta = \frac{\underline{a} - (\alpha + \beta)}{2}, \quad C_0 = \max_{t \in [0, 2\pi]} |f(t, 0, 0, 0)| + 1,$$

则 $\alpha + \delta + \beta < \underline{a}$, 令

$$\alpha_1 = \alpha + \delta, \quad \beta_1 = \beta, \quad \gamma_1 = \gamma, \quad c_1 = \frac{C_0^2}{4\delta},$$

则 $\alpha_1 + \beta_1 < \underline{a}$, $\gamma_1 < 1$ 。对 $\forall t, x, y, z \in \mathbf{R}$, 在条件(F3)中, 取 $(t, x_2, y_2, z_2) = (t, x, y, z)$, $(t, x_1, y_1, z_1) = (t, 0, 0, 0)$, 有

$$\begin{aligned} f(t, x, y, z)x &= (f(t, x, y, z) - f(t, 0, 0, 0))(x - 0) + f(t, 0, 0, 0)x \\ &\leq \alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 + C_0 |x| \\ &= \alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 + 2 \cdot \frac{C_0}{2\sqrt{\delta}} \cdot \sqrt{\delta} |x| \\ &\leq \alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 + \frac{C_0^2}{4\delta} + \delta x^2 \\ &= \alpha_1 x^2 + \beta_1 y^2 + \gamma_1 z^2 + c_1. \end{aligned}$$

因此, $f(t, x, y, z)$ 对常数 $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, c_1$ 满足条件(F2)。于是, 由定理1, 方程(1)有 2π -周期解。

再证唯一性。设 $u_1, u_2 \in C_{2\pi}^2(\mathbf{R})$ 为方程(1)的两个解, 则 u_1, u_2 均为 A 的不动点。令 $u = u_2 - u_1$, 则由 A 的定义, 有 $u = u_2 - u_1 = Au_2 - Au_1 = S(F(u_2) - F(u_1))$ 。按 S 的定义, u 为 $h = F(u_2) - F(u_1) \in C_{2\pi}(\mathbf{R})$ 对应的线性方程(2)的 2π -周期解, 因此 $u \in C_{2\pi}^2(\mathbf{R})$ 满足微分方程:

$$-u''(t) + a(t)u(t) = F(u_2)(t) - F(u_1)(t). \quad (15)$$

将式(15)两边同乘以 $u(t)$, 由条件(F3), 有

$$\begin{aligned} -u''(t)u(t) + a(t)u^2(t) &= (f(t, u_2(t), u_2(t-\tau), u_2'(t)) - f(t, u_1(t), u_1(t-\tau), u_1'(t)))(u_2(t) - u_1(t)) \\ &\leq \alpha(u_2 - u_1)^2 + \beta(u_2(t-\tau) - u_1(t-\tau))^2 + \gamma(u_2'(t) - u_1'(t))^2 \\ &= \alpha u^2(t) + \beta u^2(t-\tau) + \gamma u'^2(t). \end{aligned}$$

将上式两端在 $[0, 2\pi]$ 上积分, 并对左端应用分部积分公式, 得

$$\begin{aligned} \|u'\|_2^2 + \underline{a} \|u\|_2^2 &\leq - \int_0^{2\pi} u''(t)u(t) dt + \int_0^{2\pi} a(t)u^2(t) dt \\ &\leq \alpha \int_0^{2\pi} u^2(t) dt + \beta \int_0^{2\pi} u^2(t-\tau) dt + \gamma \int_0^{2\pi} u'^2(t) dt \\ &= (\alpha + \beta) \|u\|_2^2 + \gamma \|u'\|_2^2. \end{aligned}$$

因此有

$$(1 - \gamma) \|u'\|_2^2 + (\underline{a} - (\alpha + \beta)) \|u\|_2^2 \leq 0.$$

因为 $1 - \gamma > 0$, $\underline{a} - (\alpha + \beta) > 0$, 故由上式得, $\|u'\|_2 = 0$, $\|u\|_2 = 0$, 所以 $u = 0$, 从而 $u_1 = u_2$ 。综上得, 方程(1)的 2π -周期解是唯一的。

3 例子

例1 考虑下列关于未知函数 u 及其导数 u' 均超线性增长的二阶时滞微分方程:

$$-u''(t) + (2 + 3 \cos^2 t)u(t) = -u^3(t) + u(t - \pi) - u(t)(u'(t))^2 + \sin t, \quad t \in \mathbf{R}. \quad (16)$$

对应于方程(1), 相应的非线性项为

$$f(t, x, y, z) = -x^3 - y - xz^2 + \sin t, \quad t, x, y, z \in \mathbf{R}. \quad (17)$$

因为 $f(t, x, y, z)$ 关于 z 是二次增长的,故其满足条件(F1)。因为系数函数 $a(t) = 2 + 3 \cos^2 t$,所以 $\underline{a} = 2$ 。取常数 $\alpha = \frac{3}{4}, \beta = \frac{1}{2}, \gamma = 0, c = 1$,则 $\alpha + \beta < \underline{a}$,故 α, β, γ, c 满足(F2)中的系数条件。对 $\forall t, x, y, z \in \mathbf{R}$,由式(17)得

$$\begin{aligned} f(t, x, y, z)x &= -x^4 + xy - x^2 z^2 + x \sin t \leq xy + 2 \frac{x}{2} \sin t \\ &\leq \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{4}x^2 + \sin^2 t \\ &\leq \frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{2}y^2 + 1 \\ &= \alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 + c, \end{aligned}$$

因此 $f(t, x, y, z)$ 满足条件(F2)。由定理 1,方程(16)至少有一个 2π -周期解。

例 2 考虑超线性二阶时滞微分方程:

$$-u''(t) + (5 - 2 \sin^2 t)u(t) = -3u^5(t) + 2u(t-) \cos t + u'(t) \sin t + 1, \quad t \in \mathbf{R}. \tag{18}$$

对应于方程(1)的相应的非线性项为

$$f(t, x, y, z) = -3x^5 + 2y \cos t + z \sin t + 1, \quad t, x, y, z \in \mathbf{R}. \tag{19}$$

易见 $f(t, x, y, z)$ 满足条件(F1)。因为 $a(t) = 5 - 2 \sin^2 t$,所以 $\underline{a} = 3$ 。取常数 $\alpha = \frac{3}{2}, \beta = 1, \gamma = \frac{1}{2}$,则 $\alpha + \beta < \underline{a}$,故 α, β, γ 满足条件(F3)中的系数条件。对 $\forall t, x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2 \in \mathbf{R}$,由式(19)及微分中值定理,存在 $\theta \in (0, 1)$ 及 $\xi_1 = x_1 + \theta(x_2 - x_1), \xi_2 = y_1 + \theta(y_2 - y_1), \xi_3 = z_1 + \theta(z_2 - z_1)$,使得

$$\begin{aligned} &(f(t, x_2, y_2, z_2) - f(t, x_1, y_1, z_1))(x_2 - x_1) \\ &= f_x(t, \xi_1, \xi_2, \xi_3)(x_2 - x_1)^2 \\ &\quad + f_y(t, \xi_1, \xi_2, \xi_3)(x_2 - x_1)(y_2 - y_1) + f_z(t, \xi_1, \xi_2, \xi_3)(x_2 - x_1)(z_2 - z_1) \\ &= -15\xi_1^4(x_2 - x_1)^2 + 2(x_2 - x_1)(y_2 - y_1) \cos t + (x_2 - x_1)(z_2 - z_1) \sin t \\ &\leq 2|(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)| + |(x_2 - x_1)(z_2 - z_1)| \\ &\leq (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + \frac{1}{2}(x_2 - x_1)^2 + \frac{1}{2}(z_2 - z_1)^2 \\ &= \alpha(x_2 - x_1)^2 + \beta(y_2 - y_1)^2 + \gamma(z_2 - z_1)^2. \end{aligned}$$

因此, $f(t, x, y, z)$ 满足条件(F3)。由定理 2,方程(18)有唯一的 2π -周期解。

参考文献:

[1] LI J W, CHENG S S. Periodic solutions of a second order forced sublinear differential equation with delay [J]. Applied Mathematics Letters, 2005, 18:1373-1380.
 [2] WANG Y Y, LIAN H R, GE W G. Periodic solutions for a second order nonlinear functional differential equation [J]. Applied Mathematics Letters, 2007, 20:110-115.
 [3] WU J, WANG Z C. Two periodic solutions of second-order neutral functional differential equations [J]. Journal Mathematical Analysis and Applications, 2007, 329:677-689.
 [4] WU Y X. Existence nonexistence and multiplicity of periodic solutions for a kind of functional differential equation with parameter [J]. Nonlinear Analysis, 2009, 70:433-443.
 [5] GUO C J, GUO Z M. Existence of multiple periodic solutions for a class of second-order delay differential equations [J]. Nonlinear Analysis: Real World Applications, 2009, 10:3285-3297.
 [6] CHEUNG W S, REN J L, HAN W W. Positive periodic solution of second-order neutral functional differential equations [J]. Nonlinear Analysis, 2009, 71:3948-3955.
 [7] LI Y X. Positive periodic solutions of second-order differential equations with delay [J]. Abstract and Applied Analysis, 2012, 13:829783.
 [8] LI Q, LI Y X. On the existence of positive periodic solutions for second-order functional differential equations with multiple delays [J]. Abstract and Applied Analysis, 2012, 13:929870.