文章编号:1671-9352(2025)11-0059-06 DOI:10.6040/j.issn.1671-9352.0.2023.246

关于加法幂等元半环簇 $V(S(a^2b))$

吴亚楠
(西北大学数学学院, 陕西 西安 710069)

摘要:研究由 $S(a^2b)$ 生成的簇 $V(S(a^2b))$,刻画 $V(S(a^2b))$ 的子簇格 $\mathscr{L}(V(S(a^2b)))$,证明 $V(S(a^2b))$ 的每一个子簇都是有限基底和 $V(S(a^2b))$ 是遗传有限基底。

关键词:*ai*-半环;平坦半环;子簇格;有限基底
中图分类号:O153.5 **文献标志码**:A
引用格式:吴亚楠. 关于加法幂等元半环簇 $V(S(a^2b))$[J]. 山东大学学报(理学版),2025,60(11):59-64.

The additively idempotent semiring variety $V(S(a^2b))$

WU Yanan
(School of Mathematics, Northwest University, Xi'an 710069, Shaanxi, China)

Abstract: The variety $V(S(a^2b))$ generated by $S(a^2b)$ is studied, and the lattice $\mathscr{L}(V(S(a^2b)))$ of subvarieties of $V(S(a^2b))$ is depicted. Also, each member of this lattice is finitely based and $V(S(a^2b))$ is hereditarily finitely based are proved.

Key words: *ai*-semiring; flat semiring; the lattice of subvarieties; finitely based

0 引言

若同型代数类 V 对类算子同态像、子代数和直积都是封闭的,则称其为簇。由 Birkhoff 定理可知,一个同型代数类是簇当且仅当它是等式类,即满足某个恒等式组的全体代数。若簇 V 可由有限个恒等式确定,则称 V 是有限基底的,否则称其为非有限基底的;若一个簇的所有子簇都是有限基底的,则称该簇是遗传有限基底的[1]。问一个给定的簇是否为有限基底称为簇的有限基底问题,它是簇理论的核心问题之一。V 的全体子簇在包含关系下作成的格,称为 V 的子簇格,记为 $\mathscr{L}(V)$。若 V 是有限基底的,则 V 的所有子簇都是有限基底的当且仅当 $\mathscr{L}(V)$ 满足降链条件。特别地,若 V 是有限基底的和 $\mathscr{L}(V)$ 是有限格,则 V 的所有子簇都是有限基底的。因此,研究格 $\mathscr{L}(V)$ 有助于解决 V 的子簇的有限基底问题。

本文主要研究 *ai*-半环簇。若(2,2)型代数 $(S,+,\cdot)$ 满足条件:$(S,+)$ 是可换半群;$(S,\cdot)$ 是半群;$(\forall a,b,c\in S)\,a(b+c)=ab+ac$, $(a+b)c=ac+bc$,则称 S 是半环[1]。若半环满足恒等式 $x+x\approx x$,则称其为加法幂等元半环,简称 *ai*-半环[2-9]。设 S 是 *ai*-半环。若 $(S,\cdot)$ 有零元,且 $a+b=0\,(a\neq b)$,则称 S 为平坦半环。设 X 是一个可数无限的变量的集合,X^+ 表示 X 上的自由半群,假设 W 是自由半群 X^+ 的任一非空子集,令

$$S(W)=\{u\in X^+ \mid (\exists v\in W)\,u\leqslant v\}\cup\{0\}。$$

在 $S(W)$ 上定义乘法为:对于任意的 $u,v\in S(W)$,若并置 $uv\in S(W)\setminus\{0\}$,则 $u\cdot v=uv$,否则,$u\cdot v=0$。也在 $S(W)$ 上定义加法为平坦加法,则 $S(W)$ 是平坦半环。文献[10-13]对 $S(W)$ 进行了深入的研究,同时也留下了若干公开问题。这表明了平坦半环 $S(W)$ 在 *ai*-半环簇理论中扮演着重要的角色,而簇 $V(S(a^2b))$ 的有限基底问题还未解决[11]。本文将回答这个问题,并刻画 $V(S(a^2b))$ 的子簇格。

收稿日期:2023-06-05; **网络出版时间**:2024-05-23 11:40:14
基金项目:国家自然科学基金资助项目(11971383)
作者简介:吴亚楠(1993—),女, 博士研究生,研究方向为代数学. E-mail:wuyanan@ stumail.nwu.edu.cn

本文未介绍的概念与记号请查阅文献[1,11]。

1 次直不可约平坦半环

设 S 为平坦半环,若 ρ 为 $(S,+)$ 上的同余,则有 $\rho=(0/\rho\times 0/\rho)\cup 1_S=\rho_I$,其中 $I=0/\rho$ 是 $(S,+)$ 上的理想。反之,若 I 是 S 的任一含 0 的非空子集,则有 $I\trianglelefteq(S,+)$。设 S 是有零元的半群,如果对于任意的 $s\in S$ 有正整数 n 且有 $s^n=0$,那么 S 称为幂零的。设 S 是半环,若 $(S,\cdot)$ 是幂零半群,则称 S 是幂零半环。为了方便叙述,本文将 $\{1,2,\cdots,m\}$ 记为 $\underline{m}$。

命题 1 设 S 是非平凡的幂零半环,若 S 包含 0-极小理想 I,则 $|I|=2$。

证明 设 $a,b\in I\setminus\{0\}$,则 $I\subseteq S^1aS^1,S^1bS^1$,存在 S^1 中元素 c_1,d_1,c_2,d_2 使得 $a=c_1bd_1$, $b=c_2ad_2$,因此,$a=c_1c_2ad_2d_1=\cdots=(c_1c_2)^na(d_2d_1)^n=\cdots$。由于 S 是幂零半环,因此 $u=v=1$,得证。

推论 1 设 S 是非平凡的平坦半环,则 S 是次直不可约的当且仅当 $(S,\cdot)$ 有唯一的 0-极小理想 $I=\{0,\omega\}$,其中 ω 是 S 上的零化子。

命题 2 设 S 是非平凡的次直不可约平坦半环,若 $S^k\neq\{0\}$, $S^{k+1}=\{0\}$,则 $S^k=\{0,\omega\}$。

证明 设 $a_1a_2\cdots a_k\in S^k$,由推论 1,存在 S^1 中元素 b、c 使得 $\omega=ba_1a_2\cdots a_kc$。由 $S^{k+1}=\{0\}$ 可得 $b=c=1$,因此 $a_1a_2\cdots a_k=\omega$。

设 $(S_i)_{i\in I}$ 是一族次直不可约的平坦半环,且满足 $S_i\cap S_j=\{0,\omega\}$, $i,j\in I$ 且 $i\neq j$,其中 ω 是 $S_i(i\in I)$ 的唯一零化子。令 $S=\cup_{i\in I}S_i$,任取 $a,b\in S$,定义

$$a\cdot b=\begin{cases}ab, & \text{存在 } i\in I,\text{使得 } a,b\in S_i,\\ 0, & \text{其他。}\end{cases}$$

在 $(S,\cdot)$ 定义平坦加法,则 $(S,+,\cdot)$ 成为平坦半环。实际上,S 仍是次直不可约的平坦半环,ω 是其唯一的零化子,因此,将上述 S 称为 $(S_i)_{i\in I}$ 的 0-ω 直并,记为 $\overset{\omega}{\underset{i\in I}{\cup}}S_i$[13]。

命题 3 设 S 是非平凡的平坦半环且 $S^2\neq\{0\}$, $S^3=\{0\}$,若 S 是次直不可约的,则 S 同构于 $S(a_ib_i)(i\in\underline{n})$ 的 0-ω 直并,其中 a_i 和 $b_j(i,j\in\underline{n})$ 可能相等。

证明 由命题 2,得 $S^2=\{0,\omega\}$,因此对于任意 $s\in S\setminus\{0\}$,都有唯一的 $t\in S\setminus\{0\}$ 使得 $\omega=st$。由此可得,$\{s,t\}$ 生成的 S 的子半环同构于 $S(ab)$,S 是有限的,则有 $S=\overset{n}{\underset{i=1}{\cup}}\{s_i,t_i\}\cup\{0,\omega\}$。因此 S 同构于 $S(a_ib_i)(i\in\underline{n})$ 的 0-ω 直并。

命题 4 $S(a_ib_i)(i\in\underline{m})$ 的 0-ω 直并是簇 $V(S(ab)\cup S(cd))$ 的成员,其中 $a_i\neq b_j(i,j\in\underline{m})$。

证明 考虑直积 $(S(ab)\overset{\omega}{\cup}S(cd))^m$。令 A 是由 $\{\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m,\boldsymbol{b}_m\}$ 生成的 $(S(ab)\overset{\omega}{\cup}S(cd))^m$ 上的子半环,其中

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{a}_1=(c,a,a,a,\cdots,a,a), && \boldsymbol{b}_1=(d,b,b,b,\cdots,b,b),\\
&\boldsymbol{a}_2=(a,c,a,a,\cdots,a,a), && \boldsymbol{b}_2=(b,d,b,b,\cdots,b,b),\\
&\vdots && \vdots\\
&\boldsymbol{a}_m=(a,a,a,a,\cdots,a,c), && \boldsymbol{b}_m=(b,b,b,b,\cdots,b,d).
\end{aligned}$$

容易验证,对于任意的 $i\in\underline{m}$ 都有 $\boldsymbol{a}_i\boldsymbol{b}_i=(\omega,\omega,\cdots,\omega)$。令 J 表示 A 中具有分量为 0 的元素全体。容易验证 $J\trianglelefteq A$,则有 A/J 同构于 $S(a_ib_i)(i\in\underline{m})$ 的 0-ω 直并,故 $S(a_ib_i)(i\in\underline{m})$ 的 0-ω 直并是簇 $V(S(ab)\overset{\omega}{\cup}S(cd))$ 的成员。

命题 5 $S(a_ib_i)(i\in\underline{n})$ 的 0-ω 直并是簇 $V(S(a^2b))$ 的成员,其中 $a_i\neq b_j(i,j\in\underline{n})$。

证明 考虑直积 $(S(a^2b))^{n+1}$。令 A 是由 $\{\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n,\boldsymbol{b}_n\}$ 生成的 $(S(a^2b))^{n+1}$ 上的子半环,其中

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{a}_1=(a,a^2,a,a,\cdots,a,a), && \boldsymbol{b}_1=(ab,b,ab,ab,\cdots,ab,ab),\\
&\boldsymbol{a}_2=(a,a,a^2,a,\cdots,a,a), && \boldsymbol{b}_2=(ab,ab,b,ab,\cdots,ab,ab),\\
&\vdots && \vdots
\end{aligned}$$

$$\boldsymbol{a}_n=(a,a,a,a,\cdots,a,a^2),\quad \boldsymbol{b}_n=(ab,ab,ab,ab,\cdots,ab,b)。$$

容易验证,对于任意的 $i\in\underline{n}$ 都有 $\boldsymbol{a}_i\boldsymbol{b}_i=(a^2b,a^2b,\cdots,a^2b)$。令 J 表示 A 中具有分量为 0 的元素全体,容易验证 $J\trianglelefteq A$,则有 A/J 同构于 $S(a_ib_i)(i\in\underline{n})$ 的 0-ω 直并,故 $S(a_ib_i)(i\in\underline{n})$ 的 0-ω 直并是簇 $V(S(a^2b))$ 的成员,其中 $a_i\neq b_j(i,j\in\underline{n})$。

2　簇 $V(S(a^2b))$ 及其子簇

本节描述了 $V(S(a^2b))$ 的子簇格 $\mathscr{L}(V(S(a^2b)))$,证明了该格中的元素都是有限基底的和 $V(S(a^2b))$ 是遗传有限基底的。

用 F 表示所有的平坦半环生成的簇,在文献[11]中可知,F 是有限基底的且它的次直不可约成员均是平坦半环。接下来,给出 $V(S(a^2b))$ 的子簇均是有限基底的。容易验证,$S(a^2b)$ 满足下列恒等式:

$$x_1x_2x_3x_4\approx y^4;\tag{1}$$
$$x^2+y^2\approx(x+y)^2;\tag{2}$$
$$x^2+yz\approx x^2+yz+y^2+z^2;\tag{3}$$
$$x^2+y^2z\approx z^4;\tag{4}$$
$$xy+yz\approx z^4;\tag{5}$$
$$xyz\approx(x+y)^2z;\tag{6}$$
$$xyz+x_1y_1z_1\approx(x+x_1)(y+y_1)(z+z_1)。\tag{7}$$

为证明 $V(S(a^2b))$ 是 F 上由上述等式确定的簇,则需引入下列结果。

引理 1　设 S 是有限的非平凡的 F 上的次直不可约元,若 S 满足恒等式(1)—(7),则 $V(S)\in\{V(S(a)),V(S(a^2)),V(S(ab)),V(S(ab)\overset{\omega}{\cup}S(cd)),V(S(a^2b))\}$。

证明　假设 S 是有限的非平凡的 F 上的次直不可约元且满足恒等式(1)—(7),分以下情况进行讨论:

(ⅰ) $S^2=\{0\}$,由命题 2 可得 S 同构于 $S(a)$,因此 $V(S)=V(S(a))$。

(ⅱ) $S^2\neq\{0\}$, $S^3=\{0\}$,由命题 3 可得 S 同构于 $S(a_ib_i)(i\in\underline{m})$ 的 0-ω 直并。

若存在 $i\in\underline{m}$ 使得 $a_i=b_i$。不妨设 $a_1=b_1$,则 $m=1$。可得 S 同构于 $S(a^2)$,故 $V(S)=V(S(a^2))$。假设 $m\neq1$,若 $a_2=b_2$,则由式(2),可得 $\omega=a_1^2+a_2^2=(a_1+a_2)^2=0$,矛盾。否则 $a_2\neq b_2$,则由恒等式(3),可得 $\omega=a_1^2+a_2b_2=a_1^2+a_2b_2+a_2^2+b_2^2=0$,矛盾。

若对于任意 $i\in\underline{m}$ 都有 $a_i\neq b_i$。若 $m=1$,则有 S 同构于 $S(ab)$,故 $V(S)=V(S(ab))$。

若 $m\geqslant1$,则有 S 同构于 $S(a_ib_i)(i\in\underline{m})$ 的 0-ω 直并。由于 S 满足式(5),因此 S 同构于 $S(a_ib_i)(i\in\underline{m})$ 的 0-ω 直并,其中 $a_i\neq b_j(i,j\in\underline{n})$。一方面,容易验证 $S(ab)\overset{\omega}{\cup}S(cd)$ 是 $S(a_ib_i)(i\in\underline{m})$ 的 0-ω 直并的子半环,则 $V(S(ab)\overset{\omega}{\cup}S(cd))\leqslant V(S)$;另一方面,由命题 4 可得 $V(S)=V(S(ab)\overset{\omega}{\cup}S(cd))$,故 $V(S)=V(S(ab))$。

(ⅲ) $S^3\neq\{0\}$。由恒等式(6)—(7),存在 $s,t\in S$ 使得 $s^2t=\omega$。若 S 是由 $\{s,t\}$ 生成的,则其同构于 $S(a^2b)$,因此 $V(S)=V(S(a^2b))$。

若由 $\{s,t\}$ 生成的 S 的子半环 $\langle s,t\rangle$ 是真的。任给 $s_1\in S\backslash\{0,\omega,s,t,s^2,st\}$,则由 $(s,\cdot)$ 是 0-可消的,可得存在唯一的 $t_1\in S\backslash\{0,\omega,s,t,s^2,st\}$ 使得 $\omega=s_1t_1$。假设 $s_1=t_1$。由于 S 满足恒等式(4),因此 $\omega=s_1^2+s^2t=0$,矛盾。于是 $s_1\neq t_1$,则由 s_1,t_1 生成的 S 的子半环同构于 $S(ab)$。又由 S 是有限的且 S 满足式(5),存在 $n\in\mathbf{N}$ 使得 S 是 $S(a_ib_i)(i\in\underline{n})$ 和 $\langle s,t\rangle$ 的 0-ω 直并,其中 $a_i\neq b_j(i,j\in\underline{n})$,即 S 同构于 $S(s^2t)$ 和 $S(a_ib_i)(i\in\underline{n})$ 的 0-ω直并,其中 $a_i\neq b_j(i,j\in\underline{n})$。

下面证明 $S\in V(S(a^2b))$。

考虑直积 $(S(a^2b))^{n+1}$。令 A 是由 $\{\boldsymbol{a}_0,\boldsymbol{b}_0,\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n,\boldsymbol{b}_n\}$ 生成的 S 上的子半环,其中

$$\boldsymbol{a}_0=(a,a,a,a,\cdots,a,a),\quad \boldsymbol{b}_0=(b,b,b,b,\cdots,b,b),$$
$$\boldsymbol{a}_1=(a,a^2,a,a,\cdots,a,a),\quad \boldsymbol{b}_1=(ab,b,ab,ab,\cdots,ab,ab),$$

$$\boldsymbol{a}_2=(a,a,a^2,a,\cdots,a,a),\quad \boldsymbol{b}_2=(ab,ab,b,ab,\cdots,ab,ab),$$
$$\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots$$
$$\boldsymbol{a}_n=(a,a,a,a,\cdots,a,a^2),\quad \boldsymbol{b}_n=(ab,ab,ab,ab,\cdots,ab,b)。$$

容易验证,对于任意的 $i\in \underline{n}$ 都有 $\boldsymbol{a}_0^2\boldsymbol{b}_0=\boldsymbol{a}_i\boldsymbol{b}_i=(a^2b,a^2b,\cdots,a^2b)$。令 J 表示 A 中具有分量为 0 的元素全体。容易验证 $J\trianglelefteq A$,于是 A/J 同构于 S。因此 $V(S)\leqslant V(S(a^2b))$。容易验证 $S(a^2b)$ 是 S 的子半环,因此 $V(S(a^2b))\leqslant V(S)$,于是 $V(S)=V(S(a^2b))$。

引理 2 簇 $V(S(a^2b))$ 是 F 上由恒等式(1)—(7)确定的子簇。

证明 容易验证 $S(a^2b)$ 满足恒等式(1)—(7)。接下来,只需验证 F 上的满足恒等式(1)—(7)的任意有限次直不可约成员 S 是 $V(S(a^2b))$ 的成员。由引理 1 可得

$$V(S)\in\{V(S(a)),V(S(a^2)),V(S(ab)),V(S(ab)\overset{\omega}{\cup}S(cd)),V(S(a^2b))\}。$$

容易验证 $V(S(a)),V(S(a^2)),V(S(a^2b))$ 均是 $V(S(a^2b))$ 的子簇。由命题 5 可得 $V(S(ab)),V(S(ab)\overset{\omega}{\cup}S(cd))$ 也是 $V(S(a^2b))$ 的子簇,得证。

引理 3 簇 $V(S(a^2)\cup(S(ab)\overset{\omega}{\cup}S(cd)))$ 是 $V(S(a^2b))$ 上由恒等式

$$x_1x_2x_3\approx y^3 \tag{8}$$

确定的子簇。

证明 容易验证 $S(a^2)\cup(S(ab)\overset{\omega}{\cup}S(cd))$ 满足恒等式(1)—(8)。接下来,只需验证 $V(S(a^2b))$ 上的满足恒等式(8)的任意有限次直不可约成员 S 是 $V(S(a^2)\cup(S(ab)\overset{\omega}{\cup}S(cd)))$ 的成员。由 $V(S(a^2b))$ 不满足恒等式(8)和引理 1,可得 $V(S)\in\{V(S(a)),V(S(a^2)),V(S(ab)),V(S(ab)\overset{\omega}{\cup}S(cd))\}$。容易验证 $V(S(a)),V(S(a^2)),V(S(ab)),V(S(ab)\overset{\omega}{\cup}S(cd))$ 均是 $V(S(a^2)\cup(S(ab)\overset{\omega}{\cup}S(cd)))$ 的子簇,得证。

引理 4 $V(S(a^2b))$ 的真子簇满足恒等式(8)。

证明 假设 V 是的 $V(S(a^2b))$ 真子簇且不满足恒等式(8),则在 V 中存在有限次直不可约平坦半环 S 不满足恒等式(8),由恒等式(6)—(7),存在 $s\neq t\in S$ 使得 $\omega=s^2t$,则由 $\{s,t\}$ 生成的 S 的子半环同构于 $S(a^2b)$,因此 $V(S(a^2b))$ 是 $V(S)$ 的子簇,于是 $V=V(S(a^2b))$。

由引理 3、4 可得格 $\mathscr{L}(V(S(a^2b)))$ 是由 $V(S(a^2)\cup(S(ab)\overset{\omega}{\cup}S(cd)))$ 的子簇全体组成的。易得 $V(S(a))$ 是 $\mathscr{L}(V(S(a^2b)))$ 中的唯一原子,因此 $\mathscr{L}(V(S(a^2)\cup(S(ab)\overset{\omega}{\cup}S(cd))))$ 是由 T 和区间 $[V(S(a)),V(S(a^2)\cup(S(ab)\overset{\omega}{\cup}S(cd)))]$ 组成的。

引理 5[13] $V(S(W_1))\vee V(S(W_2))=V(S(W_1\cup W_2))$。

引理 6 (1) 簇 $V(S(ab))$ 是 $V(S(a^2)\cup(S(ab)\overset{\omega}{\cup}S(cd)))$ 上由恒等式

$$x^2\approx y^4, \tag{9}$$
$$xy+zt\approx(x+z)(y+t) \tag{10}$$

确定的子簇。

(2) 簇 $V(S(a^2))$ 是 $V(S(a^2)\cup(S(ab)\overset{\omega}{\cup}S(cd)))$ 上由恒等式

$$xy\approx x^2+y^2 \tag{11}$$

确定的子簇。

(3) 在 $\mathscr{L}(V(S(a^2b)))$ 中区间 $[V(S(a)),V(S(a^2)\cup(S(ab)\overset{\omega}{\cup}S(cd)))]$ 包含

$$\{V(S(a)),V(S(a^2),V((S(ab)),V(S(ab)\overset{\omega}{\cup}S(cd)),V(S(a^2)\cup(S(ab)\overset{\omega}{\cup}S(cd)))\}。$$

证明 (1) 容易验证 $S(ab)$ 满足恒等式(1)—(10),只需验证 $V(S(a^2)\cup(S(ab)\overset{\omega}{\cup}S(cd)))$ 上的满足恒等式(9)和(10)的任意有限次直不可约成员 S 是 $V(S(ab))$ 的成员。由于 $V(S(a^2)),V(S(ab)\overset{\omega}{\cup}S(cd)),V(S(a^2b))$ 分别不满足恒等式(8)、(9)、(10)和引理 1,因此 $V(S)\in\{V(S(a)),V(S(ab))\}$。容

易验证 $V(S(a))$,$V(S(ab))$均是 $V(S(ab))$的子簇,得证。

(2) 容易验证 $S(a^2)$满足恒等式(1)—(8)和(11),只需验证 $V(S(a^2)\cup((S(ab)\overset{\omega}{\cup}S(cd)))$上的满足恒等式(11)的任意有限次直不可约成员 S 是 $V(S(a^2))$的成员。一方面,由 $V(S(ab))$,$V(S(ab)\overset{\omega}{\cup}S(cd))$,$V(S(a^2b))$不满足恒等式(11)和引理 1,可得 $V(S)\in\{V(S(a)),V(S(ab))\}$;另一方面,容易验证 $V(S(a))$,$V(S(a^2))$均是 $V(S(a^2))$的子簇,得证。

(3) 假设 V 在区间$[V(S(a)),V(S(a^2)\cup(S(ab)\overset{\omega}{\cup}S(cd)))]$且 $V\neq V(S(a))$,则 V 不满足恒等式 $x_1x_2\approx y^2$,因此存在 V 中的有限次直不可约成员 S 不满足恒等式 $x_1x_2\approx y^2$,即 $S^3=\{0\}$, $S^2\neq\{0\}$,于是 $S^2=\{0,\omega\}$。接下来,分下列 2 种情况。

(ⅰ) 若 S 满足恒等式(11),则由式(2),可得 $V=V(S(a^2))$。

(ⅱ) 若 S 不满足恒等式(11),则存在 V 中的有限次直不可约成员 S'不满足恒等式(11)。又分下列 4 种情况:

(a) 若 S'满足恒等式(9)和(10),则存在 $s\neq t\in S$ 使得 $st=\omega$, $s^2=t^2=0$,因此 S'同构于 $S(ab)$,于是 $V=V(S(ab))$。

(b) 若 S'满足恒等式(9),不满足恒等式(10),则存在 V 中的有限次直不可约成员 S''不满足恒等式(10)。由命题 3 可得 S''同构于 $S(a_ib_i)(i\in\underline{n})$的 0-$\omega$ 直并,其中 $n\geqslant 2$,因此 $V(S(ab)\overset{\omega}{\cup}S(cd))$是 V 的子簇;另一方面,由命题 4 可得 V 是 $V(S(ab)\overset{\omega}{\cup}S(cd))$的子簇,因此 $V=V(S(ab)\overset{\omega}{\cup}S(cd))$。

(c) 若 S'不满足恒等式(9),满足恒等式(10),则存在 V 中的有限次直不可约成员 S'''不满足恒等式(9),于是存在 $s\in S$ 使得 $s^2=\omega$。由 s 生成的 S''的子半环同构于 $S(a^2)$,则有 $V(S(a^2))\subseteq V$。由情况(a),可得 $V(S(ab))\subseteq V$,由引理 5 可得

$$V(S(a^2,ab))=V(S(a^2))\vee V(S(ab))\subseteq V;$$

另一方面,由引理 2 可得 V 是 $V(S(a^2,ab))$的子簇,因此 $V=V(S(a^2,ab))$。

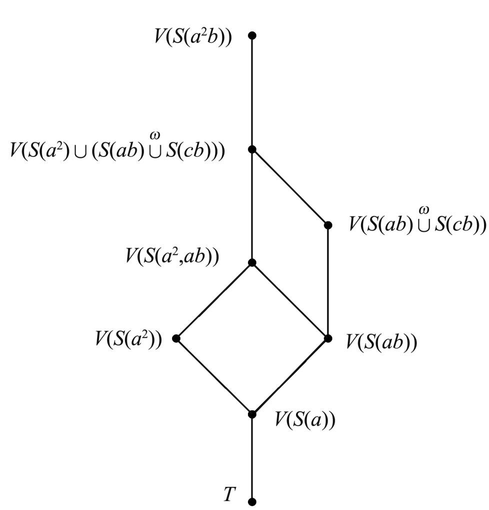
(d) 若 S'不满足恒等式(9)、(10),由情况(c),可得 $V(S(a^2))\subseteq V$,且由情况(b),可得 $S(ab)\overset{\omega}{\cup}S(cd)\subseteq V$。由引理 5,可得

$$V(S(a^2)\cup(S(ab)\overset{\omega}{\cup}S(cd)))=V(S(a^2))\vee V(S(ab)\overset{\omega}{\cup}S(cd))\subseteq V,$$

因此 $V=V(S(a^2)\cup(S(ab)\overset{\omega}{\cup}S(cd)))$。

综上所述,可得定理 1。

定理 1　格 $\mathscr{L}(V(S(a^2b)))$如下图所示:



推论 2　$S(a^2b)$是遗传有限基底的。

致谢:作者感谢赵宪钟教授的指导。

参考文献：

[1] BURRIS S, SANKAPPANAVAR H P. A course in universal algebra[M]. New York: Springer, 1981.
[2] GHOSH S, PASTIJN F, ZHAO X Z. Varieties generated by ordered bands I[J]. Order, 2005, 22:109-128.
[3] PASTIJN F. Varieties generated by ordered bands II[J]. Order, 2005, 22:129-143.
[4] PASTIJN F, ZHAO X Z. Varieties of idempotent semirings with commutative addition[J]. Algebra Universalis, 2005, 54:301-321.
[5] REN Miaomiao, ZHAO Xianzhong. The varieties of semilattice-ordered semigroups satisfying $x^3 \approx x$ and $xy \approx yx$[J]. Periodica Mathematica Hungarica, 2016, 72:158-170.
[6] REN Miaomiao, ZHAO Xianzhong, WANG Aifa. On the varieties of ai-semirings satisfying $x^3 \approx x$[J]. Algebra Universalis, 2017, 77(4):395-408.
[7] SHAO Yong, REN Miaomiao. On the varieties generated by ai-semirings of order two[J]. Semigroup Forum, 2015, 91:171-184.
[8] ZHAO X Z, GUO Y Q, SHUM K P. $\mathscr{D}$-subvarieties of the variety of idempotent semirings[J]. Algebra Colloquium, 2002, 9(1):15-28.
[9] ZHAO X Z, SHUM K P, GUO Y Q. $\mathscr{L}$-subvarieties of the variety of idempotent semirings[J]. Algebra Universalis, 2001, 46:75-96.
[10] JACKSON M. Flat algebras and the translation of universal Horn logic to equational logic[J]. Journal of Symbolic Logic, 2008, 73:90-128.
[11] JACKSON M, REN M M, ZHAO X Z. Nonfinitely based ai-semirings with finitely based semigroup reducts[J]. Journal of Algebra, 2022, 611:211-245.
[12] REN M M, JACKSON M, ZHAO X Z, et al. Flat extensions of groups and limit varieties of additively idempotent semirings[J]. Journal of Algebra, 2023, 623:64-85.
[13] WU Yanan, ZHAO Xianzhong, REN Miaomiao. On varieties of flat nil-semirings[J]. Semigroup Forum, 2023, 106:271-284.

（编辑：陈丽萍）

（上接第58页）

注意到 H 和 K 是左正合函子，U 和 Z 是正合函子，其中 (Z,K) 和 (U,H) 均是伴随对，且 $UZ=id_{\mathscr{B}}$，$KH=id_{\mathscr{A}}$。

则在左平凡扩张范畴 $G\ltimes\mathscr{A}$ 中关于 Gorenstein 内射对象的相关定义和定理如下：

定义 2 称 G 具有余相容性，如果对 $\mathscr{A}$ 中的任意完全内射分解 Ξ，有 $G(\Xi)$ 和 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(G(E),\Xi)$ 正合，其中 E 是 $\mathscr{A}$ 中的任意内射对象。

定理 3 假设 G 具有余相容性，令 $[Y,\beta]$ 是 $G\ltimes\mathscr{A}$ 中的对象，如果 $Y\xrightarrow{\beta}G(Y)\to G^2(Y)$ 正合，并且 $\mathrm{Ker}(\beta)$ 是 Gorenstein 内射的，那么 $[Y,\beta]$ 是 Gorenstein 内射的。

定理 4 假设对 $G\ltimes\mathscr{A}$ 中的任意完全内射分解 Ξ 以及 $\mathscr{A}$ 中的任意内射对象 Q，有 $\mathrm{Hom}_{G\ltimes\mathscr{A}}(Z(Q),\Xi)$ 正合，G 具有余相容性。若 $[Y,\beta]$ 是 $G\ltimes\mathscr{A}$ 中的 Gorenstein 内射对象，则有 $\mathrm{Ker}(\beta)$ 是 $\mathscr{A}$ 中的 Gorenstein 内射对象，且序列 $Y\xrightarrow{\beta}G(Y)\to G^2(Y)$ 正合。

参考文献：

[1] AUSLANDER M, BRIDGER M. Stable module theory[M]. Rhode Island: American Mathematical Society, 1969.
[2] ENOCHS E E, JENDA O M G. Gorenstein injective and projective modules[J]. Mathematische Zeitschrift, 1995, 220:611-633.
[3] ENOCHS E E, JENDA O M G. Relative homological algebra[M]. Berlin-New York: Walter de Gruyter, 2011.
[4] ENOCHS E E, JENDA O M G, TORRECILLAS B. Gorenstein flat modules[J]. Nanjing Daxue Xuebao Shuxueban Niankan, 1993, 10(1):1-9.
[5] FOSSUM R M, GRIFFITH P, REITEN I. Trivial extensions of abelian categories[M]. Berlin: Springer, 1975.
[6] MAO Lixin. Gorenstein projective, injective and flat modules over trivial ring extensions[J]. Journal of Algebra and Its Applications, 2025, 24(2):2550030.

（编辑：陈丽萍）