文章编号:1671-9352(2025)11-0130-04 DOI:10.6040/j.issn.1671-9352.0.2023.324

十六维 Taft 代数量子偶的幂等元

殷泽涛,胡承超,陈惠香
(扬州大学数学科学学院, 江苏 扬州 225002)

摘要:研究十六维 Taft 代数量子偶的幂等元,基于 Taft 代数量子偶的已知结论,构造并给出了十六维 Taft 代数量子偶的一个本原正交幂等元完全集。

关键词:Hopf 代数;Taft 代数;量子偶;幂等元;本原幂等元
中图分类号:O153.1 **文献标志码**:A
引用格式:殷泽涛,胡承超,陈惠香. 十六维 Taft 代数量子偶的幂等元[J]. 山东大学学报(理学版),2025,60(11):130-133,147.

The idempotents of the quantum double of 16-dimensional Taft algebra

YIN Zetao, HU Chengchao, CHEN Huixiang
(School of Mathematical Sciences, Yangzhou University, Yangzhou 225002, Jiangsu, China)

Abstract: The idempotents of the quantum double of 16-dimensional Taft algebra are investigated. According to the known conclusion of the quantum double of Taft algebra, a complete set of primitive orthogonal idempotents of the quantum double of 16-dimensional Taft algebra are constructed.

Key words: Hopf algebra; Taft algebra; quantum double; idempotent; primitive idempotent

0 引言

Drinfeld[1]引入拟三角 Hopf,这类 Hopf 代数的表示范畴是一个辫子张量范畴,它为 Yang-Baxter 方程提供解。Drinfeld 还给出了一个一般性的方法:由一个有限维 Hopf 代数 H 可构造一个拟三角 Hopf 代数 $D(H)$,称为 H 的量子偶。1971 年,Taft[2]构造一类 n^2 维 Hopf 代数 $A_n(\omega)$,称之为 Taft 代数,其中 $n\geqslant 2$ 是整数,ω 是一个 n 次本原单位根。当 n 为奇数时,$A_n(\omega)$的量子偶 $D(A_n(\omega))$是一个 ribbon Hopf 代数,通过表示可为三流形提供不变量[3]。围绕 Taft 代数及其量子偶出现了许多研究成果,如陈晨等[4]研究了九维 Taft 代数的 lazy 2-上闭链;文献[5-6]中构造了一类 n^4 维 Hopf 代数 $H_n(p,q)$,其中 p, q 是纯量,且 q 是 n 次本原单根。当 $p\neq 0$ 且 $q=\omega^{-1}$ 时,$H_n(p,q)$ 作为 Hopf 代数同构于 $D(A_n(\omega))$,特别地,有 $H_n(1,q)\cong D(A_n(\omega))$,并由此研究了量子偶 $D(A_n(\omega))$的表示理论[6-8]。该量子偶的 Grothendieck 环、Green 环、投射类环以及张量积表示也得到了描述[9-15]。

众所周知,研究幂等元对有限维代数的结构和表示理论有重要作用,例如由一个有限维代数的本原幂等元的完全集可得到该代数的主投射模结构和正则模分解,而由中心本原幂等元的完全集可得到该代数的块分解。幂等元有广泛的应用,例如,通过计算幂等元可得了九维 Taft 代数量子偶的主投射模和块分解[7],利用幂等元构造 Hopf 代数以及研究 Hopf 代数作用理论[16-17]。

本文研究十六维 Taft 代数量子偶的幂等元。

收稿日期:2023-07-22; **网络出版时间**:2024-09-03 11:53:50
基金项目:国家自然科学基金资助项目(12071412)
第一作者:殷泽涛(2000—),男,硕士,研究方向为 Hopf 代数及其表示. E-mail:3375737927@qq.com

1　预备知识

在本文中恒设 k 是一个代数闭域,所有代数和模都定义在域 k 上,模是指有限维左模,用 dim 表示 $\dim_k$。设 k 含有一个 4 次本原单位根 q,则 $q^2=-1$ 且 k 的特征不为 2。令 $\omega=q^{-1}$,则 ω 也是一个 4 次本原单位根。对任意的 $n,l\in\mathbf{Z}$,令 $(n)_q=(q^n-1)/(q-1)$ 和 $\alpha_n(l)=(n)_q(1-q^{n-l})$。用 $\mathbf{Z}$ 表示整数环,$\mathbf{Z}_4$ 表示 $\mathbf{Z}$ 模 4 的剩余类环,一个整数 n 在自然同态 $\mathbf{Z}\to\mathbf{Z}_4$ 下的像仍然记作 n。有关 Hopf 代数的基本概念和理论参见文献[18-19]。

十六维 Taft 代数 $A_4(\omega)$ 是由 x 和 g 生成的代数,满足:$g^4=1$, $x^4=0$, $gx=qxg$。$A_4(\omega)$ 是一个 Hopf 代数,其余乘法 Δ、余单位 ε 和对极 S 由下述等式确定:$\Delta(g)=g\otimes g$, $\Delta(x)=x\otimes g+1\otimes x$, $\varepsilon(g)=1$, $\varepsilon(x)=0$, $S(g)=g^{-1}=g^3$, $S(x)=-xg^{-1}=-qg^3x$。

假设量子偶 $D(A_4(\omega))=H_4(1,q)$。由文献[5-6]知,$D(A_4(\omega))$ 作为代数由 a,b,c,d 生成,满足

$$ba=qab,\ db=qbd,\ ca=qac,\ dc=qcd,\ bc=cb,$$
$$da-qad=1-bc,\ a^4=d^4=0,\ b^4=c^4=1。$$

$D(A_4(\omega))$ 的余乘法 Δ、余单位 ε 和对极 S 由下述等式确定:

$$\Delta(a)=a\otimes b+1\otimes a,\quad \Delta(b)=b\otimes b,\quad \Delta(c)=c\otimes c,\quad \Delta(d)=d\otimes c+1\otimes d,\quad \varepsilon(a)=\varepsilon(d)=0,$$
$$\varepsilon(b)=\varepsilon(c)=1,\quad S(a)=-ab^{-1}=-ab^3,\quad S(b)=b^{-1}=b^3,\quad S(c)=c^{-1}=c^3,\quad S(d)=-dc^{-1}=qc^3d。$$

设 A 是一个代数。若 $e\in A$ 满足 $e^2=e$,则称 e 为幂等元;若幂等元 $e_1,e_2\in A$ 满足 $e_1e_2=e_2e_1=0$,则称 e_1, e_2 是正交的;若一个非零幂等元 $e\in A$ 不能分解成两个非零正交幂等元之和,则称 e 为本原幂等元。

定义 1　设 A 是一个有限维代数,$e_1,e_2,\cdots,e_n\in A$,若 $e_1,e_2,\cdots,e_n$ 是两两正交的本原幂等元,且 $\sum\limits_{i=1}^{n}e_i=1$,则称 $\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$ 为一个本原正交幂等元完全集。

2　量子偶 $D(A_4(\omega))$ 幂等元

本章探讨量子偶 $D(A_4(\omega))$ 的幂等元。

引理 1　$D(A_4(\omega))$ 的每个本原正交幂等元完全集所含元素个数为 40,则 $D(A_4(\omega))$ 的任一含有 40 个非零的两两正交的幂等元集必是本原正交幂等元完全集。

证明　由文献[6]知,$D(A_4(\omega))$ 有 16 个互不同构的单模 $V(l,r)$, $1\leqslant l\leqslant 4$, $r\in\mathbf{Z}_4$,且 $\dim(V(l,r))=l$。又因为 k 是代数闭域,所以量子偶 $D(A_4(\omega))$ 的每个本原正交幂等元完全集所含元素个数等于 $\sum\limits_{1\leqslant l\leqslant 4}4l=40$。证毕。

在 $D(A_4(\omega))$ 中,对于任意的 $l,m\in\mathbf{Z}$,令 $e_{l,m}=\dfrac{1}{16}\sum\limits_{0\leqslant i,\ j\leqslant 3}q^{li+mj}b^ic^j$,则显然有 $e_{l,m}=e_{s,t}$ 当且仅当 $l\equiv s\pmod 4$ 且 $m\equiv t\pmod 4$。令 $E=\{e_{l,m}\mid l,m\in\mathbf{Z}_4\}$,则利用 $D(A_4(\omega))$ 的生成元所满足的关系式,有下述引理。

引理 2　设 $l,m\in\mathbf{Z}_4$, $0\leqslant i$, $j\leqslant 3$,则以下结论成立:

(1) 集合 E 是两两正交的非零幂等元集,且 $\sum\limits_{e\in E}e=1$;

(2) $ae_{l,m}=e_{l-1,m-1}a$, $de_{l,m}=e_{l+1,m+1}d$, $be_{l,m}=e_{l,m}b=q^{-l}e_{l,m}$, $ce_{l,m}=e_{l,m}c=q^{-m}e_{l,m}$;

(3) $da^i=q^ia^id+(i)_qa^{i-1}(1-q^{i-1}bc)$, $d^ia=q^iad^i+(i)_q(1-q^{i-1}bc)d^{i-1}$;

(4) $a^id^ia^jd^j=a^jd^ja^id^i$。

证明　直接验证可得(1)和(2),由文献[5]的引理 3.4 证明得(3)。下面证明(4)。当 i 与 j 相等或其中有一个为零时结论显然成立。设 $1\leqslant i<j\leqslant 3$,若 $i=1$,则由(3)得

$$ada^jd^j=a(q^ja^jd+(j)_qa^{j-1}(1-q^j-1bc))d^j=a^j(q^jad^j)d+(j)_qa^j(1-q^{j-1}bc)d^j$$
$$=a^j(d^ja-(j)_q(1-q^{j-1}bc)d^{j-1})d+(j)_qa^j(1-q^{j-1}bc)d^j=a^jd^jad。$$

若 $i=2$,则 $j=3$,此时可类似地证明 $a^2d^2a^3d^3=a^3d^3a^2d^2$。证毕。

引理 3 设 $l,m\in\mathbf{Z}_4$, $r,s,t\in\mathbf{Z}$, $0\leqslant r,s,t\leqslant 3$ 且 $r\neq 0$,则

$$a^sd^se_{l,m}=e_{l,m}a^sd^s,\quad d^ra^sd^te_{l,m}=(q^sd^{r-1}a^sd^{t+1}+\alpha_s(1+2t+l+m)d^{r-1}a^{s-1}d^t)e_{l,m}。$$

证明 由引理 2(2),得 $a^sd^se_{l,m}=e_{l,m}a^sd^s$,再由引理 2(2)、(3),有

$$\begin{aligned}d^ra^sd^te_{l,m}&=d^{r-1}(da^s)d^te_{l,m}=d^{r-1}(q^sa^sd+(s)_qa^{s-1}(1-q^{s-1}bc))d^te_{l,m}\\&=(q^sd^{r-1}a^sd^{t+1}+(s)_qd^{r-1}a^{s-1}d^t(1-q^{s-1-2t}bc))e_{l,m}\\&=(q^sd^{r-1}a^sd^{t+1}+(s)_q(1-q^{s-1-2t-l-m})d^{r-1}a^{s-1}d^t)e_{l,m}\\&=(q^sd^{r-1}a^sd^{t+1}+\alpha_s(1+2t+l+m)d^{r-1}a^{s-1}d^t)e_{l,m}。\end{aligned}$$

引理 3 证毕。

在以下几个引理的证明中,对任意的 $n,l,m\in\mathbf{Z}$, $\alpha_n(l)=\alpha_n(m)$ 当且仅当 $l\equiv m(\bmod 4)$。

引理 4 设 $l,m\in\mathbf{Z}_4$ 且 $l+m=0$,并令 $e_{l,m,1}=\dfrac{1}{4}(2ad-qa^2d^2+qa^3d^3)e_{l,m}$, $e_{l,m,2}=e_{l,m}-e_{l,m,1}$,则 $e_{l,m,1}^2=e_{l,m,1}$, $e_{l,m,2}^2=e_{l,m,2}$, $e_{l,m,1}e_{l,m,2}=e_{l,m,2}e_{l,m,1}=0$ 且 $e_{l,m}=e_{l,m,1}+e_{l,m,2}$。

证明 由引理 2(2),得 $a^id^ie_{l,m}=e_{l,m}a^id^i$,由引理 2(1),得 $e_{l,m,1}e_{l,m}=e_{l,m}e_{l,m,1}=e_{l,m,1}$,再由引理 3,得

$$\begin{aligned}&dade_{l,m}=(qad^2+\alpha_1(3)d)e_{l,m}=(qad^2+2d)e_{l,m},\\&da^2d^2e_{l,m}=(q^2a^2d^3+\alpha_2(1)ad^2)e_{l,m}=(-a^2d^3+2ad^2)e_{l,m},\\&d^2a^2d^2e_{l,m}=q^2da^2d^3e_{l,m}+2dad^2e_{l,m}\\&\qquad=-(q^2a^2d^4e_{l,m}+\alpha_2(3)ad^3e_{l,m})+2(qad^3e_{l,m}+\alpha_1(1)d^2e_{l,m})\\&\qquad=-2qad^3e_{l,m}+2qad^3e_{l,m}=0\end{aligned}$$

和 $da^3d^3e_{l,m}=(q^3a^3d^4+\alpha_3(3)a^2d^3)e_{l,m}=0$,因此,由引理 2、3,可得

$$\begin{aligned}e_{l,m,1}^2&=\frac{1}{16}(4adad-4qada^2d^2)e_{l,m}=\frac{1}{4}(qa^2d^2+2ad+qa^3d^3-2qa^2d^2)e_{l,m}\\&=\frac{1}{4}(2ad-qa^2d^2+qa^3d^3)e_{l,m}=e_{l,m,1},\end{aligned}$$

从而 $e_{l,m,2}^2=e_{l,m,2}$, $e_{l,m,1}e_{l,m,2}=e_{l,m,2}e_{l,m,1}=0$,且 $e_{l,m}=e_{l,m,1}+e_{l,m,2}$。引理 4 证毕。

引理 5 设 $l,m\in\mathbf{Z}_4$ 且 $l+m=1$,并令 $e_{l,m,1}=-\dfrac{1+q}{8}a^3d^3e_{l,m}$, $e_{l,m,2}=\dfrac{1+q}{8}(4ad+2(q-1)a^2d^2+a^3d^3)e_{l,m}$, $e_{l,m,3}=e_{l,m}-e_{l,m,1}-e_{l,m,2}$,则 $e_{l,m,i}^2=e_{l,m,i}$, $e_{l,m,i}e_{l,m,j}=0$, $1\leqslant i\neq j\leqslant 3$,且 $e_{l,m}=e_{l,m,1}+e_{l,m,2}+e_{l,m,3}$。

证明 类似于引理 4,利用引理 3,可得 $dade_{l,m}=(qad^2+(1-q)d)e_{l,m}$, $da^2d^2e_{l,m}=-a^2d^3e_{l,m}$, $da^3d^3e_{l,m}=(q-1)a^2d^3e_{l,m}$, $d^2a^2d^2e_{l,m}=-2(1+q)ad^3e_{l,m}$, $d^2a^3d^3e_{l,m}=-4ad^3e_{l,m}$, $d^3a^3d^3e_{l,m}=4(q-1)d^3e_{l,m}$。进而由引理 2、3 有

$$e_{l,m,1}^2=\left(-\frac{1+q}{8}\right)^24(q-1)a^3d^3e_{l,m}=-\frac{1+q}{8}a^3d^3e_{l,m}=e_{l,m,1},$$

$$e_{l,m,2}^2=\left(\frac{1+q}{8}\right)^2(16qa^2d^2+16(1-q)ad+4(1-q)a^3d^3)e_{l,m}=e_{l,m,2},$$

以及 $e_{l,m,i}e_{l,m}=e_{l,m}e_{l,m,i}=e_{l,m,i}$, $i=1,2$,且 $e_{l,m,1}e_{l,m,2}=e_{l,m,2}e_{l,m,1}=0$,从而 $e_{l,m,3}^2=e_{l,m,3}$, $e_{l,m,i}e_{l,m,3}=e_{l,m,3}e_{l,m,i}=0$, $i=1,2$,且有 $e_{l,m}=e_{l,m,1}+e_{l,m,2}+e_{l,m,3}$。引理 5 证毕。

引理 6 设 $l,m\in\mathbf{Z}_4$ 且 $l+m=2$,并令 $e_{l,m,1}=-\dfrac{1}{4}(qa^2d^2+a^3d^3)e_{l,m}$, $e_{l,m,2}=e_{l,m}-e_{l,m,1}$,则 $e_{l,m,1}^2=e_{l,m,1}$, $e_{l,m,2}^2=e_{l,m,2}$, $e_{l,m,1}e_{l,m,2}=e_{l,m,2}e_{l,m,1}=0$ 且 $e_{l,m}=e_{l,m,1}+e_{l,m,2}$。

证明 类似于引理 4,可得

$$e_{l,m,1}e_{l,m}=e_{l,m}e_{l,m,1}=e_{l,m,1},$$

且

$$d^2a^2d^2e_{l,m}=(4qd^2-4ad^3)e_{l,m},\ d^2a^3d^3e_{l,m}=4qad^3e_{l,m},\ d^3a^3d^3e_{l,m}=0,\text{于是}$$

$$e_{l,m,1}^{2}=\left(-\frac{1}{4}\right)^{2}(4q^{3}a^{2}d^{2}-4q^{2}a^{3}d^{3}+8q^{2}a^{3}d^{3})e_{l,m}=\frac{1}{4}(-qa^{2}d^{2}-a^{3}d^{3})e_{l,m}=e_{l,m,1},$$

从而有 $e_{l,m,2}^{2}=e_{l,m,2}$, $e_{l,m,1}e_{l,m,2}=e_{l,m,2}e_{l,m,1}=0$,且有 $e_{l,m}=e_{l,m,1}+e_{l,m,2}$。引理 6 证毕。

引理 7　设 $l,m\in\mathbf{Z}_4$ 且 $l+m=3$,并令 $e_{l,m,1}=\frac{1}{2}((1-q)ad-a^{2}d^{2})e_{l,m}$, $e_{l,m,2}=\frac{1}{8}(2a^{2}d^{2}+(q-1)a^{3}d^{3})e_{l,m}$, $e_{l,m,3}=e_{l,m}-e_{l,m,1}-e_{l,m,2}$,则 $e_{l,m,i}^{2}=e_{l,m,i}$, $e_{l,m,i}e_{l,m,j}=0$, $1\leqslant i\neq j\leqslant 3$,且 $e_{l,m}=e_{l,m,1}+e_{l,m,2}+e_{l,m,3}$。

证明　类似于引理 4,可得

$$e_{l,m}e_{l,m,1}=e_{l,m,1}e_{l,m}=e_{l,m,1},\quad e_{l,m}e_{l,m,2}=e_{l,m,2}e_{l,m}=e_{l,m,2}$$

且

$$dade_{l,m}=((1+q)d+qad^{2})e_{l,m},\quad da^{2}d^{2}e_{l,m}=(2(1+q)ad^{2}-a^{2}d^{3})e_{l,m},$$
$$da^{3}d^{3}e_{l,m}=(1+q)a^{2}d^{3}e_{l,m},\quad d^{2}a^{2}d^{2}e_{l,m}=(4d^{2}-2(1-q)ad^{3})e_{l,m},\quad d^{2}a^{3}d^{3}e_{l,m}=0,$$

于是有

$$\begin{aligned}e_{l,m,1}^{2}&=\frac{1}{4}(2(1-q)ad+2a^{2}d^{2}-8a^{2}d^{2}+2(1-q)a^{3}d^{3}+4a^{2}d^{2}-2(1-q)a^{3}d^{3})e_{l,m}\\&=\frac{1}{4}(2(1-q)ad-2a^{2}d^{2})e_{l,m}=e_{l,m,1},\end{aligned}$$

$$e_{l,m,2}^{2}=\frac{1}{64}(16a^{2}d^{2}-8(1-q)a^{3}d^{3})e_{l,m}=\frac{1}{8}(2a^{2}d^{2}+(q-1)a^{3}d^{3})e_{l,m}=e_{l,m,2}$$

以及 $e_{l,m,1}e_{l,m,2}=e_{l,m,2}e_{l,m,1}=0$,从而 $e_{l,m,3}^{2}=e_{l,m,3}$, $e_{l,m,i}e_{l,m,3}=e_{l,m,3}e_{l,m,i}=0$, $i=1,2$,显然还有 $e_{l,m}=e_{l,m,1}+e_{l,m,2}+e_{l,m,3}$。引理 7 证毕。

定理 1　下述集合是 $D(A_4(\omega))$ 的一个本原正交幂等元完全集:

$$\mathbf{E}_4=\{e_{l,m,i},e_{s,t,j}\mid 0\leqslant l,\ m,s,t\leqslant 3,\ l+m\text{ 为奇数},\ s+t\text{ 为偶数},\ 1\leqslant i\leqslant 3,\ 1\leqslant j\leqslant 2\}。$$

证明　由引理 2(1)和引理 4—7 知,$\mathbf{E}_4$ 是两两正交的非零幂等元且 $\sum_{e\in\mathbf{E}_4}e=1$,由引理 1 知 $D(A_4(\omega))$ 的本原正交幂等元完全集含有 40 个元素,而 $\mathbf{E}_4$ 恰好含有 40 个元素,故 $\mathbf{E}_4$ 是 $D(A_4(\omega))$ 的一个本原正交幂等元完全集。定理 1 证毕。

参考文献:

[1] DRINFELD V G. Hopf algebras and the quantum Yang-Baxter equation (Russian)[J]. Doklady Akademii Nauk SSSR, 1985, 283(5):1060-1064.

[2] TAFT E J. The order of the antipode of a finite-dimensional Hopf algebra[J]. Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, 1971, 68(11):2631-2633.

[3] HENNINGS M A. Invariants of links and 3-manifolds obtained from Hopf algebras[J]. Journal of London Mathematical Society, 1996, 54(3):594-624.

[4] 陈晨,高营营,陈惠香. 九维 Taft 代数上 lazy 2-上闭链[J]. 山东大学学报(理学版),2020,55(2):73-78.
CHEN Chen, GAO Yingying, CHEN Huixiang. The lazy 2-cocycles on the 9-dimensional Taft algebra[J]. Journal of Shandong University (Natural Science), 2017, 55(2):73-78.

[5] CHEN Huixiang. A class of noncommutative and noncocommutative Hopf algebras-the quantum version[J]. Communications in Algebra, 1999, 27(10):5011-5023.

[6] CHEN Huixiang. Irreducible representations of a class of quantum doubles[J]. Journal of Algebra, 2000, 225(1):391-409.

[7] CHEN Huixiang. Finite-dimensional representations of a quantum double[J]. Journal of Algebra, 2002, 251(2):751-789.

[8] CHEN Huixiang. Representations of a class of Drinfeld's doubles[J]. Communications in Algebra, 2005, 33(8):2809-2825.

[9] ZHANG Yun, WU Feng, LIU Ling, et al. Grothendieck groups of a class of quantum doubles[J]. Algebra Colloquium, 2008, 15(3):431-448.

[10] CHENHuixiang. The Green ring of Drinfeld double $D(H_4)$[J]. Algebras and Representation Theory, 2014, 17(5):1457-1483.

[11] LI Yunnan, HU Naihong. The Green rings of the 2-rank Taft algebras and its two relative twisted[J]. Journal of Algebra, 2014, 410(2):1-35.

(下转第 147 页)