山东大学学报(理学版)2025 年 12 月 第 60 卷 第 12 期
Journal of Shandong University(*Natural Science*), Vol.60, No.12, 2025 http://lxbwk.njournal.sdu.edu.cn

文章编号:1671-9352(2025)12-0121-09 DOI:10.6040/j.issn.1671-9352.0.2024.190

一类隐式脉冲分数阶微分方程三点边值问题

陈潇,周文学*,侯泽蓉
(兰州交通大学数理学院, 甘肃 兰州 730070)

摘要:研究一类半线性隐式脉冲 Conformable 分数阶微分方程三点边值问题解的存在性与唯一性。利用 Schaefer 不动点定理和 Banach 压缩映射原理分别得到分数阶微分方程解的存在性与唯一性的充分条件,并举例验证主要结论的适用性和可行性。
关键词:Conformable 分数阶导数;存在性与唯一性;脉冲;边值问题
中图分类号:O175 **文献标志码**:A
引用格式:陈潇,周文学,侯泽蓉. 一类隐式脉冲分数阶微分方程三点边值问题[J]. 山东大学学报(理学版),2025,60(12):121-129,141.

A class of three-point boundary value problems for implicit impulsive fractional differential equations

CHEN Xiao, ZHOU Wenxue*, HOU Zerong
(School of Mathematics and Physics, Lanzhou Jiaotong University, Lanzhou 730070, Gansu, China)

Abstract: In this paper, we study the existence and uniqueness of solutions for a class of semi-linear implicit impulsive Conformable fractional differential equations with three-point boundary value problems. We employ the Schaefer fixed point theorem and the Banach contraction mapping principle to derive sufficient conditions for the existence and uniqueness of solutions to the fractional differential equations, respectively. An example is given to verify the applicability and feasibility of the main conclusions.
Key words: Conformable fractional derivative; existence and uniqueness; impulsive; boundary value problem

0 引言

近年来,分数阶微分方程引起了国内外学者的广泛关注[1-4]。在许多连续的渐变过程中,由于扰动或外界影响,系统的状态在某些时刻会发生突变,这种现象称为脉冲效应。分数阶脉冲微分方程的研究意义体现在其对经典微分方程理论的拓展、对复杂系统新特性的揭示、为实际问题提供精准模型的能力,以及推动相关数学方法论创新等多个层面。这些理论成果与应用价值使其成为现代数学、物理、工程、生物、经济等多学科交叉研究的重要前沿课题[5-12]。Khalil 等[13]定义了 Conformable 分数阶导数和分数阶积分,它是一般导数的自然推广,并保留了 Riemann-Liouville 分数阶导数和 Caputo 分数阶导数所不具有的经典导数的基本性质。

Tate 等[14]研究了非局部条件下非线性隐式分数阶微分方程

$$\begin{cases} {}^cD^\alpha y(t)=f(t,y(t),{}^cD^\alpha y(t)), \quad t\in J=[0,T],\ T>0,\ 0<\alpha<1, \\ y(0)+g(y)=y_0 \end{cases}$$

解的存在唯一性,其中${}^cD^\alpha$ 是 Caputo 分数阶导数,$f\in C(J\times\mathbf{R}^2,\mathbf{R})$, $g:C(J,\mathbf{R})\to\mathbf{R}$ 是连续函数,y_0 是实常数。

收稿日期:2024-05-27; **网络出版时间**:2024-12-02 15:44:42
基金项目:国家自然科学基金资助项目(11961039)
第一作者:陈潇(1999—),女,硕士研究生,研究方向为分数阶微分方程的研究. E-mail:chxiao1005@126.com
***通信作者**:周文学(1976—),男,教授,博士,研究方向为非线性分析问题的研究. E-mail:wxzhou2006@126.com

Wan 等[15]研究了一类具有反周期边界条件的脉冲 Conformable 分数阶积分微分系统

$$\begin{cases} T_{t_k}^{\alpha}x(t)=f(t,x(t),Ax(t)), & t\in(t_k,t_{k+1}),\ k=0,1,\cdots,m,\\ \Delta x(t)|_{t=t_k}=P_k(x(t_k)), & k=1,2,\cdots,m,\\ \Delta x'(t)|_{t=t_k}=Q_k(x(t_k)), & k=1,2,\cdots,m,\\ x(0)=-x(1),\ T_0^{\beta}x(0)=-T_{t_m}^{\beta}x(1) \end{cases}$$

解的存在性与稳定性，其中 $1<\alpha\leqslant 2$，$0<\beta\leqslant 1$，$T_{t_k}^{\alpha}$ 是从 t_k 开始的 α 阶 Conformable 分数阶导数。

受以上工作的启发，本文利用 Schaefer 不动点理论和 Banach 压缩映射原理考虑如下一类半线性隐式脉冲 Conformable 分数阶微分方程三点边值问题

$$\begin{cases} T_{t_k}^{\alpha}x(t)=\lambda x(t)+f(t,x(t),T_{t_k}^{\alpha}x(t)),\\ \Delta x(t)|_{t=t_k}=P_k(x(t_k)),\ \Delta x'(t)|_{t=t_k}=Q_k(x(t_k)),\\ T_0^{\beta}x(0)+T_{t_m}^{\beta}x(1)=0,\ x(1)+\mu x'(\eta)=0 \end{cases} \tag{1}$$

解的存在性与唯一性，其中 $1<\alpha\leqslant 2$，$0<\beta\leqslant 1$，$\mu,\eta\in(0,1)$，$T_{t_k}^{\alpha}$ 是从 $t_k(k=0,1,2,\cdots,m)$ 开始的 α 阶 Conformable 分数阶导数，$J=[0,1]$，$0=t_0<t_1<t_2<\cdots<t_m<t_{m+1}=1$，$f\in C(J\times\mathbf{R}^2,\mathbf{R})$，$P_k,Q_k\in C(\mathbf{R},\mathbf{R})$，$k=1,2,\cdots,m$。$\Delta x(t)|_{t=t_k}=x(t_k^+)-x(t_k^-)$，$\Delta x'(t)|_{t=t_k}=x'(t_k^+)-x'(t_k^-)$。其中 $x(t_k^+)$，$x'(t_k^+)$ 和 $x(t_k^-)$，$x'(t_k^-)$ 分别表示 $x(t)$，$x'(t)$ 在 $t=t_k(k=1,2,\cdots,m)$ 时的右极限和左极限。

1 预备知识

记 $J_0=[0,t_1]$，$J_1=(t_1,t_2]$，$J_2=(t_2,t_3]$，$\cdots$，$J_{m-1}=(t_{m-1},t_m]$，$J_m=(t_m,1]$，$J'=J\backslash\{t_1,t_2,\cdots,t_m\}$，并且 $\omega=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant m+1}\{t_i-t_{i-1}\}$。设 $PC(J,\mathbf{R})=\{x:J\to\mathbf{R}\,|\,x\in C(J',\mathbf{R}),\ x(t_k^+)$ 和 $x(t_k^-)$ 存在，$x(t_k^-)=x(t_k)$，$k=1,2,\cdots,m\}$。并且具有范数 $\|x\|_{PC}=\sup\limits_{t\in J}|x(t)|$，则 $PC(J,\mathbf{R})$ 是 Banach 空间。

定义 1[13] 设 $\gamma\in(n,n+1]$，$u:[a,+\infty)\to\mathbf{R}$，对 $\forall t>a$，u 是 n 阶可微的，则 γ 阶函数 u 在 $t>a$ 处的 Conformable分数阶导数定义为

$$T_a^{\gamma}u(t)=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{u^{(n)}(t+\varepsilon(t-a)^{n+1-\gamma})-u^{(n)}(t)}{\varepsilon}。$$

注 1 给定 $\gamma\in(0,1]$，如果 u 是可微的，则 $T_a^{\gamma}u(t)=(t-a)^{1-\gamma}u'(t)$。若 $\gamma\in(n,n+1]$，$k=0,1,2,\cdots n$，则 $T_a^{\gamma}(t-a)^k=0$。

定义 2[16] 设 $\gamma\in(n,n+1]$，$u:[a,+\infty)\to\mathbf{R}$，则 γ 阶函数 u 在 $t>a$ 处的 Conformable 分数阶积分定义为

$$I_a^{\gamma}u(t)=\frac{1}{n!}\int_a^t(t-s)^n(s-a)^{\gamma-n-1}u(s)\mathrm{d}s。$$

引理 1[16] 设 $\gamma\in(n,n+1]$，$u:[a,+\infty)\to\mathbf{R}$ 使得 $u^{(n)}(t)$ 连续，则对所有的 $t>a$，

$$T_a^{\gamma}I_a^{\gamma}u(t)=u(t)。$$

引理 2[16] 设 $\gamma\in(n,n+1]$，$u:[a,+\infty)\to\mathbf{R}$ 对 $t>a$ 是 $(n+1)$ 次可微的，则对所有的 $t>a$，

$$I_a^{\gamma}T_a^{\gamma}u(t)=u(t)-\sum_{k=0}^{n}\frac{u^{(k)}(a)(t-a)^k}{k!}。$$

引理 3[17]（Schaefer 不动点定理） 若 E 是 Banach 空间，$Q:E\to E$ 是一个全连续算子，如果集合 $\Omega=\{u\in E:u=\rho Qu,\ 0<\rho\leqslant 1\}$ 有界，那么 Q 在 E 中存在不动点。

引理 4[18]（Banach 不动点定理） 设 X 是 Banach 空间 E 的非空闭凸子集，$S:X\to X$ 是压缩算子，则存在唯一的 $u^*\in X$，其中 $Su^*=u^*$。

引理 5[19]（Arzela-Ascoli 定理） 若 E 为 Banach 空间，C 是 E 的紧集，序列 $\{x_n\}$ 在 C 中一致有界且等度连续，则此序列在 C 中有一致连续子序列。

2　解的存在唯一性

引理 6　设 $y\in PC(J,\mathbf{R})$，$p_k,q_k\in\mathbf{R}$，且 $\eta\in(t_l,t_{l+1})$，l 为非负整数，$0\leqslant l\leqslant m$，则线性 Conformable 分数阶脉冲微分方程边值问题

$$\begin{cases}T_{t_k}^{\alpha}x(t)=y(t),\\ \Delta x(t)|_{t=t_k}=p_k,\ \Delta x'(t)|_{t=t_k}=q_k,\\ T_0^{\beta}x(0)+T_{t_m}^{\beta}x(1)=0,\ x(1)+\mu x'(\eta)=0\end{cases}\tag{2}$$

有唯一解

$$\begin{aligned}x(t)=&\sum_{i=1}^{m}G(t,t_i)q_i-\mu\sum_{i=1}^{l}q_i-\sum_{i=k+1}^{m}p_i+\sum_{i=1}^{m+1}\int_{t_{i-1}}^{t_i}G(t,s)(s-t_{i-1})^{\alpha-2}y(s)\mathrm{d}s\\&-\mu\sum_{i=1}^{l}\int_{t_{i-1}}^{t_i}(s-t_{i-1})^{\alpha-2}y(s)\mathrm{d}s-\mu\int_{t_l}^{\eta}(s-t_l)^{\alpha-2}y(s)\mathrm{d}s,\end{aligned}$$

其中格林函数 $G(t,s)$ 为

$$G(t,s)=\begin{cases}\mu, & 0\leqslant s\leqslant t\leqslant 1,\\ s+\mu-t, & 0\leqslant t\leqslant s\leqslant 1。\end{cases}$$

证明　假设 $x=x(t)$ 是问题(2)的解，对 $\forall\, t\in J_0$，存在常数 $c_{0,0},c_{0,1}\in\mathbf{R}$，

$$x(t)=\int_0^t(t-s)s^{\alpha-2}y(s)\mathrm{d}s+c_{0,0}+c_{0,1}t,\tag{3}$$

$$x'(t)=\int_0^t s^{\alpha-2}y(s)\mathrm{d}s+c_{0,1},\tag{4}$$

对 $\forall\, t\in J_1$，存在常数 $c_{1,0},c_{1,1}\in\mathbf{R}$，

$$x(t)=\int_{t_1}^t(t-s)(s-t_1)^{\alpha-2}y(s)\mathrm{d}s+c_{1,0}+c_{1,1}(t-t_1),\tag{5}$$

$$x'(t)=\int_{t_1}^t(s-t_1)^{\alpha-2}y(s)\mathrm{d}s+c_{1,1}。\tag{6}$$

根据式(3)—(6)，有

$$x(t_1^-)=\int_0^{t_1}(t_1-s)s^{\alpha-2}y(s)\mathrm{d}s+c_{0,0}+c_{0,1}t_1,$$

$$x(t_1^+)=c_{1,0},$$

$$x'(t_1^-)=\int_0^{t_1}s^{\alpha-2}y(s)\mathrm{d}s+c_{0,1},$$

$$x'(t_1^+)=c_{1,1}。$$

根据脉冲条件 $\Delta x(t)|_{t=t_1}=p_1$，$\Delta x'(t)|_{t=t_1}=q_1$，有

$$p_1=x(t_1^+)-x(t_1^-)=c_{1,0}-\int_0^{t_1}(t_1-s)s^{\alpha-2}y(s)\mathrm{d}s-c_{0,0}-c_{0,1}t_1,$$

$$q_1=x'(t_1^+)-x'(t_1^-)=c_{1,1}-\int_0^{t_1}s^{\alpha-2}y(s)\mathrm{d}s-c_{0,1},$$

则

$$c_{1,0}=p_1+\int_0^{t_1}(t_1-s)s^{\alpha-2}y(s)\mathrm{d}s+c_{0,0}+c_{0,1}t_1,$$

$$c_{1,1}=q_1+\int_0^{t_1}s^{\alpha-2}y(s)\mathrm{d}s+c_{0,1},$$

所以，对 $\forall\, t\in J_1$，

$$x(t)=\int_{t_1}^t(t-s)(s-t_1)^{\alpha-2}y(s)\mathrm{d}s+\int_0^{t_1}(t_1-s)s^{\alpha-2}y(s)\mathrm{d}s+c_{0,1}t_1+c_{0,0}+p_1+\left(\int_0^{t_1}s^{\alpha-2}y(s)\mathrm{d}s+c_{0,1}+q_1\right)(t-t_1)$$

$$=\int_{t_1}^{t}(t-s)(s-t_1)^{\alpha-2}y(s)\,\mathrm{d}s+\int_{0}^{t_1}(t-s)s^{\alpha-2}y(s)\,\mathrm{d}s+c_{0,1}t+c_{0,0}+p_1+q_1(t-t_1),$$

和

$$x'(t)=\int_{t_1}^{t}(s-t_1)^{\alpha-2}y(s)\,\mathrm{d}s+q_1+\int_{0}^{t_1}s^{\alpha-2}y(s)\,\mathrm{d}s+c_{0,1},$$

重复以上步骤,对任意 $t\in J_k$, $k=1,2,\cdots,m$,

$$x(t)=\int_{t_k}^{t}(t-s)(s-t_k)^{\alpha-2}y(s)\,\mathrm{d}s+\sum_{i=1}^{k}\int_{t_{i-1}}^{t_i}(t-s)(s-t_{i-1})^{\alpha-2}y(s)\,\mathrm{d}s+\sum_{i=1}^{k}p_i+\sum_{i=1}^{k}(t-t_i)q_i+c_{0,0}+c_{0,1}t,$$

$$x'(t)=\int_{t_k}^{t}(s-t_k)^{\alpha-2}y(s)\,\mathrm{d}s+\sum_{i=1}^{k}\int_{t_{i-1}}^{t_i}(s-t_{i-1})^{\alpha-2}y(s)\,\mathrm{d}s+\sum_{i=1}^{k}q_i+c_{0,1},$$

并且

$$T_{t_k}^{\beta}x(t)=(t-t_k)^{1-\beta}\left(\int_{t_k}^{t}(s-t_k)^{\alpha-2}y(s)\,\mathrm{d}s+\sum_{i=1}^{k}\int_{t_{i-1}}^{t_i}(s-t_{i-1})^{\alpha-2}y(s)\,\mathrm{d}s+\sum_{i=1}^{k}q_i+c_{0,1}\right)。$$

由边界条件 $T_0^{\beta}x(0)+T_{t_m}^{\beta}x(1)=0$, $x(1)+\mu x'(\eta)=0$,有

$$T_0^{\beta}x(0)=0,$$

$$T_{t_m}^{\beta}x(1)=(1-t_m)^{1-\beta}\left(\int_{t_m}^{1}(s-t_m)^{\alpha-2}y(s)\,\mathrm{d}s+\sum_{i=1}^{m}\int_{t_{i-1}}^{t_i}(s-t_{i-1})^{\alpha-2}y(s)\,\mathrm{d}s+\sum_{i=1}^{m}q_i+c_{0,1}\right),$$

则

$$c_{0,1}=-\sum_{i=1}^{m+1}\int_{t_{i-1}}^{t_i}(s-t_{i-1})^{\alpha-2}y(s)\,\mathrm{d}s-\sum_{i=1}^{m}q_i,$$

$$x(1)=\sum_{i=1}^{m+1}\int_{t_{i-1}}^{t_i}(1-s)(s-t_{i-1})^{\alpha-2}y(s)\,\mathrm{d}s+\sum_{i=1}^{m}p_i+\sum_{i=1}^{m}(1-t_i)q_i+c_{0,0}+c_{0,1},$$

$$x'(\eta)=\int_{t_l}^{\eta}(s-t_l)^{\alpha-2}y(s)\,\mathrm{d}s+\sum_{i=1}^{l}\int_{t_{i-1}}^{t_i}(s-t_{i-1})^{\alpha-2}y(s)\,\mathrm{d}s+\sum_{i=1}^{l}q_i+c_{0,1},$$

则

$$\begin{aligned}c_{0,0}=&-(\mu+1)c_{0,1}-\mu\int_{t_l}^{\eta}(s-t_l)^{\alpha-2}y(s)\,\mathrm{d}s-\mu\sum_{i=1}^{l}\int_{t_{i-1}}^{t_i}(s-t_{i-1})^{\alpha-2}y(s)\,\mathrm{d}s-\mu\sum_{i=1}^{l}q_i\\&-\sum_{i=1}^{m+1}\int_{t_{i-1}}^{t_i}(1-s)(s-t_{i-1})^{\alpha-2}y(s)\,\mathrm{d}s-\sum_{i=1}^{m}p_i-\sum_{i=1}^{m}(1-t_i)q_i,\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}c_{0,0}=&(1+\mu)\sum_{i=1}^{m+1}\int_{t_{i-1}}^{t_i}(s-t_{i-1})^{\alpha-2}y(s)\,\mathrm{d}s+(1+\mu)\sum_{i=1}^{m}q_i-\mu\int_{t_l}^{\eta}(s-t_l)^{\alpha-2}y(s)\,\mathrm{d}s\\&-\mu\sum_{i=1}^{l}\int_{t_{i-1}}^{t_i}(s-t_{i-1})^{\alpha-2}y(s)\,\mathrm{d}s-\mu\sum_{i=1}^{l}q_i-\sum_{i=1}^{m+1}\int_{t_{i-1}}^{t_i}(1-s)(s-t_{i-1})^{\alpha-2}y(s)\,\mathrm{d}s\\&-\sum_{i=1}^{m}p_i-\sum_{i=1}^{m}(1-t_i)q_i,\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}x(t)=&\int_{t_k}^{t}(t-s)(s-t_k)^{\alpha-2}y(s)\,\mathrm{d}s+\sum_{i=1}^{k}\int_{t_{i-1}}^{t_i}(t-s)(s-t_{i-1})^{\alpha-2}y(s)\,\mathrm{d}s+\sum_{i=1}^{k}p_i\\&+\sum_{i=1}^{k}(t-t_i)q_i-t\sum_{i=1}^{m+1}\int_{t_{i-1}}^{t_i}(s-t_{i-1})^{\alpha-2}y(s)\,\mathrm{d}s-\sum_{i=1}^{m}q_it-\sum_{i=1}^{m}p_i-\sum_{i=1}^{m}(1-t_i)q_i\\&+(1+\mu)\sum_{i=1}^{m+1}\int_{t_{i-1}}^{t_i}(s-t_{i-1})^{\alpha-2}y(s)\,\mathrm{d}s+(1+\mu)\sum_{i=1}^{m}q_i-\mu\int_{t_l}^{\eta}(s-t_l)^{\alpha-2}y(s)\,\mathrm{d}s\\&-\mu\sum_{i=1}^{l}\int_{t_{i-1}}^{t_i}(s-t_{i-1})^{\alpha-2}y(s)\,\mathrm{d}s-\mu\sum_{i=1}^{l}q_i-\sum_{i=1}^{m+1}\int_{t_{i-1}}^{t_i}(1-s)(s-t_{i-1})^{\alpha-2}y(s)\,\mathrm{d}s\\=&\sum_{i=1}^{m}G(t,t_i)q_i-\mu\sum_{i=1}^{l}q_i-\sum_{i=k+1}^{m}p_i+\sum_{i=1}^{m+1}\int_{t_{i-1}}^{t_i}G(t,s)(s-t_{i-1})^{\alpha-2}y(s)\,\mathrm{d}s\end{aligned}$$

$$-\mu\sum_{i=1}^{l}\int_{t_{i-1}}^{t_i}(s-t_{i-1})^{\alpha-2}y(s)\mathrm{d}s-\mu\int_{t_l}^{\eta}(s-t_l)^{\alpha-2}y(s)\mathrm{d}s。\tag{7}$$

证毕。

根据 $G(t,s)$ 的定义，容易证明，对所有的 $t,s\in[0,1]$，

$$|G(t,s)|\leqslant\mu+1。\tag{8}$$

为简便起见，记

$$T_{t_k}^{\alpha}x(t)=\sigma_x(t)。$$

定义算子 $\Lambda:PC(J,\mathbf{R})\to PC(J,\mathbf{R})$ 为

$$\begin{aligned}\Lambda x(t)=&\sum_{i=1}^{m}G(t,t_i)Q_i(x(t_i))-\mu\sum_{i=1}^{l}Q_i(x(t_i))-\sum_{i=k+1}^{m}P_i(x(t_i))\\&+\sum_{i=1}^{m+1}\int_{t_{i-1}}^{t_i}G(t,s)(s-t_{i-1})^{\alpha-2}[\lambda x(s)+f(s,x(s),\sigma_x(s))]\mathrm{d}s\\&-\mu\sum_{i=1}^{l}\int_{t_{i-1}}^{t_i}(s-t_{i-1})^{\alpha-2}[\lambda x(s)+f(s,x(s),\sigma_x(s))]\mathrm{d}s\\&-\mu\int_{t_l}^{\eta}(s-t_l)^{\alpha-2}[\lambda x(s)+f(s,x(s),\sigma_x(s))]\mathrm{d}s。\end{aligned}\tag{9}$$

边值问题有解转化为算子 Λ 存在不动点。

为方便起见，给予以下假设。

(H_1) 存在常数 $0<L<1$，使得对 $\forall u,\bar{u},v,\bar{v}\in\mathbf{R}$，$t\in J$，

$$|f(t,u,v)-f(t,\bar{u},\bar{v})|\leqslant L(|u-\bar{u}|+|v-\bar{v}|)；$$

(H_2) 存在常数 $a>0$，使得对 $\forall u,\bar{u}\in\mathbf{R}$，$|P_k(u)-P_k(\bar{u})|\leqslant a|u-\bar{u}|$，$k=1,2,\cdots,m$；

(H_3) 存在常数 $b>0$，使得对 $\forall u,\bar{u}\in\mathbf{R}$，$|Q_k(u)-Q_k(\bar{u})|\leqslant b|u-\bar{u}|$，$k=1,2,\cdots,m$；

(H_4) 存在函数 $M_f,N_f,H_f\in C(J,[0,+\infty))$，使得对 $t\in J$，$\forall x,u\in\mathbf{R}$，

$$|f(t,x(t),\sigma_u(t))|\leqslant M_f(t)+N_f(t)|x|+H_f(t)|\sigma_u|,$$

其中，$M^*=\sup\limits_{t\in J}M_f(t)$，$N^*=\sup\limits_{t\in J}N_f(t)$，$H^*=\sup\limits_{t\in J}H_f(t)<1$；

(H_5) 函数 $P_k:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 是连续的，并且存在常数 $A^*,B^*>0$，使得对 $\forall u\in\mathbf{R}$，

$$|P_k(u)|\leqslant A^*|u|+B^*,\quad k=1,2,\cdots,m；$$

(H_6) 函数 $Q_k:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 是连续的，并且存在常数 $F^*,G^*>0$，使得对 $\forall u\in\mathbf{R}$，

$$|Q_k(u)|\leqslant F^*|u|+G^*,\quad k=1,2,\cdots,m。$$

定理 1　假设(H_1)，(H_4)—(H_6)成立，那么边值问题(1)至少有一个解。

证明　通过 Schaefer 不动点定理，证明算子 Λ 至少有一个不动点，证明分以下 4 个步骤进行。

第一步：证明算子 Λ 是连续的。设序列 $\{x_n\}$，使得 $x_n\to x\in PC(J,\mathbf{R})$。则对每个 $t\in J$，

$$\begin{aligned}&|\Lambda(x_n)(t)-\Lambda(x)(t)|\\\leqslant&\sum_{i=1}^{m}|G(t,t_i)||Q_i(x_n(t_i))-Q_i(x(t_i))|+\mu\sum_{i=1}^{l}|Q_i(x_n(t_i))-Q_i(x(t_i))|\\&+\sum_{i=k+1}^{m}|P_i(x_n(t_i))-P_i(x(t_i))|+\sum_{i=1}^{m+1}\int_{t_{i-1}}^{t_i}|G(t,s)|(s-t_{i-1})^{\alpha-2}|\sigma_x^{(n)}(s)-\sigma_x(s)|\mathrm{d}s\\&+\mu\sum_{i=1}^{l}\int_{t_{i-1}}^{t_i}(s-t_{i-1})^{\alpha-2}|\sigma_x^{(n)}(s)-\sigma_x(s)|\mathrm{d}s+\mu\int_{t_l}^{\eta}(s-t_l)^{\alpha-2}|\sigma_x^{(n)}(s)-\sigma_x(s)|\mathrm{d}s,\end{aligned}\tag{10}$$

其中，$\sigma_x^{(n)}(t)=\lambda x_n(t)+f(t,x_n(t),\sigma_x^{(n)}(t))$，$\sigma_x(t)=\lambda x(t)+f(t,x(t),\sigma_x(t))$。

根据条件(H_1)，有

$$\begin{aligned}|\sigma_x^{(n)}(t)-\sigma_x(t)|&=|\lambda(x_n(t)-x(t))+f(t,x_n(t),\sigma_x^{(n)}(t))-f(t,x(t),\sigma_x(t))|\\&\leqslant\lambda|x_n(t)-x(t)|+L(|x_n(t)-x(t)|+|\sigma_x^{(n)}(t)-\sigma_x(t)|),\end{aligned}$$

因此，

$$|\sigma_x^{(n)}(t)-\sigma_x(t)|\leqslant\frac{\lambda+L}{1-L}|x_n(t)-x(t)|。$$

由于 $x_n\to x$,因此对每个 $t\in J$,有 $\sigma_x^{(n)}(t)\to\sigma_x(t)$, $n\to\infty$。应用 Lebesgue 控制收敛定理,当 $n\to\infty$ 时,式(10)的右侧趋于 0。因此,有

$$|\Lambda(x_n)(t)-\Lambda(x)(t)|\to 0,\quad n\to\infty,$$

则算子 Λ 是连续的。

第二步:证明算子 Λ 将有界集映为有界集。需要证明,对任意 $r^*>0$,存在一个正常数 ρ,使得对每个 $x\in\Omega=\{x\in PC(J,\mathbf{R}):\|x\|_{PC}\leqslant r^*\}$,有 $\|\Lambda(x)\|_{PC}\leqslant\rho$。因此,对每个 $t\in J$,

$$\begin{aligned}\Lambda(x)(t)=&\sum_{i=1}^{m}G(t,t_i)Q_i(x(t_i))-\mu\sum_{i=1}^{l}Q_i(x(t_i))-\sum_{i=k+1}^{m}P_i(x(t_i))-\mu\sum_{i=1}^{l}\int_{t_{i-1}}^{t_i}(s-t_{i-1})^{\alpha-2}\sigma_x(s)\mathrm{d}s\\&+\sum_{i=1}^{m+1}\int_{t_{i-1}}^{t_i}G(t,s)(s-t_{i-1})^{\alpha-2}\sigma_x(s)\mathrm{d}s-\mu\int_{t_l}^{\eta}(s-t_l)^{\alpha-2}\sigma_x(s)\mathrm{d}s,\end{aligned}\tag{11}$$

利用(H_4),对每个 $t\in J$,

$$\begin{aligned}|\sigma_x(t)|&=|\lambda x(t)+f(t,x(t),\sigma_x(t))|\\&\leqslant\lambda|x(t)|+|f(t,x(t),\sigma_x(t))|\\&\leqslant(\lambda+N^*)r^*+M^*+H^*|\sigma_x(t)|,\end{aligned}$$

即

$$|\sigma_x(t)|\leqslant\frac{(\lambda+N^*)}{1-H^*}r^*+\frac{M^*}{1-H^*}:=\Phi,\tag{12}$$

将式(12)代入式(11),得

$$\begin{aligned}|\Lambda(x)(t)|\leqslant&\sum_{i=1}^{m}|G(t,t_i)||Q_i(x(t_i))|+\mu\sum_{i=1}^{l}|Q_i(x(t_i))|+\sum_{i=k+1}^{m}|P_i(x(t_i))|\\&+\sum_{i=1}^{m+1}\int_{t_{i-1}}^{t_i}|G(t,s)|(s-t_{i-1})^{\alpha-2}|\sigma_x(s)|\mathrm{d}s+\mu\int_{t_l}^{\eta}(s-t_l)^{\alpha-2}|\sigma_x(s)|\mathrm{d}s\\&+\mu\sum_{i=1}^{l}\int_{t_{i-1}}^{t_i}(s-t_{i-1})^{\alpha-2}|\sigma_x(s)|\mathrm{d}s,\end{aligned}$$

因此,

$$\begin{aligned}&\|\Lambda(x)\|_{PC}\\&\leqslant\frac{(m+1)(\mu+1)+\mu l+\mu}{\alpha-1}\Phi\omega^{\alpha-1}+[m(\mu+1)F^*+\mu lF^*+mA^*]r^*+m(\mu+1)G^*+\mu lG^*+mB^*=\rho。\end{aligned}$$

第三步:证明算子 Λ 是等度连续的。任取 $\tau_1,\tau_2\in J_k$, $k=0,1,\cdots,m$, $\tau_1<\tau_2$,并如第二步中所述,令 Ω 是 $PC(J,\mathbf{R})$ 的有界集,则对于 $x\in\Omega$,

$$\begin{aligned}&|\Lambda(x)(\tau_2)-\Lambda(x)(\tau_1)|\\&\leqslant\sum_{i=1}^{m}|G(\tau_2,t_i)-G(\tau_1,t_i)||Q_i(x(t_i))|+\sum_{i=1}^{m+1}\int_{t_{i-1}}^{t_i}|G(\tau_2,s)-G(\tau_1,s)|(s-t_{i-1})^{\alpha-2}|\sigma_x(s)|\mathrm{d}s,\end{aligned}$$

利用不等式(12)和假设(H_6),有

$$|\Lambda(x)(\tau_2)-\Lambda(x)(\tau_1)|\leqslant(\tau_2-\tau_1)\frac{m(F^*r^*+G^*)(\alpha-1)+(m+1)\Phi\omega^{\alpha-1}}{\alpha-1},\tag{13}$$

当 $\tau_1\to\tau_2$ 时,不等式(13)的右侧趋于 0,即

$$|\Lambda(x)(\tau_2)-\Lambda(x)(\tau_1)|\to 0,$$

即算子 Λ 在 $\Lambda(\Omega)$ 上等度连续。

通过步骤一到步骤三的结果,并且结合 Arzela-Ascoli 定理可知算子 Λ 是紧的,所以算子 Λ 是全连续的。

第四步:证明集合 $\Omega=\{x\in PC(J,\mathbf{R}):x=\theta\Lambda x,\ 0<\theta<1\}$ 是有界的。令 $x\in\Omega$,对 $0<\theta<1$,则 $x=\theta\Lambda x$,对每个 $t\in J$,

$$x(t)=\theta\sum_{i=1}^{m}G(t,t_i)Q_i(x(t_i))-\theta\mu\sum_{i=1}^{l}Q_i(x(t_i))-\theta\sum_{i=k+1}^{m}P_i(x(t_i))-\theta\mu\int_{t_l}^{\eta}(s-t_l)^{\alpha-2}\sigma_x(s)\mathrm{d}s$$
$$+\theta\sum_{i=1}^{m+1}\int_{t_{i-1}}^{t_i}G(t,s)(s-t_{i-1})^{\alpha-2}\sigma_x(s)\mathrm{d}s-\theta\mu\sum_{i=1}^{l}\int_{t_{i-1}}^{t_i}(s-t_{i-1})^{\alpha-2}\sigma_x(s)\mathrm{d}s,$$

利用不等式(12)和假设(H_4)—(H_6),有

$$|x(t)|\leqslant\frac{(m+1)(\mu+1)+\mu(l+1)}{\alpha-1}\theta\Phi\omega^{\alpha-1}+[\theta(m\mu+m+\mu l)F^*+\theta mA^*]|x(t)|$$
$$+\theta(m\mu+m+\mu l)G^*+\theta mB^*,$$

取上述不等式两边的上确界,简便起见,记

$$\vartheta=\theta(m\mu+m+\mu l)F^*+\theta mA^*,$$
$$\Pi=\frac{(m+1)(\mu+1)+\mu(l+1)}{\alpha-1}\theta\Phi\omega^{\alpha-1}+\theta(m\mu+m+\mu l)G^*+\theta mB^*,$$

得到

$$\|x\|_{PC}\leqslant\vartheta\|x\|_{PC}+\Pi,$$

故此有

$$\|x\|_{PC}\leqslant\frac{\Pi}{1-\vartheta}。\tag{14}$$

这意味着集合 Ω 是有界的,因此根据 Schaefer 不动点定理,可知算子 Λ 至少有一个不动点,即边值问题(1)至少存在一个解。

定理 2　假设条件(H_1)—(H_3)成立,若不等式

$$\Theta_1=\frac{[(m+1)(\mu+1)+\mu l+\mu](\lambda+L)\omega^{\alpha-1}}{(\alpha-1)(1-L)}+am+b(m\mu+m+\mu l)<1$$

成立,则边值问题(1)有唯一解。

证明　对 $\forall x,\bar{x}\in PC(J,\mathbf{R})$ 并且对每个 $t\in J$,考虑

$$\begin{aligned}&|\Lambda x(t)-\Lambda\bar{x}(t)|\\&\leqslant\sum_{i=1}^{m}|G(t,t_i)||Q_i(x(t_i))-Q_i(\bar{x}(t_i))|+\mu\sum_{i=1}^{l}|Q_i(x(t_i))-Q_i(\bar{x}(t_i))|\\&\quad+\sum_{i=k+1}^{m}|P_i(x(t_i))-P_i(\bar{x}(t_i))|+\sum_{i=1}^{m+1}\int_{t_{i-1}}^{t_i}|G(t,s)|(s-t_{i-1})^{\alpha-2}|\sigma_x(s)-\sigma_{\bar{x}}(s)|\mathrm{d}s\\&\quad+\mu\sum_{i=1}^{l}\int_{t_{i-1}}^{t_i}(s-t_{i-1})^{\alpha-2}|\sigma_x(s)-\sigma_{\bar{x}}(s)|\mathrm{d}s+\mu\int_{t_l}^{\eta}(s-t_l)^{\alpha-2}|\sigma_x(s)-\sigma_{\bar{x}}(s)|\mathrm{d}s,\end{aligned}\tag{15}$$

其中 $T_{t_k}^{\alpha}x(t)=\sigma_x(t)$,则 $\sigma_x(t)=\lambda x(t)+f(t,x(t),\sigma_x(t))$。

根据条件(H_1),有

$$\begin{aligned}&|\sigma_x(t)-\sigma_{\bar{x}}(t)|\\&=|\lambda(x(t)-\bar{x}(t))+(f(t,x(t),\sigma_x(t))-f(t,\bar{x}(t),\sigma_{\bar{x}}(t)))|\\&\leqslant\lambda|x(t)-\bar{x}(t)|+L[|x(t)-\bar{x}(t)|+|\sigma_x(t)-\sigma_{\bar{x}}(t)|],\end{aligned}$$

则

$$|\sigma_x(t)-\sigma_{\bar{x}}(t)|\leqslant\frac{\lambda+L}{1-L}|x(t)-\bar{x}(t)|。\tag{16}$$

利用式(16), $k\leqslant m$, $0\leqslant t\leqslant1$,对式(15)两边取上确界,有

$$\begin{aligned}&\|\Lambda(x)-\Lambda(\bar{x})\|\\&\leqslant\left\{\frac{[(m+1)(\mu+1)+\mu l+\mu](\lambda+L)\omega^{\alpha-1}}{(\alpha-1)(1-L)}+am+b(m\mu+m+\mu l)\right\}\|x-\bar{x}\|,\end{aligned}\tag{17}$$

即

$$\|\Lambda(x)-\Lambda(\bar{x})\|\leqslant\Theta_1\|x-\bar{x}\|。$$

故由 Banach 压缩映射原理可知 Λ 是压缩的，并且有唯一不动点，即边值问题(1)有唯一解。

3 例子

下面举例说明主要结论的合理性。

例 1 考虑边值问题

$$\begin{cases} T_{t_k}^{\frac{3}{2}}x(t)=\dfrac{x(t)}{100(e-1)}+\dfrac{x(t)}{20(1+t)}+\dfrac{\sin\left|T_{t_k}^{\frac{3}{2}}x(t)\right|}{20+t^2}, \quad t\in(t_k,t_{k+1}),\ k=0,1,2, \\ \Delta x(t)|_{t=\frac{2}{3}}=\dfrac{\left|x\left(\frac{2}{3}\right)\right|}{30+\left|x\left(\frac{2}{3}\right)\right|},\ \Delta x'(t)|_{t=\frac{2}{3}}=\dfrac{\left|x\left(\frac{2}{3}\right)\right|}{20+\left|x\left(\frac{2}{3}\right)\right|}, \\ T_0^{\beta}x(0)+T_{\frac{2}{3}}^{\beta}x(1)=0,\ x(1)+\dfrac{1}{3}x'\left(\dfrac{1}{3}\right)=0, \end{cases} \tag{18}$$

其中

$$\alpha=\frac{3}{2},\quad \mu=\frac{1}{3},\quad \eta=\frac{1}{3},\quad m=2,\quad t_1=\frac{1}{3},\quad t_2=\frac{2}{3},\quad \omega=\frac{1}{3},\quad l=1,\quad \lambda=\frac{1}{100(e-1)},$$

$$f(t,u,v)=\frac{u(t)}{20(1+t)}+\frac{\sin v(t)}{20+t^2},$$

显然 f 是连续函数。

对任意 $u,\bar{u},v,\bar{v}\in\mathbf{R}$，有

$$|f(t,u,v)-f(t,\bar{u},\bar{v})|\leqslant\frac{1}{20}(|u(t)-\bar{u}(t)|+|v(t)-\bar{v}(t)|),$$

因此满足(H_1)，其中 $L=\dfrac{1}{20}$。

对任意 $u,v\in\mathbf{R}$，有

$$|f(t,u,v)|\leqslant\frac{t}{2}+\frac{|u(t)|}{20(1+t)}+\frac{|v(t)|}{20+t^2},$$

其中

$$M_f(t)=\frac{t}{2},\quad N_f(t)=\frac{1}{20(1+t)},\quad H_f(t)=\frac{1}{20+t^2},$$

故 $M^*=\sup\limits_{t\in J}M_f(t)=\dfrac{1}{2}$，$N^*=\sup\limits_{t\in J}N_f(t)=\dfrac{1}{20}$，$H^*=\sup\limits_{t\in J}H_f(t)=\dfrac{1}{20}<1$，因此满足假设($H_4$)。

令

$$P\left(x\left(\frac{2}{3}\right)\right)=\frac{\left|x\left(\frac{2}{3}\right)\right|}{30+\left|x\left(\frac{2}{3}\right)\right|},\quad Q\left(x\left(\frac{2}{3}\right)\right)=\frac{\left|x\left(\frac{2}{3}\right)\right|}{20+\left|x\left(\frac{2}{3}\right)\right|}。$$

对任意 $x\in PC(J,\mathbf{R})$，有

$$\left|P\left(x\left(\frac{2}{3}\right)\right)\right|\leqslant\frac{1}{30}|x|+1,\quad \left|Q\left(x\left(\frac{2}{3}\right)\right)\right|\leqslant\frac{1}{20}|x|+1,$$

其中，$A^*=\dfrac{1}{30}$，$B^*=1$，$F^*=\dfrac{1}{20}$，$G^*=1$，得到满足假设(H_5)、(H_6)，因此，由定理 1 可以得出边值问题(18)至少有一个解。

对于(H_2)、(H_3)，有

$$|P(x)-P(\bar{x})| = \left|\frac{|x|}{30+|x|}-\frac{|\bar{x}|}{30+|\bar{x}|}\right| \leqslant \frac{1}{30}|x-\bar{x}|,$$

$$|Q(x)-Q(\bar{x})| = \left|\frac{|x|}{20+|x|}-\frac{|\bar{x}|}{20+|\bar{x}|}\right| \leqslant \frac{1}{20}|x-\bar{x}|。$$

故

$$a=\frac{1}{30},\quad b=\frac{1}{20}。$$

显然满足假设(H_1)—(H_3)。

又因为

$$\Theta_1=\frac{[(m+1)(\mu+1)+\mu l+\mu](\lambda+L)\omega^{\alpha-1}}{(\alpha-1)(1-L)}+am+b(m\mu+m+\mu l)\approx 0.533\,29<1,$$

所以由定理 2 可以得出边值问题(18)有唯一解。

4　结论

本文研究了一类半线性隐式脉冲 Conformable 分数阶微分方程三点边值问题解的存在性与唯一性。在定理 1 中,利用 Schaefer 不动点定理得到了给定问题至少有一个解的充分条件。在定理 2 中,利用 Banach 压缩映射原理得到了给定问题有唯一解的充分条件。最后给出了实例验证了主要结论的合理性与适用性。

参考文献:

[1] 于鹏艳,侯成敏. 一类带有 Slit-strips 型积分边值条件的分数阶微分方程及微分包含解的存在性[J]. 黑龙江大学自然科学学报,2022,39(1):8-17.
YU Pengyan, HOU Chengmin. The existence of solutions for a class of fractional differential equations and inclusions with Slit-strips type integral boundary conditions[J]. Journal of Natural Science of Heilongjiang University, 2022, 39(1):8-17.

[2] 邬忆萱,寇春海. 一类分数阶时滞微分系统的精确解及 Hyers-Ulam 稳定性[J]. 东华大学学报(自然科学版),2024,50(1):152-162.
WU Yixuan, KOU Chunhai. Exact solution and Hyers-Ulam stability of a class of fractional delay differential systems[J]. Journal of Donghua University (Natural Science), 2024, 50(1):152-162.

[3] BOUAOUID M, HILAL K, HANNABOU M. Integral solutions of nondense impulsive conformable-fractional differential equations with nonlocal condition[J]. Journal of Applied Analysis, 2021, 27(2):187-197.

[4] ABDELJAWAD T. On conformable fractional calculus[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2015, 279:57-66.

[5] 吴亚斌,周文学,宋学瑶. 带 p-Laplacian 算子的半线性分数阶脉冲微分方程解的存在性与唯一性[J]. 云南大学学报(自然科学版),2023,45(1):9-17.
WU Yabin, ZHOU Wenxue, SONG Xueyao. Existence and uniqueness of solutions for semi-linear fractional impulsive differential equation with p-Laplacian operator[J]. Journal of Yunnan University (Natural Sciences Edition), 2023, 45(1):9-17.

[6] 王佳丽,彭田,胡卫敏. 分数阶 p-Laplacian 脉冲微分方程边值问题解的存在性与唯一性[J]. 数学的实践与认识,2021,51(14):284-292.
WANG Jiali, PENG Tian, HU Weimin. The existence and uniqueness of solutions for the boundary value problem of fractional impulsive difference equation with p-Laplacian operator[J]. Mathematics in Practice and Theory, 2021, 51(14):284-292.

[7] TREANBUCHA C, SUDSUTAD W. Stability analysis of boundary value problems for Caputo proportional fractional derivative of a function with respect to another function via impulsive Langevin equation[J]. AIMS Mathematics, 2021, 6(7):6647-6686.

[8] ASAWASAMRIT S, NTOUYAS S K, THIRAMANUS P, et al. Periodic boundary value problems for impulsive conformable fractional integro-differential equations[J]. Boundary Value Problems, 2016(1):122.

[9] AGARWAL R, HRISTOVA S, O′REGAN D. Mittag-Leffler stability for impulsive Caputo fractional differential equations[J]. Differential Equations and Dynamical Systems, 2021, 29(3):689-705.

[10] LIANG J, MU Y Y, XIAO T J. Impulsive differential equations involving general conformable fractional derivative in Banach spaces[J]. Revista de La Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Serie A. Matemáticas, 2022, 116(3):114.

(下转第 141 页)