山东大学学报(理学版)2025年12月 第60卷 第12期
Journal of Shandong University(*Natural Science*), Vol.60, No.12, 2025 http://lxbwk.njournal.sdu.edu.cn

文章编号:1671-9352(2025)12-0167-06 DOI:10.6040/j.issn.1671-9352.0.2024.094

路的半强积与强积的距离染色

田双亮,陈萍

(1.西北民族大学数学与计算机科学学院, 甘肃 兰州 730030; 2.西北民族大学管理学院, 甘肃 兰州 730030)

摘要:图 G 的 k-距离染色是指 G 中距离不超过 k 的顶点分配不同颜色的顶点染色,其中 $k\in\mathbf{N}^+$。G 的 k-距离色数是指 G 的 k-距离染色所用最少的颜色数,记为 $\chi_k(G)$。2 个简单图 G 与 H 的半强积 $G\cdot H$ 是具有顶点集 $V(G)\times V(H)$ 的简单图,其中 2 个顶点 (u,v) 与 (u',v') 相邻当且仅当 $uu'\in E(G)$ 且 $vv'\in E(H)$,或 $u=u'$ 且 $vv'\in E(H)$。2 个简单图 G 与 H 的强积 $G\boxtimes H$ 是具有顶点集 $V(G)\times V(H)$ 的简单图,其中 2 个顶点 (u,v) 与 (u',v') 相邻当且仅当 $uu'\in E(G)$ 且 $vv'\in E(H)$,或 $u=u'$ 且 $vv'\in E(H)$,或 $v=v'$ 且 $uu'\in E(G)$。对任意整数 $k\geqslant 2$,得到了 2 个路的半强积与强积的 k-距离色数。

关键词:路;半强积;强积;距离染色;距离色数

中图分类号:O157 **文献标志码**:A

引用格式:田双亮,陈萍. 路的半强积与强积的距离染色[J]. 山东大学学报(理学版),2025,60(12):167-172.

Distance colorings of the semistrong product and the strong product of paths

TIAN Shuangliang, CHEN Ping

(1. College of Mathematics and Computer Science, Northwest Minzu University, Lanzhou 730030, Gansu, China; 2. College of Management, Northwest Minzu University, Lanzhou 730030, Gansu, China)

Abstract: A k-distance coloring of a graph G is a vertex coloring of G such that no two vertices lying at distance less than or equal to k in G are assigned the same color. The k-distance chromatic number of G, denoted $\chi_k(G)$, is the minimum number of colors needed for a k-distance coloring of G. The semistrong product of simple graphs G and H is the graph $G\cdot H$ with vertex set $V(G)\times V(H)$, in which (u,v) is adjacent to (u',v') if and only if either $uu'\in E(G)$ and $vv'\in E(H)$ or $u=u'$ and $vv'\in E(H)$. The strong product of simple graphs G and H is the graph $G\boxtimes H$ with vertex set $V(G)\times V(H)$, in which (u,v) is adjacent to (u',v') if and only if $uu'\in E(G)$ and $vv'\in E(H)$, or $u=u'$ and $vv'\in E(H)$, or $v=v'$ and $uu'\in E(G)$. In this paper, for any integer $k\geqslant 2$, the k-distance chromatic numbers of the semistrong product and the strong product of two paths are obtained.

Key words: path; semistrong product; strong product; distance coloring; distance chromatic number

0 引言

本文所考虑的图 G 都是有限无向的简单连通图,用 $V(G)$ 与 $E(G)$ 分别表示 G 的顶点集和边集。用 $\Delta(G)$ 表示 G 的最大度,用 $d(u,v)$ 表示 G 中顶点 u 和 v 之间的距离。记 $(x)_k=x(\mathrm{mod}\ k)$,其中 $x\in\mathbf{Z}$, $k\in\mathbf{N}^+$。文中未说明的符号和术语见文献[1]。

图的距离染色是由 Kramer 等[2-3]提出的,它在信道分配、寄存器分配、稀疏雅可比矩阵和 Hessian 矩阵高效计算等方面都有重要的应用[4-6]。图 G 的 k-距离染色是指 G 中距离不超过 k 的顶点分配不同的颜色的顶点染色。称 G 的 k-距离染色所用最少的颜色数为 G 的 k-距离色数,并记为 $\chi_k(G)$。显然,当 $k=1$ 时,$\chi_1(G)$ 表示 G 的色数,也记为 $\chi(G)$。文献[2-3]还给出了图 G 的 k-距离色数与色数之间的关系:$\chi_k(G)=\chi(G^k)$,其中 G^k 是通过连接 G 中距离不超过 k 的顶点得到的图,称它为 G 的 k 次方图。

收稿日期:2024-03-20; **网络出版时间**:2025-06-11 11:08:53

基金项目:西北民族大学科研创新团队计划资助项目

第一作者:田双亮(1965—),男,教授,研究方向为图论及组合优化. E-mail:sl_tian@163.com

Miao 等[7]给出了最大度为 Δ 的图 G 的 k-距离色数的一个可达上界：$\chi_k(G)\leqslant\Delta\dfrac{(\Delta-1)^k-1}{\Delta-2}$。Shaheen 等[8]得到了某些类型广义 Petersen 图 $P(n,k)$ 的色数与 2-距离色数，其中 $k=1,2,3$，$n\geqslant3$。Fertin 等[9]确定了平方格（即 2 个路的笛卡尔积[1]）$P_m\square P_n$ 在 m,n 充分大情况下的 k-距离色数。Jacko 等[10]给出了六角形格的 k-距离色数，其中六角形格是由平方格删去特定的一些边得到的。Kim 等[11]研究了路和圈与两个圈的直积[12]的 2-距离染色，得到了顶点数足够多条件下相应的距离色数。本文主要研究路的半强积[12]与强积[12]的 k-距离染色，其中 $k\in\mathbf{Z}$ 且 $k\geqslant2$。

2 个简单图 G 与 H 的半强积 $G\cdot H$ 是具有顶点集 $V(G)\times V(H)$ 的简单图，其中 2 个顶点 (u,v) 与 (u',v') 相邻当且仅当 $uu'\in E(G)$ 且 $vv'\in E(H)$，或 $u=u'$ 且 $vv'\in E(H)$。2 个简单图 G 与 H 的强积 $G\boxtimes H$ 是具有顶点集 $V(G)\times V(H)$ 的简单图，其中 2 个顶点 (u,v) 与 (u',v') 相邻当且仅当 $uu'\in E(G)$ 且 $vv'\in E(H)$，或 $u=u'$ 且 $vv'\in E(H)$，或 $v=v'$ 且 $uu'\in E(G)$。

由图的半强积的定义可知，若 $\Delta(G)\neq\Delta(H)$，则 $\Delta(G\cdot H)\neq\Delta(H\cdot G)$，于是，$G\cdot H\ncong H\cdot G$，即图的半强积作为图的运算不具有交换律。另外，即使满足 $\Delta(G)=\Delta(H)$，也未必有 $G\cdot H\cong H\cdot G$ 成立。例如，对任意 2 个不同的整数 $n,m\geqslant4$，2 个路 P_m 与 P_n 的半强积不具有交换律，因为 $P_m\cdot P_n$ 与 $P_n\cdot P_m$ 的3度点的个数分别为 $2(m-2)$ 与 $2(n-2)$。由图的强积的定义可知，图的强积具有交换律，即 $G\boxtimes H\cong H\boxtimes G$。

1 主要结果及其证明

设 $P_m=u_0,u_1,\cdots,u_{m-1}$ 与 $P_n=v_0,v_1,\cdots,v_{n-1}$ 分别为 m 阶与 n 阶的路，其中 $m,n\geqslant2$。为叙述方便，将 $V(P_m)\times V(P_n)$ 中的顶点 (u_y,v_x) 记为 (x,y)，其中 $x=0,1,\cdots,n-1$，$y=0,1,\cdots,m-1$。设 $w=(x,y)$，$w'=(x\pm s,y\pm t)$ 为 $V(P_m)\times V(P_n)$ 中两个顶点，其中 s,t 为非负整数。易知，在 $P_m\cdot P_n$ 中，当 $t\leqslant s$ 时，$d(w,w')=s$；当 $t>s$ 且 $s+t$ 为偶数时，$d(w,w')=t$；当 $t>s$ 且 $s+t$ 为奇数时，$d(w,w')=t+1$。在 $P_m\boxtimes P_n$ 中，$d(w,w')=\max\{s,t\}$。

为研究 2 个路的半强积的 k-距离染色，首先给出以下引理。

引理 1 对任意不小于 2 的偶数 k 与奇数 l，有 $\chi_k(P_{k+1}\cdot P_l)\geqslant k\{\min\{l,k+1\}\}+1$。

证明 记 $\lambda=\min\{l,k+1\}$。显然，λ 为奇数。在 $P_{k+1}\cdot P_l$ 中，取 2 个顶点子集

$$B_1=\{(x,y)\mid x=0,1,\cdots,\lambda-1,\ y=0,1,\cdots,k-1\},$$

$$B_2=\{(x,y)\mid x=0,1,\cdots,\lambda-1,\ y=1,2,\cdots,k\},$$

并记 $X=B_2-B_1$，$Y=B_1-B_2$。显然，$|B_1|=|B_2|=\lambda k$，$|B_1\cap B_2|=\lambda(k-1)$，且 $|X|=|Y|=\lambda$。用 H 表示具有二分类 (X,Y) 的二部图，其中 X 中顶点与 Y 中顶点相邻当且仅当它们在 $P_{k+1}\cdot P_l$ 中的距离超过 k。

容易证明，B_i 中任意 2 个顶点之间的距离不超过 k，其中 $i=1,2$。事实上，任取 B_i 的 2 个顶点 w 与 w'，并假设 $w=(x,y)$，$w'=(x\pm s,y\pm t)$，其中 s,t 是不超过 $P_{k+1}\cdot P_l$ 直径的非负整数。显然，$s\leqslant\lambda-1$，$t\leqslant k-1$。当 $t\leqslant s$时，$d(w,w')=s\leqslant\lambda-1\leqslant k$；当 $t>s$ 且 $t+s$ 为偶数时，$d(w,w')=t\leqslant k-1<k$；当 $t>s$ 且 $t+s$ 为奇数时，$d(w,w')=t+1\leqslant k$。

现在用反证法证明$\chi_k(P_{k+1}\cdot P_l)\geqslant\lambda k+1$。假设$\chi_k(P_{k+1}\cdot P_l)\leqslant\lambda k$，并设 σ 是 $P_{k+1}\cdot P_l$ 的一个 k-距离染色，所用颜色数为 λk。用 $C_\sigma(S)$ 表示顶点子集 S 中顶点在染色 σ 下所染颜色的集合。显然，$|C_\sigma(B_1)|=|C_\sigma(B_2)|=\lambda k$，$|C_\sigma(B_1\cap B_2)|=\lambda(k-1)$。注意到，$C_\sigma(B_1)=C_\sigma(B_2)$，以及 $C_\sigma(X)=C_\sigma(B_2)-C_\sigma(B_1\cap B_2)$，$C_\sigma(Y)=C_\sigma(B_1)-C_\sigma(B_1\cap B_2)$，所以，$C_\sigma(X)=C_\sigma(Y)$，且 $|C_\sigma(X)|=|X|$，$|C_\sigma(Y)|=|Y|$。因此，X 中不同顶点染不同的颜色，且对 X 中每一顶点，Y 中均存在唯一与该顶点染相同颜色的顶点，即这 2 个顶点在 $P_{k+1}\cdot P_l$ 中的距离超过 k，所以它们在 H 中是相邻的。这意味着，H 中存在完美匹配。另一方面，设

$$S=\left\{(2i,k)\mid i=0,1,\cdots,\frac{\lambda-1}{2}\right\},\quad T=\left\{(2j,0)\mid j=0,1,\cdots,\frac{\lambda-1}{2}\right\}。$$

显然，$S\subseteq X$，$T\subseteq Y$，且 $|S|=|T|=\dfrac{\lambda+1}{2}$。可以证明，$S$ 中顶点与 T 中顶点之间的距离均不超过 k。事实上，任取 2 个顶点 $w=(2i,k)\in S$，$w'=(2j,0)\in T$。不妨假设，$2i=2j\pm s$，$t=k$，其中 s 为不超过 $P_{k+1}\cdot P_l$ 直径的非负偶数。显然，$s\leqslant\lambda-1\leqslant k$。当 $s=k$ 即 $t=s$ 时，$d(w,w')=s=k$。当 $s<k$ 即 $t>s$ 时，因 $t+s$ 为偶数，所以 $d(w,w')=t=k$。

因 S 中顶点与 T 中顶点之间的距离均不超过 k,所以在 H 中,S 的顶点在 Y 中邻点构成的集合 $N_H(S)$ 是 $Y-T$ 的子集,即 $N_H(S)\subseteq Y-T$。而 $|Y-T|=\lambda-\frac{\lambda+1}{2}=\frac{\lambda-1}{2}$,则 $|N_H(S)|\leqslant\frac{\lambda-1}{2}<\frac{\lambda+1}{2}=|S|$。根据 Hall 定理[1],$H$ 中不存在完美匹配,产生矛盾。因此,$\chi_k(P_{k+1}\cdot P_l)\geqslant\lambda k+1$,即引理结论成立。

在 $P_m\cdot P_n$ 中,当 $k\geqslant\max\{m,n\}$ 时,$P_m\cdot P_n$ 中任意2个顶点之间的距离均不超过 k。又因 $|V(P_m\cdot P_n)|=mn$,所以 $\chi_k(P_m\cdot P_n)=mn$,这个结果是平凡的。下面假设 $k<\max\{m,n\}$,于是,要么 $k<\min\{m,n\}$,要么 $\min\{m,n\}\leqslant k<\max\{m,n\}$。需要注意的是,第二个不等式意味着 $m\neq n$。当 $m<n$ 时,$\min\{m,n\}\leqslant k<\max\{m,n\}$ 可写成 $m\leqslant k<n$;当 $m>n$ 时,$\min\{m,n\}\leqslant k<\max\{m,n\}$ 可写成 $n\leqslant k<m$。

关于 $P_m\cdot P_n$ 的 k-距离色数有以下定理。

定理 1　设 $m,n,k\in\mathbf{Z}$ 且 $m,n,k\geqslant2$,其中 $k<\min\{m,n\}$。若 k 为奇数,则 $\chi_k(P_m\cdot P_n)=k(k+1)$;否则,$\chi_k(P_m\cdot P_n)=k(k+1)+1$。

证明　分以下 2 种情况证明。

情况 1　k 为奇数。因 $k<\min\{m,n\}$,所以可取 $P_m\cdot P_n$ 的一个顶点子集

$$B_1=\{(x,y)\mid x=0,1,\cdots,k,\ y=0,1,\cdots,k-1\}。$$

容易证明 B_1 中任意 2 个顶点之间的距离不超过 k。事实上,任取 2 个顶点 $w,w'\in B_1$,不妨假设,$w=(x,y)$,$w'=(x\pm s,y\pm t)$,其中 $s,t\geqslant0$。显然,$s\leqslant k$, $t\leqslant k-1$。当 $t\leqslant s$ 时,$d(w,w')=s\leqslant k$;当 $t>s$ 时,$d(w,w')\leqslant t+1\leqslant k$。又因 $|B_1|=k(k+1)$,所以 $\chi_k(P_m\cdot P_n)\geqslant k(k+1)$。

为证明 $\chi_k(P_m\cdot P_n)\leqslant k(k+1)$,现构造 $P_m\cdot P_n$ 的一个染色 σ:设颜色集合为 $\{(p,q)\mid p=0,1,\cdots,k,\ q=0,1,\cdots,k-1\}$,并对每一顶点 $(x,y)\in V(P_m\cdot P_n)$ 用颜色 $((x)_{k+1},(y)_k)$ 染顶点 (x,y),即 $\sigma(x,y)=((x)_{k+1},(y)_k)$。显然,染色 σ 所用颜色数为 $k(k+1)$。

现验证 σ 是 $P_m\cdot P_n$ 的一个 k-距离染色。任取 $P_m\cdot P_n$ 的2个顶点 $w=(x,y)$, $w'=(x\pm s,y\pm t)$,使得 $1\leqslant d(w,w')\leqslant k$,其中 $s,t\geqslant0$。显然,$s,t\leqslant k$ 且 $s+t\neq0$。假设 $\sigma(w)=\sigma(w')$,则 $(x)_{k+1}=(x\pm s)_{k+1}$ 且 $(y)_k=(y\pm t)_k$。于是,$(\pm s)_{k+1}=0$ 且 $(\pm t)_k=0$。而 $0\leqslant s$, $t\leqslant k$ 及 $s+t\neq0$,所以 $s=0$ 且 $t=k$。又因为 k 为奇数,所以 $d(w,w')=t+1=k+1$,这与 $d(w,w')\leqslant k$ 矛盾。因此,$\sigma(w)\neq\sigma(w')$,即 σ 是 $P_m\cdot P_n$ 的一个 k-距离染色。故有 $\chi_k(P_m\cdot P_n)\leqslant k(k+1)$。

情况 2　k 为偶数。记 $r=k(k+1)+1$。取 $P_m\cdot P_n$ 的一个顶点子集

$$B_2=\{(x,y)\mid x=0,1,\cdots,k,\ y=0,1,\cdots,k\}。$$

显然,B_2 在 $P_m\cdot P_n$ 中的导出子图同构于 $P_{k+1}\cdot P_{k+1}$。因为 k 为偶数,根据引理 1,可知 $\chi_k(P_{k+1}\cdot P_{k+1})\geqslant r$,因此 $\chi_k(P_m\cdot P_n)\geqslant\chi_k(P_{k+1}\cdot P_{k+1})\geqslant r$。

为证明 $\chi_k(P_m\cdot P_n)\leqslant r$,现构造 $P_m\cdot P_n$ 的一个染色 σ:设颜色集合为 $\{p\mid p=0,1,\cdots,r-1\}$,并对每一顶点 $(x,y)\in V(P_m\cdot P_n)$ 用颜色 $(x+(k+1)y)_r$ 染顶点 (x,y),即 $\sigma(x,y)=(x+(k+1)y)_r$。显然,染色 σ 所用颜色数为 r。下面验证 σ 是 $P_m\cdot P_n$ 的一个 k-距离染色。

任取 $P_m\cdot P_n$ 的2个顶点 $w=(x,y)$, $w'=(x\pm s,y\pm t)$,使得 $1\leqslant d(w,w')\leqslant k$,其中 $s,t\geqslant0$。显然,$s,t\leqslant k$ 且 $s+t\neq0$。假设 $\sigma(w)=\sigma(w')$,则 $(\pm s\pm(k+1)t)_r=0$,即 $((k+1)t+s)_r=0$ 或 $((k+1)t-s)_r=0$。

若 $((k+1)t+s)_r=0$,则 $(k+1)t+s=\alpha r$,其中 α 为非负整数。当 $\alpha\geqslant2$ 时,$(k+1)t+s\geqslant2k(k+1)+2$,而 $(k+1)t+s\leqslant k(k+2)<2k(k+1)+2$,这是不可能的。又因 $s+t\neq0$,所以 $\alpha\neq0$。于是,$(k+1)t+s=k(k+1)+1$,即 $s-1=(k+1)(k-t)$。由 $k-t\geqslant0$ 可知,$s-1\geqslant0$。又因 $s-1<k+1$,所以,$s=1$, $t=k$。因为,$t=k>1=s$ 且 $t+s=k+1$ 为奇数,所以 $d(w,w')=t+1=k+1$。这与 $d(w,w')\leqslant k$ 矛盾。因此当 $(s+(k+1)t)_r=0$ 时,$\sigma(w)\neq\sigma(w')$。

若 $((k+1)t-s)_r=0$,则 $(k+1)t-s=\alpha r$,其中 α 为非负整数。当 $\alpha\geqslant2$ 时,$(k+1)t-s\geqslant2k(k+1)+2$,而 $(k+1)t-s\leqslant(k+1)t+s\leqslant k(k+2)<2k(k+1)+2$,这是不可能的。因此,$\alpha=0$ 或 1。当 $\alpha=0$ 时,$(k+1)t-s=0$。而 $s\leqslant k$,所以 $s=0$ 且 $t=0$,即 $d(w,w')=0$,这与 $d(w,w')\geqslant1$ 矛盾。当 $\alpha=1$ 时,$(k+1)t-s=k(k+1)+1$。显然,$k+1$ 能整除 $s+1$,而 $0\leqslant s\leqslant k$,所以 $s=k$。进而可得,$t=k+1$,这与 $t\leqslant k$ 矛盾。因此,当 $((k+1)t-s)_r=0$ 时,$\sigma(w)\neq\sigma(w')$。

由以上分析,σ 是 $P_m\cdot P_n$ 的一个 k-距离染色。因此,$\chi_k(P_m\cdot P_n)\leqslant k(k+1)+1$。

定理 2　设 $m,n,k\in\mathbf{Z}$ 且 $m,n,k\geqslant2$,其中 $m\leqslant k<n$。则 $\chi_k(P_m\cdot P_n)=m(k+1)$。

证明　因 $m\leqslant k<n$,所以可取 $P_m\cdot P_n$ 的一个顶点子集

$$B=\{(x,y)\mid x=0,1,\cdots,k,\ y=0,1,\cdots,m-1\}。$$

类似于定理 1 的证明中情况 1 的讨论,B 中任意 2 个顶点之间的距离不超过 k。又因 $|B|=m(k+1)$,所以 $\chi_k(P_m\cdot P_n)\geqslant m(k+1)$。为证明 $\chi_k(P_m\cdot P_n)\leqslant m(k+1)$,现构造 $P_m\cdot P_n$ 的一个染色 σ:设颜色集合为 $\{(p,q)\mid p=0,1,\cdots,k,\ q=0,1,\cdots,m-1\}$,并对每一顶点 $(x,y)\in V(P_m\cdot P_n)$ 用颜色 $((x)_{k+1},y)$ 染顶点 (x,y),即 $\sigma(x,y)=((x)_{k+1},y)$。显然,染色 σ 所用颜色数为 $m(k+1)$。下面验证 σ 是 $P_m\cdot P_n$ 的一个 k-距离染色。

任取 $P_m\cdot P_n$ 的2个顶点 $w=(x,y)$, $w'=(x\pm s,y\pm t)$,使得 $1\leqslant d(w,w')\leqslant k$,其中 $s,t\geqslant 0$。显然,$s\leqslant k$, $t\leqslant m-1$ 且 $s+t\neq 0$。假设 $\sigma(w)=\sigma(w')$,则 $(x)_{k+1}=(x\pm s)_{k+1}$ 且 $t=0$。由前式可得,$(\pm s)_{k+1}=0$,即 $s=0$。于是,$d(w,w')=0$,这与 $d(w,w')\geqslant 1$ 矛盾。因此,$\sigma(w)\neq\sigma(w')$,即 σ 是 $P_m\cdot P_n$ 的一个 k-距离染色。故有 $\chi_k(P_m\cdot P_n)\leqslant m(k+1)$。

定理 3　设 $m,n,k\in\mathbf{Z}$ 且 $m,n,k\geqslant 2$,其中 $n\leqslant k<m$。若 n 为偶数或 k 为奇数,则 $\chi_k(P_m\cdot P_n)=nk$;否则,$\chi_k(P_m\cdot P_n)=nk+1$。

证明　分以下 2 种情况证明。

情况 1　n 为偶数或 k 为奇数。取 $P_m\cdot P_n$ 的一个顶点子集

$$B_1=\{(x,y)\mid x=0,1,\cdots,n-1,\ y=0,1,\cdots,k-1\}。$$

显然,B_1 中任意 2 个顶点之间的距离不超过 k。又因 $|B_1|=nk$,所以 $\chi_k(P_m\cdot P_n)\geqslant nk$。为证明 $\chi_k(P_m\cdot P_n)\leqslant nk$,仅需构造 $P_m\cdot P_n$ 的一个 k-距离染色。设颜色集合为 $\{(p,q)\mid p=0,1,\cdots,n-1,\ q=0,1,\cdots,k-1\}$,下面分 2 种子情况构造所需 k-距离染色 σ。

情况 1.1　k,n 均为偶数。对每一顶点 $(x,y)\in V(P_m\cdot P_n)$ 用颜色 $\left(\left(x+\left\lfloor\frac{y}{k}\right\rfloor\right)_n,(y)_k\right)$ 染顶点 (x,y),即 $\sigma(x,y)=\left(\left(x+\left\lfloor\frac{y}{k}\right\rfloor\right)_n,(y)_k\right)$。显然,染色 σ 所用颜色数为 nk。下面验证 σ 是 $P_m\cdot P_n$ 的一个 k-距离染色。

任取 $P_m\cdot P_n$ 的2个顶点 $w=(x,y)$, $w'=(x\pm s,y\pm t)$,使得 $1\leqslant d(w,w')\leqslant k$,其中 $s,t\geqslant 0$。显然,$s\leqslant n-1$, $t\leqslant k$ 且 $s+t\neq 0$。假设 $\sigma(w)=\sigma(w')$,则 $\left(x+\left\lfloor\frac{y}{k}\right\rfloor\right)_n=\left(x\pm s+\left\lfloor\frac{y\pm t}{k}\right\rfloor\right)_n$,且 $(\pm t)_k=0$。由后一式可知,$t=0$ 或 $t=k$。当 $t=0$ 时,由前一式可知,$(\pm s)_n=0$,而 $s\leqslant n-1$,所以 $s=0$,于是 $d(w,w')=0$,这与 $d(w,w')\geqslant 1$ 矛盾。当 $t=k$ 时,因 $k>n-1\geqslant s$,所以 $t>s$。此时,$s+t$ 必为偶数,否则,$d(w,w')=t+1=k+1$,这与 $d(w,w')\leqslant k$ 矛盾。又因 k 为偶数,所以 s 也为偶数。另一方面,因 $t=k$,所以由 $\left(\left\lfloor\frac{y}{k}\right\rfloor\right)_n=\left(\left\lfloor\frac{y\pm t}{k}\right\rfloor\pm s\right)_n$ 可知,$(\pm s\pm 1)_n=0$。于是,$s=1$ 或 $s=n-1$,显然它们都是奇数,这与 s 是偶数矛盾。因此,$\sigma(w)\neq\sigma(w')$。故 σ 是 $P_m\cdot P_n$ 的一个 k-距离染色,即 $\chi_k(P_m\cdot P_n)\leqslant nk$。

情况 1.2　k 为奇数。对每一顶点 $(x,y)\in V(P_m\cdot P_n)$ 用颜色 $(x,(y)_k)$ 染顶点 (x,y),即 $\sigma(x,y)=(x,(y)_k)$。显然,染色 σ 所用颜色数为 nk。下面验证 σ 是 $P_m\cdot P_n$ 的一个 k-距离染色。

任取 $P_m\cdot P_n$ 的2个顶点 $w=(x,y)$, $w'=(x\pm s,y\pm t)$,使得 $1\leqslant d(w,w')\leqslant k$,其中 $s,t\geqslant 0$。显然,$s\leqslant n-1$, $t\leqslant k$ 且 $s+t\neq 0$。假设 $\sigma(w)=\sigma(w')$,则 $s=0$ 且 $(y)_k=(y\pm t)_k$。由后一式可得,$(\pm t)_k=0$,即 $t=0$ 或 $t=k$。又因 $s=0$ 及 $s+t\neq 0$,所以 $t=k$。此时,因 $t=k>0=s$ 及 $s+t=k$ 为奇数,所以 $d(w,w')=t+1=k+1$,这与 $d(w,w')\leqslant k$ 矛盾。因此,$\sigma(w)\neq\sigma(w')$。故 σ 是 $P_m\cdot P_n$ 的一个 k-距离染色,即 $\chi_k(P_m\cdot P_n)\leqslant nk$。

情况 2　n 为奇数且 k 为偶数。记 $r=nk+1$。在引理 1 中,取 $l=n$,因 $n\leqslant k<k+1$,由引理 1 可知,$\chi_k(P_{k+1}\cdot P_n)\geqslant r$。又因 $k<m$,所以,$\chi_k(P_m\cdot P_n)\geqslant\chi_k(P_{k+1}\cdot P_n)\geqslant r$。为证明 $\chi_k(P_m\cdot P_n)\leqslant r$,现在构造 $P_m\cdot P_n$ 的一个 k-距离染色 σ:设颜色集合为 $\{p\mid p=0,1,\cdots,r-1\}$,并对每一顶点 $(x,y)\in V(P_m\cdot P_n)$ 用颜色 $(x+ny)_r$ 染顶点 (x,y),即 $\sigma(x,y)=(x+ny)_r$。显然,染色 σ 所用颜色数为 r。下面验证 σ 是 $P_m\cdot P_n$ 的一个 k-距离染色。

任取 $P_m\cdot P_n$ 的2个顶点 $w=(x,y)$, $w'=(x\pm s,y\pm t)$,使得 $1\leqslant d(w,w')\leqslant k$,其中 $s,t\geqslant 0$。显然,$s\leqslant n-1$, $t\leqslant k$,且 $s+t\neq 0$。假设 $\sigma(w)=\sigma(w')$,则 $(x+ny)_r=(x\pm s+n(y\pm t))_r$。于是,$(\pm nt\pm s)_r=0$,即 $(nt+s)_r=0$ 或 $(nt-s)_r=0$。

若 $(nt+s)_r=0$,则 $nt+s=\alpha r$,其中 α 为非负整数。当 $\alpha\geqslant 2$ 时,$nt+s\geqslant 2nk+2$,而 $nt+s\leqslant nk+n-1<2nk+2$,这

是不可能的。又因 $s+t\neq 0$,所以 $\alpha\neq 0$。因此,$\alpha=1$,于是,$nt+s=nk+1$,即 $s-1=n(k-t)$。由 $k-t\geqslant 0$ 可知,$s-1\geqslant 0$,而 $s-1<n$,所以,$s=1$, $t=k$。因为,$t=k>1=s$ 且 $t+s=k+1$ 为奇数,所以 $d(w,w')=t+1=k+1$,这与 $d(w,w')\leqslant k$矛盾。因此,当$(nt+s)_r=0$ 时,$\sigma(w)\neq\sigma(w')$。

若$(nt-s)_r=0$,则 $nt-s=\alpha r$,其中 α 为非负整数。显然,$\alpha\neq 0$,因为 $s+t\neq 0$。容易得到,$\alpha\neq 1$,否则,产生矛盾:$nk+1=nt-s\leqslant nt\leqslant nk$。因此,$\alpha\geqslant 2$。故有,$nt-s\geqslant 2nk+2$,而 $nt-s\leqslant nt+s\leqslant nk+n-1<2nk+2$,这是不可能的。因此,当$(nt-s)_r=0$ 时,$\sigma(w)\neq\sigma(w')$。

由以上分析可知,σ 是 $P_m\cdot P_n$ 的一个 k-距离染色。因此,$\chi_k(P_m\cdot P_n)\leqslant nk+1$。

最后,研究 2 个路的强积 $P_m\boxtimes P_n$ 的 k-距离染色。由于图的强积满足交换律,不妨假设 $m\leqslant n$。当 $k\geqslant n$ 时,$P_m\boxtimes P_n$ 中任意 2 个顶点之间的距离都不超过 k,所以,$\chi_k(P_m\boxtimes P_n)=|V(P_m\boxtimes P_n)|=mn$。下面仅讨论 $k<n$的情况。

定理 4　设 $m,n,k\in\mathbf{Z}$ 且 $m,n,k\geqslant 2$,其中 $m\leqslant n$, $k<n$。若 $k<m$,则 $\chi_k(P_m\boxtimes P_n)=(k+1)^2$;否则,$\chi_k(P_m\boxtimes P_n)=m(k+1)$。

证明　分以下 2 种情况证明。

情况 1　$k<m$。此时,$k\leqslant m-1$, $k\leqslant n-1$。记 $r=(k+1)^2$。取 $P_m\boxtimes P_n$ 的一个顶点子集

$$B_1=\{(x,y)\mid x=0,1,\cdots,k,\ y=0,1,\cdots,k\}。$$

显然,B_1 中任意 2 个顶点之间的距离不超过 k,且$|B_1|=r$,故有$\chi_k(P_m\boxtimes P_n)\geqslant r$。

为证明$\chi_k(P_m\boxtimes P_n)\leqslant r$,现构造 $P_m\boxtimes P_n$ 的一个染色 σ:设颜色集合为$\{p\mid p=0,1,\cdots,r-1\}$,并对每一顶点$(x,y)\in V(P_m\cdot P_n)$用颜色$(x+(k+1)y)_r$ 染顶点(x,y),即$\sigma(x,y)=(x+(k+1)y)_r$。显然,染色 σ 所用颜色数为 r。

现验证 σ 是 $P_m\boxtimes P_n$ 的一个 k-距离染色。任取 $P_m\boxtimes P_n$ 的 2 个顶点 $w=(x,y)$, $w'=(x\pm s,y\pm t)$,使得 $1\leqslant d(w,w')\leqslant k$,其中 $s,t\geqslant 0$。显然,$s,t\leqslant k$ 且 $s+t\neq 0$。假设 $\sigma(w)=\sigma(w')$,则$(x+(k+1)y)_r=(x\pm s+(k+1)(y\pm t))_r$。于是,$(\pm t(k+1)\pm s)_r=0$,该式等价于$(t(k+1)\pm s)_r=0$。于是,$t(k+1)\pm s=\alpha r$,其中 α 为非负整数。当 $\alpha\geqslant 2$ 时,$t(k+1)\pm s\geqslant 2(k+1)^2$,而 $t(k+1)\pm s\leqslant t(k+1)+s\leqslant k(k+2)<2(k+1)^2$,这是不可能的。又因 $s+t\neq 0$,所以 $\alpha\neq 0$。因此,$\alpha=1$,进而 $t(k+1)\pm s=(k+1)^2$,这意味着,$k+1$ 能整除 s。而 $s\leqslant k$,所以 $s=0$。由此可知,$t=k+1$,这与 $t\leqslant k$ 矛盾。因此,$\sigma(w)\neq\sigma(w')$。故 σ 是 $P_m\boxtimes P_n$ 的一个 k-距离染色,即$\chi_k(P_m\boxtimes P_n)\leqslant(k+1)^2$。

情况 2　$k\geqslant m$。此时,$k-1\geqslant m-1$, $k\leqslant n-1$。取 $P_m\boxtimes P_n$ 的一个顶点子集

$$B_2=\{(x,y)\mid x=0,1,\cdots,k,\ y=0,1,\cdots,m-1\}。$$

显然,B_2 中任意 2 个顶点之间的距离不超过 k,且$|B_2|=m(k+1)$,故有$\chi_k(P_m\boxtimes P_n)\geqslant m(k+1)$。

为证明$\chi_k(P_m\boxtimes P_n)\leqslant m(k+1)$,现构造 $P_m\boxtimes P_n$ 的一个染色 σ:设颜色集合为$\{(p,q)\mid p=0,1,\cdots,k,\ q=0,1,\cdots,m-1\}$,并对每一顶点$(x,y)\in V(P_m\boxtimes P_n)$,用颜色$((x)_{k+1},y)$染顶点$(x,y)$,即 $\sigma(x,y)=((x)_{k+1},y)$。显然,染色 σ 所用颜色数为 $m(k+1)$。

现验证 σ 是 $P_m\boxtimes P_n$ 的一个 k-距离染色。任取 $P_m\boxtimes P_n$ 的 2 个顶点 $w=(x,y)$, $w'=(x\pm s,y\pm t)$,使得 $1\leqslant d(w,w')\leqslant k$,其中 $s,t\geqslant 0$。显然,$s\leqslant k$, $t\leqslant m-1$ 且 $s+t\neq 0$。假设 $\sigma(w)=\sigma(w')$,则$(x)_{k+1}=(x\pm s)_{k+1}$且 $t=0$。由前一式可知,$(\pm s)_{k+1}=0$。而 $0\leqslant s\leqslant k$,所以 $s=0$。于是,$d(w,w')=0$,这与 $d(w,w')\geqslant 1$ 矛盾。因此,$\sigma(w)\neq\sigma(w')$。故 σ 是 $P_m\boxtimes P_n$ 的一个 k-距离染色,即$\chi_k(P_m\boxtimes P_n)\leqslant m(k+1)$。

参考文献:

[1] BONDY J A, MURTY U S R. Graph theory with applications[M]. London: Macmillan Press Ltd, 1976.

[2] KRAMER F, KRAMER H. Un probleme de coloration des sommets d'un graphe[J]. Comptes rendus de l'Academie bulgare des Sciences Paris A, 1969, 268:46-48.

[3] KRAMER F, KRAMER H. Ein Färbungsproblem der Knotenpunkte eines Graphen bezülich der Distanz p[J]. Revue Roumaine de Mathematiques Pures et Appliquees, 1969, 14(2):1031-1038.

[4] KRUMKE S O, MARATHE M V, RAVI S S. Models and approximation algorithms for channel assignment in radio networks [J]. Wireless Networks, 2001, 7:575-584.

[5] CHAITIN G J, AUSLANDER M A, CHANDRA A K, et al. Register allocation via coloring[J]. Computer Languages, 1981, 6:47-57.

[6] GEBREMEDHIN A H, MANNE F, POTHEN A. What color is your Jacobian? graph coloring for computing derivatives[J]. SIAM Review, 2005, 47:629-705.
[7] MIAO L Y, FAN Y Z. The distance coloring of graphs[J]. Acta Mathematica Sinica, English Series, 2014, 30(9):1579-1587.
[8] SHAHEEN R, KANAYA Z, JAKHLAB S. d-distance coloring of generalized petersen graphs $P(n,k)$[J]. Open Journal of Discrete Mathematics, 2017, 7:185-199.
[9] FERTIN G, GODARD E, RASPAUD A. Acyclic and k-distance coloring of the grid[J]. Information Processing Letters, 2003, 87(1):51-58.
[10] JACKO P, JENDROL S. Distance coloring of the hexagonal lattice[J]. Discussiones Mathematicae Graph Theory, 2005, 25:151-166.
[11] KIM B M, SONG B C, RHO Y. 2-distance colorings of some direct products of paths and cycles[J]. Discrete Mathematics, 2015, 338:1730-1739.
[12] JARADAT M M M. On the edge coloring of graph products[J]. International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, 2005, 16:2669-2676.

(编辑:祁业卿)

(上接第160页)

[3] KIM J, SUIL O. Average connectivity and average edge-connectivity in graphs[J]. Discrete Mathematics, 2013, 313(20):2232-2238.
[4] BEINEKE W L, OELLERMANN R O, PIPPERT R E. The average connectivity of a graph[J]. Discrete Mathematics, 2002, 252(1/2/3):31-45.
[5] SPINOZA H, WEST B D. Reconstruction from the deck of k-vertex induced subgraphs[J]. Journal of Graph Theory, 2019, 90(4):497-522.
[6] MONTEALEGRE P, PEREZ-SALAZAR S, RAPAPORT I, et al. Graph reconstruction in the congested clique[J]. Journal of Computer and System Sciences, 2020, 113:1-17.
[7] OLIVEIRA C I, THATTE D B. An algebraic formulation of the graph reconstruction conjecture[J]. Journal of Graph Theory, 2016, 81(4):351-363.
[8] BONDY J A, MURTY U S R. Graph theory[M]. London: Springer London, 2008.
[9] WHITNEY H. Non-separable and planar graphs[J]. Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, 1931, 17(2):125-127.

(编辑:祁业卿)