

## 粘附中 Abel 范畴的小有限维数

王茜<sup>1,2</sup>, 姚海楼<sup>1\*</sup>

(1.北京工业大学数学统计学与力学学院,北京 100124; 2.四川文理学院数学学院,四川 达州 635000)

**摘要:**令  $\mathcal{A}$  是 Abel 范畴,在  $\mathcal{A}$  中引入 FT-内射对象以及 FT-内射维数,讨论 FT-内射对象以及 FT-内射维数的基本性质。另外,借助 FT-内射维数,刻画  $\mathcal{A}$  的小有限维数  $\text{fPD}_{\mathcal{A}}$ ,并且在 Abel 范畴的粘附中给出 3 个 Abel 范畴的  $\text{fPD}$  维数之间的大小关系。

**关键词:**有限投射分解;小有限维数;FT-内射对象;粘附

**中图分类号:**O154.2 **文献标志码:**A

**引用格式:**王茜,姚海楼.粘附中 Abel 范畴的小有限维数[J].山东大学学报(理学版),2025,60(11):42-47.

## Small finitistic dimension of Abel category in a recollement

WANG Xi<sup>1,2</sup>, YAO Hailou<sup>1\*</sup>

(1. School of Mathematics, Statistics and Mechanics, Beijing University of Technology, Beijing 100124, China; 2. College of Mathematics, Sichuan University of Arts and Science, Dazhou 635000, Sichuan, China)

**Abstract:** Let  $\mathcal{A}$  be an Abel category. The concept of FT-injective objects and the FT-injective dimension are introduced in  $\mathcal{A}$ , and the basic properties of FT-injective objects and the FT-injective dimension are discussed. Additionally, using the FT-injective dimension, the small finitistic dimension of  $\mathcal{A}$ , denoted as  $\text{fPD}_{\mathcal{A}}$  is characterized. The relationship among the small finitistic dimensions of three different Abel categories in a recollement is explored.

**Key words:** finite projective resolution; small finitistic dimension; FT-injective object; recollement

## 0 引言

为了刻画左 Noether 环, Bass<sup>[1]</sup> 定义小有限维数,即有有限投射维数的有限生成  $R$ -模的投射维数的上确界。后来, Glaz<sup>[2]</sup> 又将环  $R$  的小有限维数  $\text{fPDR}$  定义为有有限投射分解的模的投射维数的上确界,即  $\text{fPDR} = \sup\{\text{pd}_R M \mid M \text{ 有有限投射分解}\}$ , 得到一个局部环  $R$  的小有限维数  $\text{fPDR} = 0$  的一个充分必要条件: 若  $M \subseteq N$  是 2 个有限生成自由  $R$ -模, 则  $N/M$  也是自由  $R$ -模。孙小武<sup>[3]</sup> 研究环  $R$  的 FT-内射模, 证明  $\text{fPDR} \leq n$  当且仅当对任意的有有限投射分解的模  $M$ , 其 FT-内射维数  $\text{FT-id}_R M \leq n$ 。Zhang 等<sup>[4]</sup> 研究交换环  $R$  的  $\text{fPD}$  维数, 证明  $\text{fPDR} \leq 1$  当且仅当  $R$  是 DW 环。Wang 等<sup>[5]</sup> 证明一般 Prüfer 环  $R$  不满足  $\text{fPDR} \leq 1$ , 也证明  $\text{fPDR} = 0$  当且仅当  $R$  是拟完全环(即  $R$  的每个真理想都不是半正则的, 具体定义和相关刻画见文献[6])。本文将 Glaz<sup>[2]</sup> 和孙小武<sup>[3]</sup> 的相关工作推广到 Abel 范畴上, 即定义一个有足够多投射对象的 Abel 范畴  $\mathcal{A}$  的小有限维数, 并考虑小有限维数与 FT-内射维数的关系。随后又以 Abel 范畴的粘附为工具开始探究不同 Abel 范畴之间小有限投射维数的关系。证明在一个粘附  $\mathbf{R}(\mathcal{A}', \mathcal{A}, \mathcal{A}'')$  中, 若范畴  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{A}'$  与  $\mathcal{A}''$  都有足够多的 FT-内射对象, 那么

$$(1) \text{fPD}_{\mathcal{A}} \leq \text{FT-dim}_{\mathcal{A}}(i_* \mathcal{A}') + \text{fPD}_{\mathcal{A}''} + 1;$$

收稿日期:2024-06-11; 网络出版时间:2025-04-01 11:04:46

基金项目:国家自然科学基金资助项目(12071120)

第一作者:王茜(1990—),女,博士研究生,研究方向为同调代数与范畴理论. E-mail:xwang1233@163.com

\*通信作者:姚海楼(1963—),男,教授,博士生导师,博士,研究方向为同调代数与代数表示论. E-mail:yaohl@bjut.edu.cn

(2)  $\text{FT-dim}_{\mathcal{A}}(i_* \mathcal{B}') \leq \text{fPD}_{\mathcal{A}} + \sup \{ \text{FT-id}_{\mathcal{A}}(i_* T) \mid T \in \mathcal{B}' \text{ 是 FT-内射对象} \}$ ;

(3)  $\text{fPD}_{\mathcal{A}''} \leq \text{fPD}_{\mathcal{A}} + \sup \{ \text{FT-id}_{\mathcal{A}''}(j^* T) \mid T \in \mathcal{A} \text{ 是 FT-内射对象} \}$ 。

此时,还有

$$\text{fPD}_{\mathcal{A}} \leq \text{fPD}_{\mathcal{A}'} + \text{fPD}_{\mathcal{A}''} + \sup \{ \text{FT-id}_{\mathcal{A}}(i_* T) \mid T \in \mathcal{B}' \text{ 是 FT-内射对象} \} + 1。$$

本文中的 Abel 范畴始终有足够多投射对象和足够多内射对象并且保持无限直和,  $M \in \mathcal{A}$  表示  $M$  是范畴  $\mathcal{A}$  中的一个对象。关于 Abel 范畴的相关内容可见文献[7-9]。

## 1 fPD 维数与 FT-内射维数

令  $\mathcal{A}$  是一个 Abel 范畴, 设  $P \in \mathcal{A}$ , 若对于任意的正合列  $0 \rightarrow X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow 0$ , 都有  $0 \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}}(P, X) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}}(P, Y) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}}(P, Z) \rightarrow 0$  是正合的, 称  $P$  是  $\mathcal{A}$  中的投射对象。

设  $\{U_i\}_i$  是  $\mathcal{A}$  的一簇生成子, 假设  $f, g: X \rightarrow Y$  是  $\mathcal{A}$  中的两个不同的态射, 则存在  $U_i$  和态射  $h: U_i \rightarrow X$ , 使得  $fh \neq gh$ 。另外, 如果存在满态射  $\prod_{j \in J} U_j \rightarrow X \rightarrow 0$ , 其中  $J$  是有限集且  $U_j \in \{U_i\}_i$ , 那么称  $X$  是  $\mathcal{A}$  中的有限生成对象。

对于任意的  $M \in \mathcal{A}$ , 如果存在一个正合序列

$$0 \rightarrow P_n \rightarrow P_{n-1} \rightarrow \dots \rightarrow P_1 \rightarrow P_0 \rightarrow M \rightarrow 0,$$

其中  $P_i$  是  $\mathcal{A}$  中的有限生成投射对象, 则称  $M$  有有限投射分解, 记为  $M \in \text{FPR}(\mathcal{A})$ 。定义  $\mathcal{A}$  的小有限维数为  $\text{FPR}(\mathcal{A})$  中对象的投射维数的上确界, 记为  $\text{fPD}_{\mathcal{A}}$ , 即

$$\text{fPD}_{\mathcal{A}} = \sup \{ \text{pd}_{\mathcal{A}} M \mid M \in \text{FPR}(\mathcal{A}) \}。$$

**定义 1** 令  $E \in \mathcal{A}$ , 如果对于任意的  $M \in \text{FPR}(\mathcal{A})$ , 都有  $\text{Ext}_{\mathcal{A}}^1(M, E) = 0$ , 称  $E$  是 FT-内射对象。

注 1 根据上述定义, 显然有

- (1)  $\mathcal{A}$  中所有内射对象都是 FT-内射对象;
- (2) 设  $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$  是  $\mathcal{A}$  中短正合列且  $A$  与  $C$  都是 FT-内射对象, 则  $B$  也是 FT-内射对象;
- (3) 设  $\{E_i\}_i$  是  $\mathcal{A}$  中对象, 则  $E_i$  是 FT-内射对象当且仅当  $\prod_i E_i$  是 FT-内射对象。

**命题 1** 若  $E \in \mathcal{A}$  是 FT-内射对象, 则  $\text{Ext}_{\mathcal{A}}^i(M, E) = 0$ , 其中  $M \in \text{FPR}(\mathcal{A})$ ,  $i \geq 1$ 。

**证明** 因为  $M \in \text{FPR}(\mathcal{A})$ , 所以存在正合列  $0 \rightarrow P_n \rightarrow P_{n-1} \rightarrow \dots \rightarrow P_1 \rightarrow P_0 \rightarrow M \rightarrow 0$ , 其中  $P_i$  是有限生成投射对象。令  $K \cong (P_0 \rightarrow M)$ , 则  $K \in \text{FPR}(\mathcal{A})$ ,  $\text{Ext}_{\mathcal{A}}^2(M, E) \cong \text{Ext}_{\mathcal{A}}^1(K, E) = 0$ 。重复此过程, 对于所有的  $i \geq 1$ , 都有  $\text{Ext}_{\mathcal{A}}^i(M, E) = 0$  成立。

**定义 2** 令  $N \in \mathcal{A}$ ,  $N$  的 FT-内射维数是使得  $\text{Ext}_{\mathcal{A}}^{n+1}(M, N) = 0$  成立的最小整数  $n$ , 其中  $M \in \text{FPR}(\mathcal{A})$ , 记为  $\text{FT-id}_{\mathcal{A}} N = n$ 。若不存在这样的整数  $n$ , 就记  $\text{FT-id}_{\mathcal{A}} N = \infty$ 。此外,  $\mathcal{A}$  的整体 FT-维数是  $\text{FT-dim } \mathcal{A} := \sup \{ \text{FT-id}_{\mathcal{A}} N \mid N \in \mathcal{A} \}$ 。

**命题 2** 对于 Abel 范畴  $\mathcal{A}$ , 有  $\text{fPD}_{\mathcal{A}} = \text{FT-dim } \mathcal{A}$ 。

**证明** 设  $\text{FT-dim } \mathcal{A} = n$ , 则对于任意的  $N \in \mathcal{A}$ ,  $M \in \text{FPR}(\mathcal{A})$ , 有  $\text{Ext}_{\mathcal{A}}^{n+1}(M, N) = 0$ , 所以  $\text{pd}_{\mathcal{A}} M \leq n$ , 即  $\text{fPD}_{\mathcal{A}} \leq n$ 。反之, 假设  $\text{fPD}_{\mathcal{A}} = n$ , 则对于任意的  $M \in \text{FPR}(\mathcal{A})$ , 有  $\text{pd}_{\mathcal{A}} M \leq n$ 。此时, 对于任意的  $N \in \mathcal{A}$ , 有  $\text{Ext}_{\mathcal{A}}^{n+1}(M, N) = 0$ , 所以  $\text{FT-id}_{\mathcal{A}} N \leq n$ , 即  $\text{FT-dim } \mathcal{A} \leq n$ 。

**命题 3** 设  $X \in \mathcal{A}$ , 则以下几条等价:

- (1)  $\text{FT-id}_{\mathcal{A}} X \leq n$ , 即对于任意的  $M \in \text{FPR}(\mathcal{A})$ , 有  $\text{Ext}_{\mathcal{A}}^{n+1}(M, X) = 0$ ;
- (2) 存在长正合列  $0 \rightarrow X \rightarrow E_0 \rightarrow E_1 \rightarrow \dots \rightarrow E_{n-1} \rightarrow N \rightarrow 0$ , 其中  $E_0, E_1, \dots, E_{n-1}$  是 FT-内射对象, 则  $N$  是 FT-内射对象;
- (3) 存在长正合列  $0 \rightarrow X \rightarrow E_0 \rightarrow E_1 \rightarrow \dots \rightarrow E_{n-1} \rightarrow N \rightarrow 0$ , 其中  $E_0, E_1, \dots, E_{n-1}$  是内射对象, 则  $N$  是 FT-内射对象。

**证明** (1)  $\Rightarrow$  (2)。设  $M \in \text{FPR}(\mathcal{A})$ , 结合命题 1, 由维数转换有  $0 = \text{Ext}_{\mathcal{A}}^{n+1}(M, X) \cong \text{Ext}_{\mathcal{A}}^1(M, N)$ , 因此  $N$

是  $\mathcal{A}$  中的 FT-内射对象。

(2)  $\Rightarrow$  (3) 显然。

(3)  $\Rightarrow$  (1)。再次利用维数转换即可。

**推论 1** 由命题 3, 有

$\text{FT-id}_{\mathcal{A}} N = \inf \{ n \mid 0 \rightarrow N \rightarrow E_0 \rightarrow E_1 \rightarrow \dots \rightarrow E_n \rightarrow 0, \text{ 其中每个 } E_i \text{ 都是 } \mathcal{A} \text{ 中的 FT-内射对象} \}$ 。

**命题 4** 令  $\mathcal{A}$  是有足够多内射对象的 Abel 范畴,  $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow 0$  是  $\mathcal{A}$  中的正合列, 则以下结论成立:

(1) 若  $A=0$ , 则

- (a) 如果  $\text{FT-id}_{\mathcal{A}} D < \text{FT-id}_{\mathcal{A}} C$ , 那么  $\text{FT-id}_{\mathcal{A}} B = \text{FT-id}_{\mathcal{A}} C$ ;
- (b) 如果  $\text{FT-id}_{\mathcal{A}} D > \text{FT-id}_{\mathcal{A}} C$ , 那么  $\text{FT-id}_{\mathcal{A}} B = \text{FT-id}_{\mathcal{A}} D + 1$ ;
- (c) 如果  $\text{FT-id}_{\mathcal{A}} D = \text{FT-id}_{\mathcal{A}} C$ , 那么  $\text{FT-id}_{\mathcal{A}} B \leq \text{FT-id}_{\mathcal{A}} C + 1$ ;
- (d)  $\text{FT-id}_{\mathcal{A}} B \leq \max \{ \text{FT-id}_{\mathcal{A}} D + 1, \text{FT-id}_{\mathcal{A}} C \}$ 。

(2) 若  $A \neq 0$ , 则

$$\text{FT-id}_{\mathcal{A}} B \leq \max \{ \text{FT-id}_{\mathcal{A}} A, \text{FT-id}_{\mathcal{A}} C, \text{FT-id}_{\mathcal{A}} D + 1 \}。$$

**证明** (1) 对于任意的  $M \in \text{FPR}(\mathcal{A})$ , 正合列  $0 \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow 0$  诱导出长正合列

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{A}}^{k+1}(M, B) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{A}}^{k+1}(M, C) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{A}}^{k+1}(M, D) \rightarrow \\ \text{Ext}_{\mathcal{A}}^{k+2}(M, B) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{A}}^{k+2}(M, C) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{A}}^{k+2}(M, D) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

其中  $k$  是非负整数。

(a) 令  $\text{FT-id}_{\mathcal{A}} D = n$ , 则  $\text{Ext}_{\mathcal{A}}^{n+i}(M, D) = 0, i \geq 1$ , 从而有

$$\text{Ext}_{\mathcal{A}}^{n+j}(M, B) \cong \text{Ext}_{\mathcal{A}}^{n+j}(M, C),$$

其中  $j > 1$ 。另外, 由假设  $\text{FT-id}_{\mathcal{A}} D < \text{FT-id}_{\mathcal{A}} C$  知, 存在  $M' \in \text{FPR}(\mathcal{A})$ , 使得  $\text{Ext}_{\mathcal{A}}^{n+1}(M', C) \neq 0$ , 所以  $\text{Ext}_{\mathcal{A}}^{n+1}(M', B) \neq 0$ , 从而  $\text{FT-id}_{\mathcal{A}} B > n$ , 因此  $\text{FT-id}_{\mathcal{A}} B = \text{FT-id}_{\mathcal{A}} C$  成立。

(b) 令  $\text{FT-id}_{\mathcal{A}} C = m$ , 则  $\text{Ext}_{\mathcal{A}}^{m+i}(M, C) = 0, i \geq 1$ , 所以

$$\text{Ext}_{\mathcal{A}}^{m+j}(M, D) \cong \text{Ext}_{\mathcal{A}}^{m+j+1}(M, B), \quad j \geq 1。$$

另外, 由假设  $\text{FT-id}_{\mathcal{A}} D > m$ , 与 (a) 的验证方式一致, 有  $\text{FT-id}_{\mathcal{A}} B > m + 1$  成立, 因此  $\text{FT-id}_{\mathcal{A}} B = \text{FT-id}_{\mathcal{A}} D + 1$ 。

(c) 令  $\text{FT-id}_{\mathcal{A}} C = \text{FT-id}_{\mathcal{A}} D = m$ , 则  $\text{Ext}_{\mathcal{A}}^{m+i}(M, C) = \text{Ext}_{\mathcal{A}}^{m+i}(M, D) = 0, i \geq 1$ , 因此  $\text{Ext}_{\mathcal{A}}^{m+i+1}(M, B) = 0$ , 从而  $\text{FT-id}_{\mathcal{A}} B \leq m + 1$ 。

(d) 由 (a)、(b)、(c) 可得。

(2) 令  $K = \ker(C \rightarrow D)$ , 由命题 4(1)(d) 有

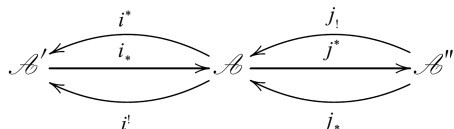
$$\text{FT-id}_{\mathcal{A}} K \leq \max \{ \text{FT-id}_{\mathcal{A}} D + 1, \text{FT-id}_{\mathcal{A}} C \}。$$

因此

$$\begin{aligned} \text{FT-id}_{\mathcal{A}} B &\leq \max \{ \text{FT-id}_{\mathcal{A}} A, \text{FT-id}_{\mathcal{A}} K \} \\ &\leq \max \{ \text{FT-id}_{\mathcal{A}} A, \text{FT-id}_{\mathcal{A}} C, \text{FT-id}_{\mathcal{A}} D + 1 \}。 \end{aligned}$$

## 2 粘合中 Abel 范畴的 fPD 维数

**定义 3**<sup>[10]</sup> 令  $\mathcal{A}', \mathcal{A}, \mathcal{A}''$  是 3 个 Abel 范畴, 如果三角函子的图



满足:

- (i)  $(i^*, i_#, i')$  与  $(j_!, j_*, j_#)$  是伴随 3 元组,
- (ii) 函子  $i_#, j_!$  与  $j_*$  是满且忠实的,
- (iii)  $\text{Im } i_# = \text{Ker } j_*$ ,

那么称上图为  $\mathcal{A}$  相对于  $\mathcal{A}'$  和  $\mathcal{A}''$  的一个粘合,记为  $R(\mathcal{A}', \mathcal{A}, \mathcal{A}'')$ 。

关于 Abel 范畴中伴随对的性质可参考文献[7]中第 12.8 节。以下是一些关于 Abel 范畴的粘合的一些常用性质,具体证明过程参考文献[10-12]。

**命题 5** 令  $R(\mathcal{A}', \mathcal{A}, \mathcal{A}'')$  是一个粘合,则以下结论成立:

- (1) 函子  $i^*$  与  $j_!$  保持投射对象,  $i^!$  与  $j_*$  保持内射对象;
- (2)  $i^*$  与  $j_!$  是右正合函子,  $i^!$  与  $j_*$  是左正合函子,  $i_*$  与  $j^*$  是正合函子;
- (3)  $i^*j_! = 0, i^!j_* = 0$ ;
- (4) 余单位  $i^*i_* \rightarrow \text{Id}_{\mathcal{A}'}$  与  $j^*j_* \rightarrow \text{Id}_{\mathcal{A}''}$  以及单位  $\text{Id}_{\mathcal{A}} \rightarrow i^!i_*$  与  $\text{Id}_{\mathcal{A}} \rightarrow j^*j_!$  都是自然同构;
- (5) 对于任意的  $A \in \mathcal{A}$ , 存在长正合列

$$0 \rightarrow \ker \varepsilon_A \rightarrow j_!j^*A \xrightarrow{\varepsilon_A} A \rightarrow i_*i^*A \rightarrow 0$$

与

$$0 \rightarrow i_*i^!A \rightarrow A \xrightarrow{\eta_A} j_*j^*A \rightarrow \text{coker } \eta_A \rightarrow 0,$$

其中  $\ker \varepsilon_A, \text{coker } \eta_A \in \text{Im } i_*$ 。

**命题 6** 令  $R(\mathcal{A}', \mathcal{A}, \mathcal{A}'')$  是一个粘合,若  $j_*$  是正合函子,则  $j^*$  保持投射对象。另外,若  $M \in \text{FPR}(\mathcal{A})$ , 则  $j^*M \in \text{FPR}(\mathcal{A}'')$ , 从而函子  $j_*$  保持 FT-内射对象。

**证明** 设  $P$  是  $\mathcal{A}$  中的投射对象,  $X$  是  $\mathcal{A}''$  中的任意对象,考虑正合列  $0 \rightarrow X \rightarrow E \rightarrow L \rightarrow 0$ , 其中  $E$  是  $\mathcal{A}$  中的内射对象。由假设有  $0 \rightarrow j_*X \rightarrow j_*E \rightarrow j_*L \rightarrow 0$  是正合的,所以

$$0 \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}}(P, j_*X) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}}(P, j_*E) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}}(P, j_*L) \rightarrow 0$$

正合。又因为

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}}(P, j_*X) & \rightarrow & \text{Hom}_{\mathcal{A}}(P, j_*E) & \rightarrow & \text{Hom}_{\mathcal{A}}(P, j_*L) & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow \cong & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong & & \\ 0 \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}''}(j^*P, X) & \rightarrow & \text{Hom}_{\mathcal{A}''}(j^*P, E) & \rightarrow & \text{Hom}_{\mathcal{A}''}(j^*P, L) & \rightarrow & \text{Ext}_{\mathcal{A}''}^1(j^*P, X) \rightarrow 0 \end{array}$$

是交换图。所以  $\text{Ext}_{\mathcal{A}''}^1(j^*P, X) = 0$ , 即  $j^*P$  是  $\mathcal{A}''$  中的投射对象。另外,当  $M \in \text{FPR}(\mathcal{A})$  时,存在正合列  $0 \rightarrow P_n \rightarrow P_{n-1} \rightarrow \dots \rightarrow P_1 \rightarrow P_0 \rightarrow M \rightarrow 0$ , 其中  $P_i$  是  $\mathcal{A}$  中的有限生成投射对象, 所以

$$0 \rightarrow j^*P_n \rightarrow \dots \rightarrow j^*P_1 \rightarrow j^*P_0 \rightarrow j^*M \rightarrow 0$$

在  $\mathcal{A}''$  中也是正合的。由文献[13]中引理 1 可知,  $j^*$  保持生成子, 所以  $j^*P_i$  在  $\mathcal{A}''$  中还是有限生成投射的, 因此  $j^*M$  在  $\mathcal{A}''$  中有有限投射分解。最后,关于  $j_*$  保持 FT-内射对象的验证和上述  $j^*$  保持投射对象的验证是类似的, 此处不再重复。

设  $\mathcal{B}$  是  $\mathcal{A}$  的一个满子范畴。为了表述方便,以下记  $\text{FT-dim}_{\mathcal{B}} = \sup \{ \text{FT-id}_{\mathcal{B}} B \mid B \in \mathcal{B} \}$ 。

**命题 7** 令  $R(\mathcal{A}', \mathcal{A}, \mathcal{A}'')$  是一个粘合,假设  $\mathcal{A}''$  有足够多的 FT-内射对象,  $X$  是  $\mathcal{A}''$  中的任意对象,则

$$\text{FT-id}_{\mathcal{A}}(j_*X) \leq \text{FT-id}_{\mathcal{A}''}X + \text{FT-dim}_{\mathcal{A}}(i_*\mathcal{A}') + 1. \tag{1}$$

**证明** 首先,若  $\text{FT-id}_{\mathcal{A}''}X = \infty$ , 则式(1)显然成立。以下考虑  $\text{FT-id}_{\mathcal{A}''}X$  有限的情况。

设  $\text{FT-dim}_{\mathcal{A}}(i_*\mathcal{A}') = n$ , 对  $\text{FT-id}_{\mathcal{A}''}X$  进行归纳总结。假设式(1)对所有  $\text{FT-id}_{\mathcal{A}''}X < m$  都成立, 其中  $m$  是任意正整数, 即此时有  $\text{FT-id}_{\mathcal{A}}(j_*X) \leq \text{FT-id}_{\mathcal{A}''}X + n + 1 \leq m - 1 + n + 1 = m + n$ 。当  $\text{FT-id}_{\mathcal{A}''}X = m$  时, 由命题 3, 考虑正合列

$$0 \rightarrow X \xrightarrow{f_0} E_0 \xrightarrow{f_1} E_1 \xrightarrow{f_2} \dots \xrightarrow{f_m} E_m \rightarrow 0,$$

其中  $E_0, E_1, \dots, E_{m-1}$  是内射的,  $E_m$  是 FT-内射对象。令  $L = \text{Im } f_1$ , 显然  $\text{FT-id}_{\mathcal{A}''}L \leq m - 1$ , 并且  $\text{FT-id}_{\mathcal{A}}(j_*L) \leq m + n$ 。由于  $j_*$  是一个左正合函子, 因此短正合列

$$0 \rightarrow X \rightarrow E_0 \rightarrow L \rightarrow 0$$

诱导出正合列

$$0 \rightarrow j_*X \xrightarrow{j_*f_0} j_*E_0 \xrightarrow{j_*f_1} j_*L \rightarrow \text{coker } j_*f_1 \rightarrow 0.$$

应用正合函子  $j^*$ , 则可诱导出序列

$$0 \rightarrow X \rightarrow E_0 \rightarrow L \rightarrow j^*(\text{coker } j_* f_1) \rightarrow 0$$

也是正合的,因此  $\text{coker } j_* f_1 \in \ker j^* = \text{Im } i_*$ 。又因为  $\text{FT-dim}_{\mathcal{B}}(i_* \mathcal{B}') = n$ , 所以  $\text{FT-id}_{\mathcal{B}}(\text{coker } j_* f_1) \leq n$ 。由正合列

$$0 \rightarrow \text{coker } j_* f_0 \rightarrow j_* L \rightarrow \text{coker } j_* f_1 \rightarrow 0$$

以及命题 4(1)(d), 有  $\text{FT-id}_{\mathcal{B}}(\text{coker } j_* f_0) \leq m+n$ , 因此, 考虑正合列

$$0 \rightarrow j_* X \xrightarrow{j_* f_0} j_* E_0 \rightarrow \text{coker } j_* f_0 \rightarrow 0,$$

注意根据命题 5(1)可知此处的  $j_* E_0$  是内射对象。再次利用命题 4(1)(d), 有  $\text{FT-id}_{\mathcal{B}}(j_* X) \leq m+n+1$  成立。

**定理 1** 令  $R(\mathcal{B}', \mathcal{B}, \mathcal{B}'')$  是一个粘合, 并且假设范畴  $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$  与  $\mathcal{B}''$  有足够多的 FT-内射对象, 则

- (1)  $\text{fPD}_{\mathcal{B}} \leq \text{FT-dim}_{\mathcal{B}}(i_* \mathcal{B}') + \text{fPD}_{\mathcal{B}''} + 1$ ,
- (2)  $\text{FT-dim}_{\mathcal{B}}(i_* \mathcal{B}') \leq \text{fPD}_{\mathcal{B}'} + \sup \{ \text{FT-id}_{\mathcal{B}}(i_* T) \mid T \in \mathcal{B}' \text{ 是 FT-内射对象} \}$ ,
- (3)  $\text{fPD}_{\mathcal{B}''} \leq \text{fPD}_{\mathcal{B}} + \sup \{ \text{FT-id}_{\mathcal{B}''}(j^* T) \mid T \in \mathcal{B} \text{ 是 FT-内射对象} \}$ 。

**证明** (1) 令  $A \in \mathcal{B}$ , 且  $\text{FT-id}_{\mathcal{B}}(i_* \mathcal{B}') = n, \text{fPD}_{\mathcal{B}''} = m$ , 考虑正合列

$$0 \rightarrow i_* i^! A \rightarrow A \xrightarrow{\eta_A} j_* j^* A \rightarrow \text{coker } \eta_A \rightarrow 0,$$

则  $i_* i^! A \in i_* \mathcal{B}'$ , 由命题 5 可知  $\text{coker } \eta_A \in i_* \mathcal{B}'$ , 所以由假设有

$$\text{FT-id}_{\mathcal{B}}(i_* i^! A), \text{FT-id}_{\mathcal{B}}(\text{coker } \eta_A) \leq n.$$

再根据命题 4(2), 有

$$\begin{aligned} \text{FT-id}_{\mathcal{B}} A &\leq \max \{ \text{FT-id}_{\mathcal{B}}(\text{coker } \eta_A) + 1, \text{FT-id}_{\mathcal{B}}(j_* j^* A), \text{FT-id}_{\mathcal{B}}(i_* i^! A) \} \\ &\leq \max \{ \text{FT-id}_{\mathcal{B}''}(j^* A) + n + 1 \} \\ &\leq m + n + 1, \end{aligned} \tag{2}$$

其中, 式(2)中第 2 个“ $\leq$ ”成立是由于命题 6, 即

$$\text{FT-id}_{\mathcal{B}}(j_* j^* A) \leq \text{FT-id}_{\mathcal{B}''} j^* A + \text{FT-dim}_{\mathcal{B}}(i_* \mathcal{B}') + 1 \leq m + n + 1.$$

(2) 对于任意的  $A' \in \mathcal{B}'$ , 假设  $\sup \{ \text{FT-id}_{\mathcal{B}}(i_* T) \mid T \in \mathcal{B}' \text{ 是 FT-内射对象} \} = n < \infty$ 。须要验证  $\text{FT-id}_{\mathcal{B}}(i_* \mathcal{B}') \leq \text{FT-id}_{\mathcal{B}'} A' + n$ 。若  $A'$  是  $\mathcal{B}'$  中的 FT-内射对象, 则由假设知  $\text{FT-id}_{\mathcal{B}}(i_* A') \leq n$ , 此时原命题成立。假设  $\text{FT-id}_{\mathcal{B}'} A' = m$ , 则存在正合列

$$0 \rightarrow A' \rightarrow E_0 \rightarrow E_1 \rightarrow \dots \rightarrow E_{m-1} \rightarrow E_m \rightarrow 0,$$

其中每个  $E_i$  都是  $\mathcal{B}'$  中的 FT-内射对象, 应用正合函子  $i_*$ , 则有长正合列

$$0 \rightarrow i_* A' \rightarrow i_* E_0 \rightarrow i_* E_1 \rightarrow \dots \rightarrow i_* E_{m-1} \rightarrow i_* E_m \rightarrow 0.$$

每个  $\text{FT-id}_{\mathcal{B}}(i_* E_i) \leq n$ , 因此容易验证  $\text{FT-id}_{\mathcal{B}}(i_* A') \leq m + n$ 。

(3) 假设  $\text{fPD}_{\mathcal{B}} = m < \infty, \sup \{ \text{FT-id}_{\mathcal{B}''}(j^* T) \mid T \in \mathcal{B} \text{ 是 FT-内射对象} \} = n < \infty$ , 令  $A''$  是  $\mathcal{B}''$  中的任意一个对象, 则由假设有  $\text{FT-id}_{\mathcal{B}}(j_* A'') \leq m$ , 所以存在长正合列

$$0 \rightarrow j_* A'' \rightarrow E_0 \rightarrow E_1 \rightarrow \dots \rightarrow E_{m-1} \rightarrow E_m \rightarrow 0,$$

其中每个  $E_i$  都是  $\mathcal{B}$  中的 FT-内射对象。由于  $j^*$  是正合函子, 所以有长正合列

$$0 \rightarrow A'' \rightarrow j^* E_0 \rightarrow j^* E_1 \rightarrow \dots \rightarrow j^* E_{m-1} \rightarrow j^* E_m \rightarrow 0.$$

由假设可知每个  $\text{FT-id}_{\mathcal{B}''}(j^* E_i) \leq n$ , 所以同上述(2), 容易验证  $\text{fPD}_{\mathcal{B}''} \leq m + n$ 。

由上述定理 1, 可得下述推论。

**推论 2** 令  $(\mathcal{B}', \mathcal{B}, \mathcal{B}'')$  是一个粘合, 并且假设范畴  $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$  与  $\mathcal{B}''$  有足够多的 FT-内射对象, 则

$$\text{fPD}_{\mathcal{B}} \leq \text{fPD}_{\mathcal{B}'} + \text{fPD}_{\mathcal{B}''} + \sup \{ \text{FT-id}_{\mathcal{B}}(i_* T) \mid T \in \mathcal{B}' \text{ 是 FT-内射对象} \} + 1.$$

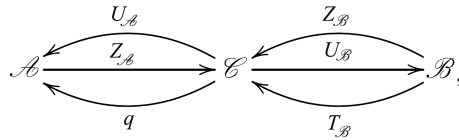
**例 1** 设  $R$  是环,  $e$  是  $R$  的幂等元, 由文献[11]可知, 存在粘合

$$\begin{array}{ccc} \text{Mod-}R/ReR & \xrightleftharpoons[\text{Hom}_R(R/ReR, -)]{inc} & \text{Mod-}R & \xrightleftharpoons[\text{Hom}_{eRe}(eR, -)]{e(-)} & \text{Mod-}eRe, \\ & \xleftarrow{R/ReR \otimes_R -} & & \xleftarrow{Re \otimes_{eRe} -} & \\ & & & & \end{array}$$

那么

$$\text{fPDR} \leq \text{fPD}(R/ReR) + \text{fPD}(eRe) + \sup \{ \text{FT-id}_R(T) \mid T \in \text{Mod-}R/ReR \text{ 是 FT-内射模} \} + 1.$$

**例 2** 设  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  是 Abel 范畴,  $G: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$  是一个右正合函子, 定义逗号范畴  $\mathcal{C} = (G, \mathcal{B}, \mathcal{A})$ :  $\mathcal{C}$  的对象是三元组  $(A, B, f)$  且满足  $f: G(B) \rightarrow A$  是  $\mathcal{A}$  中的态射;  $\mathcal{C}$  的态射  $\gamma: (A, B, f) \rightarrow (A', B', f')$  满足  $f\alpha = G(\beta)f$ , 其中  $\alpha: A \rightarrow A', \beta: B \rightarrow B'$ , 由文献[10]中例 2.12 可知,  $\mathcal{C}$  也是 Abel 范畴, 并且存在粘合



那么

$$\text{fPD } \mathcal{C} \leq \text{fPD } \mathcal{A} + \text{fPD } \mathcal{B} + \sup \{ \text{FT-id}_{\mathcal{C}}(Z_{\mathcal{A}}(X)) \mid X \in \mathcal{A} \text{ 是 FT-内射对象} \} + 1.$$

参考文献:

[1] BASS H. Finitistic dimension and a homological generalization of semiprimary rings[J]. Transactions of the American Mathematical Society, 1960, 95:466-488.

[2] GLAZ S. Commutative coherent rings[M]. Berlin: Springer, 1989:55-63.

[3] 孙小武. FT-内射模与 FT-平坦模[D]. 成都: 四川师范大学, 2015.  
SUN Xiaowu. FT-injective modules and FT-flat modules[D]. Chengdu: Sichuan Normal University, 2015.

[4] ZHANG Xiaolei, WANG Fanggui. The small finitistic dimensions of commutative rings[J]. Journal of Commutative Algebra, 2023, 15 (1):131-138.

[5] WANG F G, ZHOU D H, KIM H, et al. Every Prüfer ring does not have small finitistic dimension at most one[J]. Communications in Algebra, 2020, 48(12):5311-5320.

[6] WANG Fanggui, ZHOU Dechuan, CHEN Dan. Module-theoretic characterizations of the ring of finite fractions of a commutative ring[J]. Journal of Commutative Algebra, 2022, 14(1):141-154.

[7] 章璞. 三角范畴与导出范畴[M]. 北京: 科学出版社, 2015:409-440.  
ZHANG Pu. Triangulated categories and derived categories[M]. Beijing: Science Press, 2015:409-440.

[8] HILTON P, STAMMBACH U. A course in homological algebra[M]. New York: Springer, 1997:40-83.

[9] POPESCU N. Abelian categories with applications to rings and modules[M]. London-New York: Academic Press, 1973:16-63.

[10] PSAROUDAKIS C. Homological theory of recollements of abelian categories[J]. Journal of Algebra, 2014, 398:63-110.

[11] PSAROUDAKIS C, VITÓRIA J. Recollements of module categories[J]. Applied Categorical Structures, 2014, 22(4):579-593.

[12] FRANJOU V, PIRASHVILI T. Comparison of abelian categories recollements[J]. Documenta Mathematica, 2004, 9:41-56.

[13] 姚海楼, 冯瑶瑶. 阿贝尔范畴粘合上的表现维数[J]. 北京工业大学学报, 2019, 45(8):809-814.  
YAO Hailou, FENG Yaoyao. Presented dimensions on recollements of Abelian categories[J]. Journal of Beijing University of Technology, 2019, 45(8):809-814.

(编辑: 陈丽萍)