

基于连通度优化的图的 $S-T$ 重构

吕臻,魏宗田*

(西安建筑科技大学理学院,陕西 西安 710055)

摘要:提出图的颠覆策略和 $S-T$ 重构概念,讨论了基于连通度优化的图的 $S-T$ 重构问题。构造出一类具有特殊结构的叠图,解决了由两个完全图构成的叠图的基于连通度优化的最优重构问题。

关键词:颠覆策略;叠图;图重构;连通度优化

中图分类号:O157 **文献标志码:**A

引用格式:吕臻,魏宗田. 基于连通度优化的图的 $S-T$ 重构[J]. 山东大学学报(理学版),2025,60(12):156-160,172.

$S-T$ reconstruction of graph based on connectivity optimization

LYU Zhen, WEI Zongtian*

(Department of Mathematics, Xi'an University of Architecture and Technology, Xi'an 710055, Shaanxi, China)

Abstract: The concept of subversion strategy and the $S-T$ reconstruction of graphs is proposed, the problem of $S-T$ reconstruction of graph based on connectivity optimization is discussed. A class of overlap graph with special structure is constructed, the optimal reconstruction problem of the overlap of two complete graphs based on connectivity optimization is solved.

Key words: subversion strategy; overlap graph; graph reconstruction; connectivity optimization

1 引言与预备知识

网络的抗毁性与其对应连通图的连通度有着密切关系,在图与网络中,抗毁性参数是衡量网络抗毁性的重要指标。连通度是最基本的抗毁性参数之一,已有不少连通度的研究成果^[1-4]。

当一个网络设计完成时,其抗毁能力就已经确定。对于网络破坏者而言,期望以最小的代价得到最严重的破坏,从这个意义上讲,图的一个最小点割,连同与之关联的边,构成一个完整的破坏策略。若一个图的连通性因失去这些点及相关联的边而丧失,在试图恢复其连通性时可以选择重建或修复。因前者代价大、耗时长,所以后者更为可行。为利用最低的成本,使网络修复效果达到最佳,不同于传统意义上的重构^[5-7],本文提出并研究连通度意义下相对于破坏策略的图的 $S-T$ 重构问题。

本文所考虑的图是有限无向简单图,未加定义的概念和术语见文献[8]。

首先给出下列基本概念。

定义 1 设 $G=(V,E)$ 是一个非完全连通图, S 是 G 的一个点割集, T 是 E 中所有与 S 中点关联的边所构成的边子集,称 (S,T) 为 G 的一个颠覆策略。满足 $|S|=\kappa(G)$ 且使得 $\omega(G-S)$ 最大的 (S,T) ,称为 G 的一个最佳颠覆策略,其中 $\kappa(G)$ 和 $\omega(G-S)$ 分别表示图 G 的连通度和 $G-S$ 的分支数。

定义 2 设 G 是一个非完全连通图, (S,T) 为 G 的一个颠覆策略。在剩余子图 $G-S$ 中添加 $|S|$ 个点和 $|T|$ 条边后所得的图,称为 G 的一个 $S-T$ 重构,记为 G^R 。

定义 3 设 G 是一个非完全连通图, (S,T) 是 G 的一个颠覆策略, G^R 是 G 的一个 $S-T$ 重构,称 $\kappa(G^R)/$

$\kappa(G)$ 为该重构的连通度恢复率,记为 ρ ,即 $\rho = \kappa(G^R) / \kappa(G)$ 。使 ρ 达到最大值的 G^R 称为 G 的最优 $S-T$ 重构。

由定义易知,一个图相对于某个颠覆策略的最优 $S-T$ 重构可能不唯一。为叙述方便,约定下面所涉及的重构都是 $S-T$ 重构。

由 Whitney 不等式^[9]易得以下结论。

引理 1 设 G 是一个非完全连通图,则 $\kappa(G) \leq \delta(G) \leq \bar{d}(G)$,其中 $\kappa(G)$ 表示图 G 的连通度, $\delta(G)$ 表示图 G 的最小顶点度, $\bar{d}(G)$ 表示图 G 的平均顶点度。

引理 2 对任意连通图 G ,有 $\kappa(G) \leq \left\lfloor \frac{2\varepsilon}{\nu} \right\rfloor$,其中, ε 和 ν 分别为图 G 的边数与点数。

推论 1 设 G 是一个 k -正则图,则对于 G 的任何重构 G^R ,都有 $\kappa(G^R) \leq k$ 。

2 几类基本图的最优重构

本章研究树、圈、轮图等几类基本图在最佳颠覆策略下的最优重构问题。采用连点成路,连路成圈的连通度递增思路。

2.1 树的最优重构

对于树 $G, \kappa(G) = 1$,任意一个割点和相关联的边,都构成一个颠覆策略。设 $S = \{v\}$ 为树 G 的一个割点集,割点颠覆会产生 $\omega(G-S) = d(v)$ 个连通分支,其中 $|S| = 1$,颠覆边数 $|T| = d(v)$ 。用 $d(v)$ 条边将 $d(v)$ 个分支与 1 个颠覆点连接起来,得到的重构 G^R ,显然有 $\kappa(G^R) \leq 1$ 。因此,对于树,存在最优重构 G^R ,使 $\kappa(G^R) = 1$,连通度恢复率 $\rho = 1$,最优重构仍为树。

2.2 圈的最优重构

对于圈 $C_n, \kappa(C_n) = 2$,任意 1 个点的 2 个邻点及其所关联的边都构成一个颠覆策略。对于圈图 C_n ,任一颠覆策略使剩余子图成为孤立点或 2 个连通分支。颠覆点数 $|S| = 2$,颠覆边数 $|T| = \omega(C_n - S) + |S|$,用 $|T|$ 条边将 $\omega(C_n - S)$ 个分支与 2 个颠覆点连接,得到 C_n 的重构 C_n^R ,显然有 $\kappa(C_n^R) \leq 2$ 。因此,对于圈 C_n ,存在最优重构 C_n^R ,使 $\kappa(C_n^R) = 2$,连通度恢复率 $\rho = 1$,最优重构仍为圈。

2.3 轮图的最优重构

对于轮图 $W_{1,n}, \kappa(W_{1,n}) = 3$,中心点及与中心点相邻的任意 2 个不相邻的点及其关联的边构成一个 (S, T) 颠覆策略。

任一颠覆策略使剩余子图成为 2 个连通分支,且每个分支的连通度不超过 1,颠覆点数 $|S| = 3$,颠覆边数 $|T| = n + 4$ 。首先,将剩余子图和颠覆点用边连接成路,恢复为 1-连通图。然后,将路加边成圈,恢复为 2-连通的圈 C_{n+1} ,剩余边数 $c = |T| - 5 = n - 1$ 。最后,对圈 C_{n+1} 中的顶点标号 $v_i (i = 0, 1, 2, \dots, n)$,按照如下方式加边:(1) 当 n 为偶数, i 与 $i + \frac{n}{2}$,之间连一条边, $i = 0, 1, 2, \dots, \frac{n}{2}$,共添加 $\frac{n}{2} + 1$ 条边;当 n 为奇数时, i 与 $i + \frac{n+1}{2}$ 之间连一条边, $i = 0, 1, 2, \dots, \frac{n-1}{2}$,共添加 $\frac{n+1}{2}$ 条边,可恢复为 3-连通图。(2) 在不相邻的顶点之间继续加边,直至添加 $n-1$ 条边为止。

按照上述加边规则,完成重构得到 $W_{1,n}^R$,其中 $\kappa(W_{1,n}^R) = 3$ 且连通度恢复率 $\rho = 1$,显然, $W_{1,n}^R$ 为一种最优重构。以 $W_{1,9}$ 为例,重构结果见图 1。

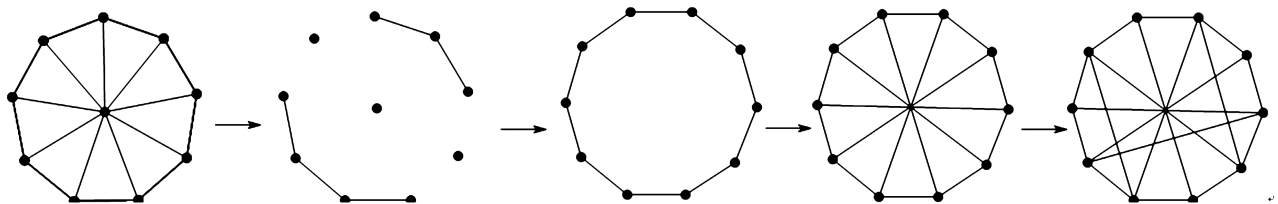


图 1 轮图 $W_{1,9}$ 的重构
Fig.1 Reconstruction of wheel $W_{1,9}$

3 叠图的最优重构

本章给出叠图的定义,并研究其最优重构问题。给出了最佳颠覆策略下的最优重构方法和算法。

定义 4 设 K_a 和 K_b 为 2 个完全图,将 K_a 和 K_b 重合 p 个顶点得到的图称为 K_a 和 K_b 的叠图,记为 $K_a *^p K_b$,其中, $a, b, p \in \mathbf{Z}^+$, $2 \leq a \leq b$, $1 \leq p \leq a-1$ 。

图 2(a) 表示叠图 $K_3 *^1 K_4$,点 4 为重合点。图 2(b) 表示叠图 $K_6 *^3 K_9$,点 4、5、6 为重合点。

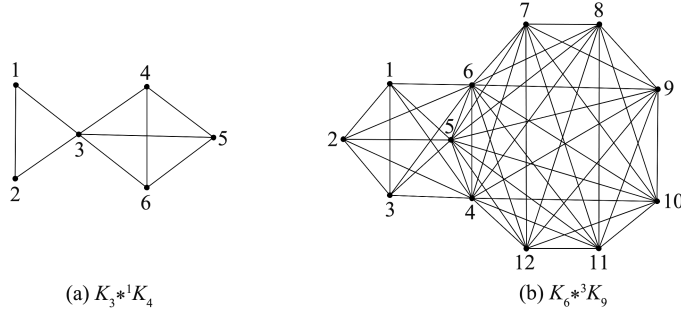


图 2 叠图 $K_3 *^1 K_4$ 和 $K_6 *^3 K_9$

Fig.2 Overlap graphs of $K_3 *^1 K_4$ and $K_6 *^3 K_9$

由定义可知,叠图 $K_a *^p K_b$ 中 p 个重合点构成的点割集 S 以及与 S 关联的边子集 T 构成该叠图的最佳颠覆策略 (S, T) ,其剩余子图为完全图 K_{a-p} 和 K_{b-p} 。叠图的最优重构主要考虑如何在 K_{a-p} 、 K_{b-p} 和 p 个重合点之间加边的问题。

$$\text{在叠图 } K_a *^p K_b \text{ 中, } \nu = b+a-p, \varepsilon = C_b^2 + C_a^2 - C_p^2 = \frac{1}{2}(b^2 + a^2 - p^2 - b - a + p)。$$

3.1 重构方法

对于叠图 $K_a *^p K_b$,其中 $a, b, p \in \mathbf{Z}^+$, $2 \leq a \leq b$, $1 \leq p \leq a-1$,设其最佳颠覆策略为 (S, T) ,则 $|S| = p$, $|T| = C_p^2 + p(b-p) + p(a-p) = \left(a+b-\frac{1}{2}\right)p - \frac{3}{2}p^2$ 。由 K_{a-p} 、 K_{b-p} 、 \bar{K}_p 以及边集 T 构造最优重构 G^R ,分下列 2 步进行。

步骤 1 将 x 个点分配给 K_{a-p} ,将 $p-x$ 个点分配给 K_{b-p} ,构造 2 个完全图 K_{a-p+x} 和 K_{b-x} ,其中 x 为下列整数规划的最优解。

$$\begin{aligned} \min Z &= (b-a+p-2x)^2, \\ \text{s.t. } &\begin{cases} 0 \leq x \leq p, \\ x \in \mathbf{Z}^+. \end{cases} \end{aligned}$$

当 $b-a \geq p$ 时, $x = p$; 当 $b-a < p$ 时, $x = \left\lfloor \frac{b+p-a}{2} \right\rfloor$ 。

步骤 2 在完全图 K_{a-p+x} 与 K_{b-x} 点之间添加 c 条边,其中 $c = |T| - (C_{a-p+x}^2 - C_{a-p}^2) - (C_{b-x}^2 - C_{b-p}^2)$ 。

当 $x = p$ 时,

$$\begin{aligned} c &= |T| - (C_a^2 - C_{a-p}^2) \\ &= \left(a+b-\frac{1}{2}\right)p - \frac{3}{2}p^2 - \left[\frac{1}{2}a(a-1) - \frac{1}{2}(a-p)(a-p-1)\right] \\ &= bp - p^2. \end{aligned}$$

当 $x = \left\lfloor \frac{b+p-a}{2} \right\rfloor$ 时,为叙述方便,记

$$b-x = m, \quad a-p+x = n. \quad V(K_{b-x}) = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}, \quad V(K_{a-p+x}) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\},$$

其中 $m \geq n$ 。加边规则(*)为:将 v_i 与 u_{i+k+nr} 连一条边, $i = 1, 2, \dots, n$, $k \leq \left\lfloor \frac{c}{[m, n]} \right\rfloor$ 且为非负整数, $r \leq \frac{[m, n]}{n} - 1$

且为非负整数,直到添加 c 条边为止,其中 $[m, n]$ 表示 m, n 的最小公倍数, $i+k+nr$ 关于模 m 同余。

(1) 易知 $c < mn$, 且当 m, n 互素时, $\frac{[m, n]}{n} - 1 = m - 1$, $\left\lfloor \frac{c}{[m, n]} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{c}{m \cdot n} \right\rfloor = 0$, 故 $k = 0$ 。

(2) 当 $m = n$ 时, $r = 0$ 。

关于图 G^R 有以下定理。

定理 1 由上述方法构造的图 G^R , 必为叠图 $K_a *^p K_b$ 关于最佳颠覆策略 (S, T) 的最优重构。

易知, $c \geq a - p + x$ 。显然, 上述方法构造的图使 $\delta(G^R)$ 达到最大值 $a - p + x - 1 + \left\lfloor \frac{c}{a - p + x} \right\rfloor$ 。因为对任何图 G 都有 $\kappa(G) \leq \delta(G)$, 只需证明下面的定理 2, 定理 1 就成立。

定理 2 设 $m, n, k \in \mathbf{Z}^+$, 且 $m \geq n \geq 2$, $1 \leq k \leq m - 1$, G 是在完全图 K_m 与 K_n 之间按照规则 $(*)$ 添加 l 条边所得之图, 其中 $nk \leq l < n(k + 1)$, 则有 $\kappa(G) = \delta(G) = n - 1 + k$ 。

证明 首先设 G 是在完全图 K_m 与 K_n 之间按规则 $(*)$ 加 l 条边得到的图, 其中 $m \geq n \geq 2$, $nk \leq l < n(k + 1)$, $1 \leq k \leq m - 1$ 。显然, 若 $l = nk$ 时, $\kappa(G) = \delta(G) = n - 1 + k$, 则对所有的 $nk \leq l < n(k + 1)$, 都有 $\kappa(G) = n - 1 + k$ 。所以, 只要证明 $1 \leq k \leq m - 1$ 时, $l = nk$ 成立, 定理即得证。

因为 $\delta(G) = n - 1 + k$, 且 K_n 中必含 G 的最小度点, 以及 $\kappa(G) \leq \delta(G)$, 只需证明 $\kappa(G) \geq \delta(G)$ 。

设 C 是 G 的一个点割, 则 $C \cap V(K_m) \neq \emptyset$, $C \cap V(K_n) \neq \emptyset$, 又因为 $G - C$ 的任何 2 个分支既不同时含有 K_m 中的点, 也同时含有 K_n 中的点, 所以必有 $\omega(G - C) = 2$, 设 F_1, F_2 是 $G - C$ 的 2 个分支, 不失一般性, 设 F_1 只含有 K_n 中的点, F_2 只含有 K_m 中的点, 于是有

$$\begin{aligned} C &= C \cap V(K_m) + C \cap V(K_n), \\ C \cap V(K_n) &= V(K_n) - V(F_1), \quad C \cap V(K_m) = V(K_m) - V(F_2) = N_G(V(F_1)) \cap V(K_m), \\ N_G(V(F_2)) \cap V(F_1) &= \emptyset, \quad N_G(V(F_1)) \cap V(F_2) = \emptyset. \end{aligned}$$

定理 2 的示意如图 3 所示。

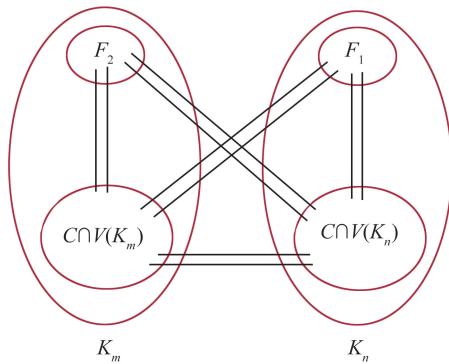


图 3 定理 2 示意图
Fig.3 Diagram of theorem 2

下面关于 k 用数学归纳法证明 $|C| \geq \delta(G)$, 为方便, 记 $l = nk$ 时, $G = G_k$ 。

当 $k = 1$ 时, 因 K_n 中的每个点在 K_m 中恰有一个邻点且互不相同, 故有 $|C| = |C \cap V(K_n)| + |C \cap V(K_m)| = n - |V(F_1)| + |N_G(V(F_1)) \cap V(K_m)| = n = \delta(G_1)$, 结论成立。

设 $k = t$ 时结论成立, 即对 G_t 的任一点割 C_t , 都有 $|C_t| \geq \delta(G_t) = n - 1 + t$ 。

设 F_1 是 $G_t - C_t$ 的来自 K_n 的一个分支, 记 $N_{G_t}(V(F_1)) \cap V(K_m) = S_t$, 则有

$$|C_t| = |V(K_n - F_1)| + |S_t| = n - |V(F_1)| + |S_t|. \tag{1}$$

当 $k = t + 1$ 时, 对于 G_{t+1} , 若 C_{t+1} 是其一个点割, 且使上述 F_1 是 $G_{t+1} - C_{t+1}$ 的一个分支, 则应有

$$|C_{t+1}| = n - |V(F_1)| + |S_{t+1}|, \tag{2}$$

其中 $S_{t+1} = N_{G_{t+1}}(V(F_1)) \cap V(K_m)$ 。

显然 $S_t \subseteq S_{t+1}$ 。由加边规则 $(*)$, $\delta(G_{t+1}) = \delta(G_t) + 1 = n + t$, G_{t+1} 中属于 K_n 的每个点, 相较于 G_t , 在 K_m 中各增加了一个邻点, 且新增的邻点与已有的邻点都不同, 因此 $S_t \neq S_{t+1}$, 即 $|S_{t+1}| \geq |S_t| + 1$ 。

由规则 $(*)$ 及归纳假设, 可知

$$|C_{t+1}| \geq |C_t| + 1 \geq n - 1 + t + 1 = n + t = \delta(G_{t+1}),$$

再由 F_1 的任意性, 即有 $k=t+1$ 时, 结论成立。定理得证。

由定义 3、4 和定理 1 可得推论 2。

推论 2 叠图 $K_a *^p K_b$, 其中 $a, b, p \in \mathbf{Z}^+$, $2 \leq a \leq b$, $1 \leq p \leq a-1$, 在最佳颠覆策略 (S, T) 下的最优重构 G^R 的连通度恢复率为 $\rho = \frac{\kappa(G^R)}{p}$ 。

3.2 叠图的最优重构算法

根据上节给出的构造方法和定理 1, 给出叠图 $K_a *^p K_b$ 相对于最佳颠覆策略的最优重构算法, 基本步骤如下。

步骤 1 输入叠图 $K_a *^p K_b (a, b, p \in \mathbf{Z}^+, 2 \leq a \leq b, 1 \leq p \leq a-1)$, 最佳颠覆策略 (S, T) , 颠覆点数 $|S| = p$, 颠覆边数 $|T| = C_p^2 + p(b-p) + p(a-p) = \left(a+b-\frac{1}{2}\right)p - \frac{3}{2}p^2, x = \left\lfloor \frac{b+p-a}{2} \right\rfloor (b-a > p \text{ 时}, x=p)$ 。

步骤 2 构造 2 个完全图 K_{a-p+x} 和 K_{b-x} 。

步骤 3 根据 $b-a+p$ 的奇偶性, 计算 c , 按照加边规则(*)在完全图 K_{a-p+x} 和 K_{b-x} 之间添加 c 条边, 得到最优重构图 G^R 。

算例 考虑叠图 $K_6 *^3 K_{10}$ 的最优重构, 如图 4(a)、(b) 所示。

步骤 1 输入叠图 $K_6 *^3 K_{10}$ 。确定最佳颠覆策略 (S, T) , 其中颠覆点数 $|S| = 3$, 颠覆边数 $|T| = 33$, 经计算得 $x=3$ 。

步骤 2 将 3 个孤立点与阶数较小的 3 阶完全图结合成 6 阶完全图, 得到 K_7 与 K_6 , 如图 4(c) 所示。

步骤 3 $b-a+p$ 为奇数, 计算得 $c=21$, 在完全图 K_7 与 K_6 之间按规则(*)加 21 条边。记

$$V(K_7) = \{u_1, u_2, \dots, u_7\}, \quad V(K_6) = \{v_1, v_2, \dots, v_6\}。$$

由于 $k=0$, 故将 v_i 与 u_{i+6r} 连边, $i=1, 2, \dots, 6, r=0, 1, 2, 3$, 其中 $i+6r$ 关于模 7 同余。新增边集 $E = \{v_1u_1, v_2u_2, v_3u_3, v_4u_4, v_5u_5, v_6u_6, v_1u_7, v_2u_1, v_3u_2, v_4u_3, v_5u_4, v_6u_5, v_1u_6, v_2u_7, v_3u_1, v_4u_2, v_5u_3, v_6u_4, v_1u_5, v_2u_6, v_3u_7\}$ 。最终得到最优重构 $G^R, \kappa(G^R) = 8$, 如图 4(d)。

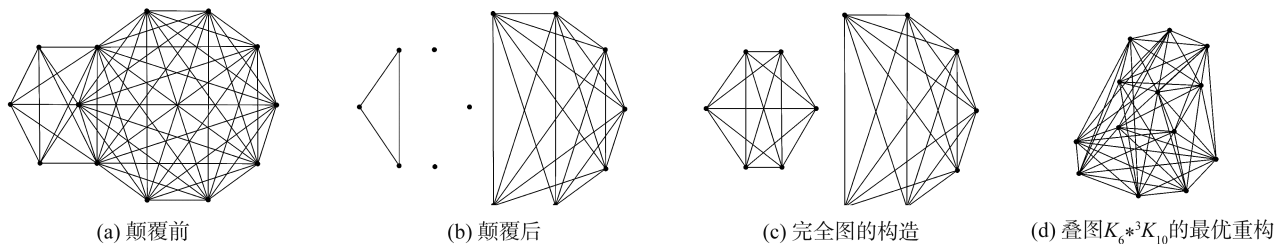


图 4 叠图 $K_6 *^3 K_{10}$ 及其重构
Fig.4 Overlap graph $K_6 *^3 K_{10}$ with reconstruction

3 结论

本文首次提出基于连通度优化的图的 $S-T$ 重构问题, 完全解决了一类特殊图——叠图的最优重构与算法。图的颠覆重构在灾后网络重建以及军事领域都有一定的实际应用价值, 是连通度优化问题在网络抗毁性方面的深化。后续研究需要考虑一般图的最优 $S-T$ 重构。

参考文献:

[1] CASABLANCA R M, DANKELMANN P, GODDARD W, et al. The maximum average connectivity among all orientations of a graph[J]. Journal of Combinatorial Optimization, 2021, 43(3):1-28.
[2] HENNING A M, OELLERMANN R O. The average connectivity of a digraph[J]. Discrete Applied Mathematics, 2003, 140(1):143-153.