山东大学学报(理学版)2025 年 11 月 第 60 卷 第 11 期
*Journal of Shandong University*(*Natural Science*), Vol.60, No.11, 2025 http://lxbwk.njournal.sdu.edu.cn

**文章编号**:1671-9352(2025)11-0070-09 DOI:10.6040/j.issn.1671-9352.0.2023.553

# 拟 $J$-∗-clean 环

李筱璇,殷晓斌*
(安徽师范大学数学与统计学院, 安徽 芜湖 241002)

**摘要**:若该环中所有元素都表示为一个拟投射元与一个 Jacobson 根中元素之和(且它们可以交换),称该环是(强)拟$J$-∗-clean 环。本文研究了拟 $J$-∗-clean 环的基本性质以及其与其他∗-环的关系,证明 $R$ 是强拟 $J$-∗-clean 环当且仅当 $R$ 是强∗-clean 环且 $R/J(R)$是强拟 $J$-∗-clean 环,当且仅当 $R/J(R)$是强拟 $J$-∗-clean 环,$R$ 中投射元是中心的且投射元模 $J(R)$可提升。

**关键词**:clean 环;∗-环;拟 $J$-clean 环;拟 $J$-∗-clean 环;强拟 $J$-∗-clean 环
**中图分类号**:O153.3 **文献标志码**:A
**引用格式**:李筱璇,殷晓斌.拟 $J$-∗-clean 环[J]. 山东大学学报(理学版),2025,60(11):70-78.

# Quasi $J$-∗-clean rings

LI Xiaoxuan, YIN Xiaobin*
(School of Mathematics and Statistics, Anhui Normal University, Wuhu 241002, Anhui, China)

**Abstract**: A ring is called (strongly) quasi $J$-∗-clean ring if each of its elements is a sum of a quasi-projection and an element of the Jacobson radical (that commute). The basic properties of this ring and some relations with other rings are studied. It is proved that $R$ is a strongly quasi $J$-∗-clean ring if and only if $R$ is a strongly ∗-clean ring and $R/J(R)$ is a strongly quasi $J$-∗-clean ring if and only if $R/J(R)$ is a strongly quasi $J$-∗-clean ring, every projection of $R$ is central and every projection of $R/J(R)$ is lifted to a projection of $R$.

**Key words**: clean ring; ∗-ring; quasi $J$-clean ring; quasi $J$-∗-clean ring; strongly quasi $J$-∗-clean ring

## 0 引言

本文中的环指含单位元的结合环。设 $R$ 为环,$Id(R)$、$N(R)$、$U(R)$、$P(R)$、$C(R)$、$U_c(R)$和 $J(R)$分别表示 $R$ 的幂等元之集、幂零元之集、可逆元之集、投射元之集、中心元之集、中心可逆元之集和 $R$ 的 Jacobson 根,$M_n(R)$表示环 $R$ 上的全体 $n$ 阶方阵环,$T_n(R)$表示 $R$ 上的 $n$ 阶上三角矩阵环。

称环 $R$ 是(强)clean 环[1],若 $R$ 中每个元素都可以表示为 1 个可逆元和 1 个投射元之和(且它们可以交换)。近年来出现许多对(强)clean 环的推广,如(强)$J$-clean 环[2]、(强)拟 clean 环[3]、(强)拟 $J$-clean 环[4]等。

Nicholson 等[5]引入 $J$-clean 环的概念。称环 $R$ 是 $J$-clean 环(半布尔环),如果 $R$ 中每个元素都表示为幂等元与 Jacobson 根中元素之和。Chen[2]引入强 $J$-clean 环的概念。称环 $R$ 是强 $J$-clean 环,如果 $R$ 中每个元素都表示为幂等元与 Jacobson 根中元素之和且二者可以交换。文献[2]中说明强 $J$-clean 环是强 clean 环,并举例说明反之不成立。

Tang 等[3]提出拟幂等元的概念,引入(强)拟 clean 环的概念。称元素 $a$ 是拟幂等元,如果 $a^2=ka$,或等价的,$a=ke$,其中 $k$ 是中心可逆元,$e$ 是幂等元。称环 $R$ 是(强)拟 clean 环,如果 $R$ 中每个元素都能表示为拟幂等元与可逆元之和(且二者可以交换)。

---

**收稿日期**:2023-12-29; **网络出版时间**:2025-03-26 10:56:43
**基金项目**:安徽省自然科学基金资助项目(2008085MA06);安徽省教育厅重点资助项目(gxyqZD2019009)
**第一作者**:李筱璇(1999— ),女,硕士研究生,研究方向为环论. E-mail:2194286835@qq.com
***通信作者**:殷晓斌(1972— ),男,教授,博士,研究方向为同调代数与环论. E-mail:xbyinzh@ahnu.edu.cn

王尧等[4]通过拟幂等元引入拟 $J$-clean 环的概念。称环 $R$ 是拟 $J$-clean 环,如果 $R$ 中每个元素都能表示为拟幂等元与 Jacobson 根中元素之和。文献[4]中给出拟 $J$-clean 环的若干例子,讨论它们的基本性质,并证明若 $R$ 是拟 $J$-clean 环,则全矩阵环 $M_n(R)$ 是拟 $J$-clean 环。

称环 $R$ 是*-环,若存在映射 $*:R\to R$,对任意 $x,y\in R$,均有 $(x+y)^*=x^*+y^*$, $(xy)^*=y^*x^*$ 且 $(x^*)^*=x$。称环 $R$ 中的*-运算为 proper 的[6],若对任意 $x\in R$,由 $xx^*=0$ 可推出 $x=0$。称元素 $p\in R$ 是投射元[6],若 $p^2=p^*=p$。显然,0 和 1 是投射元。

Vas[1]引入(强)*-clean 环的概念。称*-环 $R$ 是(强)*-clean 环,若 $R$ 中每个元素都能表示为 1 个可逆元和 1 个投射元之和(且它们可以交换)。Chen 等[7]引入强 $J$-*-clean 环的概念。称*-环 $R$ 是强 $J$-*-clean 环,如果 $R$ 中每个元素都可以表示为 1 个投射元与 Jacobson 根中 1 个元素之和且它们可以交换。文献[7]中证明*-环 $R$ 是强 $J$-*-clean 环当且仅当 $R$ 是唯一 clean 的且是强*-clean 的,当且仅当是唯一强*-clean的。

本文将拟 $J$-clean 环扩展到*-环上,引入一类新的环——拟 $J$-*-clean 环,并研究拟 $J$-*-clean 环的基本性质,给出 $J$-*-clean 环与其他*-环之间的关系。

## 1　拟 $J$-*-clean 环

**定义 1**　设 $R$ 是*-环,称 $a\in R$ 是拟投射元,若存在 $k\in U_c(R)$, $p\in P(R)$,使得 $a=kp$。称*-环 $R$ 是拟投射环,若 $R$ 中每个元素都是拟投射元。

**命题 1**　设 $R$ 是拟投射环,则 $R$ 是*-clean 环。

**证明**　任意 $a\in R$,存在 $k\in U_c(R)$, $p\in P(R)$,使得 $a=kp$,从而 $a=kp=(1-p)+kp-(1-p)$。因为 $(kp-(1-p))(k^{-1}p-(1-p))=1$,所以 $kp-(1-p)\in U(R)$。由于 $1-p$ 是投射元,因此 $R$ 是*-clean 环。

下例说明命题 1 的逆不成立。

**例 1**　设 $Z_4$ 是*-环,其中 $*=1_R$。可以验证 $Z_4$ 是*-clean 环,但不是拟投射环,因为 $\bar{2}$ 不能表示为 1 个中心可逆元和 1 个投射元的乘积。

设 $R$ 是*-环,称 $a\in R$ 是强*-正则元[8],若存在 $p\in P(R)$, $u\in U(R)$,使得 $a=pu=up$。称 $R$ 是强*-正则环[8],若 $R$ 中每个元素都是强*-正则元(等价地,$R$ 是强正则的且对合是 proper 的)。

设 $R$ 是*-环且 $a,b\in R$,称 $b$ 是 $a$ 的 MP-逆[9],若 $a$ 和 $b$ 满足

$$(1)\ a=aba,\quad (2)\ b=bab,\quad (3)\ (ab)^*=ab,\quad (4)\ (ba)^*=ba。$$

称环 $R$ 是(von Neumann)正则环[6],若 $R$ 中每个元素 $r$,存在 $a\in R$ 使得 $r=rar$。$R$ 中正则元之集称为 $\mathrm{reg}(R)$。

称*-环 $R$ 是*-正则环[6],若对任意 $x\in R$,存在投射元 $p\in R$ 使得 $xR=pR$(等价地,$R$ 是正则的且对合是 proper 的)。

由于交换环是正则的当且仅当它是强正则的[1],因此交换环是*-正则的当且仅当它是强*-正则的。

**引理 1**[9]　设 $R$ 是*-环,则 $R$ 是*-正则环当且仅当对任意的 $a\in R$, $a$ 有 MP-逆。

**命题 2**　设 $R$ 是*-环,则 $R$ 是拟投射环当且仅当 $R$ 是交换*-正则环。

**证明**　$\Rightarrow$。对任意 $a\in R$,存在 $k\in U_c(R)$, $p\in P(R)$,使得 $a=kp$。因为

$$(kp)(k^{-1}p)(kp)=kp,\quad (k^{-1}p)(kp)(k^{-1}p)=k^{-1}p,$$
$$((kp)(k^{-1}p))^*=(kp)(k^{-1}p)\text{且}((k^{-1}p)(kp))^*=(k^{-1}p)(kp),$$

所以 $a$ 有 MP-逆。由引理 1 知,$R$ 是*-正则环。下证 $R$ 是交换环。对任意 $0\neq a\in R$,存在 $k\in U_c(R)$, $p\in P(R)$,使得 $a=kp$。故对任意 $n\in\mathbf{Z}^+$,有 $a^n=k^np\neq 0$。从而 $R$ 是约化环,$R$ 中每个幂等元都是中心的。因此,$a=kp$ 是中心的,$R$ 是交换环。

$\Leftarrow$。因为 $R$ 是交换*-正则环,所以 $R$ 是强*-正则环。对任意 $a\in R$,存在 $p\in P(R)$, $u\in U(R)$,使得 $a=pu=up$。又 $R$ 是交换的,故 $R$ 是拟投射环。

**定义 2**　设 $R$ 是*-环,称 $a\in R$ 是(强)拟 $J$-*-clean 元,若 $a$ 可以表示为一个拟投射元与一个 Jacobson 根中元素之和(且它们可以交换)。称*-环 $R$ 是(强)拟 $J$-*-clean 环,若 $R$ 中每个元素都是(强)拟 $J$-*-clean 元。

显然,拟投射环是(强)拟 $J$-$*$-clean 环,例 2 说明反之不成立。

**例 2** 设 $Z_4$ 是$*$-环,其中 $*=1_R$。可以验证 $Z_4$ 是(强)拟 $J$-$*$-clean 环,但不是拟投射环,因为$\bar{2}$不能表示为一个中心可逆元和一个投射元的乘积。

**命题 3** 若 $R$ 是(强)拟 $J$-$*$-clean 环,则 $R$ 是(强)$*$-clean 环。

**证明** 若 $R$ 是(强)拟 $J$-$*$-clean 环,对任意 $a\in R$,存在 $k\in U_c(R)$, $p\in P(R)$, $j\in J(R)$,使得 $a=kp+j$,从而 $a=kp+j=(1-p)+kp-(1-p)+j$。因为$(kp-(1-p))(k^{-1}p-(1-p))=1$,所以 $kp-(1-p)+j\in U(R)+J(R)\subseteq U(R)$。由于 $1-p$ 是投射元,因此 $R$ 是$*$-clean 环。若 $kp$ 和 $j$ 可交换,则 $1-p$ 和 $kp-(1-p)+j$ 可交换。

**命题 4** 设 $R$ 是$*$-环,$u\in U(R)$且 $a\in R$ 是拟 $J$-$*$-clean 元,若 $u^*=u^{-1}$,则 $u^{-1}au$ 是拟 $J$-$*$-clean 元。

**证明** 因为 $a\in R$ 是拟 $J$-$*$-clean 元,所以存在 $k\in U_c(R)$, $p\in P(R)$, $j\in J(R)$,使得 $a=kp+j$。又 $u^{-1}ju\in J(R)$, $(u^{-1}pu)^2=u^{-1}pu$ 且 $(u^{-1}pu)^*=u^*p(u^{-1})^*=u^{-1}pu$,即 $(u^{-1}pu)^2=u^{-1}pu=(u^{-1}pu)^*$,从而 $u^{-1}au=u^{-1}kpu+u^{-1}ju=ku^{-1}pu+u^{-1}ju$,因此 $u^{-1}au$ 是拟 $J$-$*$-clean 元。

**命题 5** 设 $R$ 是$*$-环,若 $\gamma\in J(R)$,且 $\gamma=kp+j$ 为拟 $J$-$*$-clean 分解,其中 $k\in U_c(R)$, $p\in P(R)$, $j\in J(R)$,则 $p=0$。

**证明** 由于 $p=k^{-1}(\gamma-j)\in J(R)$,故 $p=0$。

设 $R$ 是环,称 $a\in R$ 是拟幂等元[3],若存在中心可逆元 $k$,使得 $a^2=ka$(等价于存在一个幂等元 $e\in R$,使得 $a=ke$)。称 $R$ 是拟布尔环[3],若 $R$ 中每个元素都是拟幂等元。称 $a\in R$ 是拟 $J$-clean 元[3],若 $a$ 可以表示为一个拟幂等元与一个 Jacobson 根中元素之和。称 $R$ 是拟 $J$-clean 环[3],若 $R$ 中每个元素都是拟 $J$-clean 元。

称$*$-环 $R$ 中的元素 $t$ 是自伴随的[9],若 $t^*=t$。

**命题 6** 设 $R$ 是$*$-环且 $2\in U(R)$,下列命题等价:

(1) $R$ 是拟 $J$-clean 环且 $R$ 中每个可逆元和 Jacobson 根中元素都是自伴随的(即对任意 $u\in U(R)$, $j\in J(R)$,有 $u=u^*$, $j=j^*$);

(2) $R$ 是拟 $J$-$*$-clean 环且 $*=1_R$。

**证明** (1)$\Rightarrow$(2)。任意 $a\in R$,存在 $k\in U_c(R)$, $e\in Id(R)$, $j\in J(R)$,使得$\dfrac{a}{2}=ke+j$。从而 $a=k(2e-1)+(k+2j)$。因为$(2e-1)^2=1$,所以$(2e-1)^*=2e-1$,于是 $2(e-e^*)=0$。又因为 $2\in U(R)$,所以 $e=e^*$,因此,$R$ 是拟 $J$-$*$-clean 环且 $a=a^*$,即有 $*=1_R$。

(2)$\Rightarrow$(1)显然。

称$*$-环 $R$ 中的元素 $t$ 是 1 的自伴随平方根[9],若 $t^2=1$,且 $t^*=t$。

**命题 7** 设 $R$ 是$*$-环,$2\in U(R)$且可逆元是 1 的自伴随平方根,如果 $R$ 是拟 $J$-$*$-clean 环,则 $R$ 中每个元素可以表示为 1 的自伴随平方根与可逆元之和。

**证明** 任意 $a\in R$,存在 $k\in U_c(R)$, $p\in P(R)$, $j\in J(R)$,使得$\dfrac{a}{2}=kp+j$,从而 $a=k(2p-1)+(k+2j)$,其中 $(2p-1)^2=1$, $(2p-1)^*=2p-1$, $k+2j\in U(R)$。又 $k$ 是 1 的自伴随平方根,因此,$R$ 中每个元素可以表示为 1 的自伴随平方根与可逆元之和。

称 $R$ 是 $UJ$-环[10],若 $U(R)=1+J(R)$。

**命题 8** 设 $R$ 是$*$-环且 $2\in U(R)$,如果 $R$ 是 $UJ$-环且 $R$ 中每个元素可以表示为 1 的自伴随平方根与可逆元之和,则 $R$ 是拟 $J$-$*$-clean 环。

**证明** 任意 $a\in R$,存在 $y\in R$, $u\in U(R)$,使得 $2a=y+u$,其中 $y^2=1$, $y^*=y$。因为 $R$ 是 $UJ$-环,所以存在 $j\in J(R)$,使得 $2a=y+1+j$,于是 $a=\dfrac{y+1}{2}+\dfrac{j}{2}$。又 $\left(\dfrac{y+1}{2}\right)^2=\dfrac{y+1}{2}$ 且 $\left(\dfrac{y+1}{2}\right)^*=\dfrac{y+1}{2}$,因此 $R$ 是拟 $J$-$*$-clean 环。

设 $I$ 是$*$-环 $R$ 的理想,称 $I$ 是$*$-不变理想[9],若 $I^*\subseteq I$。设 $I$ 是 $R$ 的$*$-不变理想,$R/I$ 是$*$-环,其中对合运算 $*$: $R/I\to R/I$; $\bar{a}^*=\overline{a^*}$。

**命题 9** 设 $R$ 是拟 $J$-$*$-clean 环,若 $I$ 是 $R$ 的$*$-不变理想,则 $R/I$ 是拟 $J$-$*$-clean 环。

**证明**　设 $a\in R$,由于 $R$ 是拟 $J$-$*$-clean 环,故存在 $k\in U_c(R)$, $p\in P(R)$, $j\in J(R)$,使得 $a=kp+j$。在 $R/I$ 中,$\bar{a}=\bar{k}\bar{p}+\bar{j}$。显然,中心可逆元和投射元的同态像仍然是中心可逆元和投射元。只须证明 Jacobson 根中元素的同态像仍然是 Jacobson 根中元素,即 $\bar{j}\in J(R/I)$。任取 $b\in R$, $1+bj$ 可逆,则 $\overline{1}+\bar{b}\bar{j}$ 可逆。于是 $\bar{j}\in J(R/I)$。因此,$R/I$ 是拟 $J$-$*$-clean 环。

**推论 1**　设 $R$ 是拟 $J$-$*$-clean 环,则

(1) $R/J(R)$ 是拟 $J$-$*$-clean 环;

(2) 若 $\mathrm{nil}(R)$ 是理想,则 $R/\mathrm{nil}(R)$ 是拟 $J$-$*$-clean 环。

**证明**　(1) 结合命题 9,只需证明 $J(R)$ 是 $*$-不变的。令 $a^*\in(J(R))^*$,其中 $a\in J(R)$。下证 $a^*\in J(R)$。任意 $x\in R$,因为 $1-x^*a\in U(R)$,所以 $1-a^*x=(1-x^*a)^*\in U(R)$,得证。

(2) 根据假设,只需证明 $\mathrm{nil}(R)$ 是 $*$-不变的。任取 $a^*\in(\mathrm{nil}(R))^*$,其中 $a\in\mathrm{nil}(R)$,只需证 $a^*\in\mathrm{nil}(R)$。因为 $a\in\mathrm{nil}(R)$,所以 $a^m=0$,其中整数 $m\geqslant 1$,因此 $(a^*)^m=(a^m)^*=0$,得证。剩下部分由命题 9 得到。

**引理 2**[11]　设 $A$ 是 $R$ 的理想且 $A\subseteq J(R)$,则 $R$ 是 clean 环当且仅当 $R/A$ 是 clean 环且幂等元模 $A$ 可提升。

**引理 3**[9]　设 $R$ 是 $*$-环,如果幂等元模 $J(R)$ 可提升,那么投射元模 $J(R)$ 可提升。

**定理 1**　设 $R$ 是 $*$-环且 $U(R)=U_c(R)$,则 $R$ 是拟 $J$-$*$-clean 环当且仅当 $R/J(R)$ 是交换 $*$-正则环且 $R$ 的中心可逆元和投射元模 $J(R)$ 可提升。

**证明**　$\Rightarrow$。任意 $\bar{a}\in R/J(R)$,其中 $a\in R$。由于 $R$ 是拟 $J$-$*$-clean 环,因此存在 $k\in U_c(R)$, $p\in P(R)$, $j\in J(R)$,使得 $a=kp+j$。在 $R/J(R)$ 中,$\bar{a}=\bar{k}\bar{p}$,因此,$R/J(R)$ 是拟投射环。由命题 2 得 $R/J(R)$ 是交换 $*$-正则环。下证 $R$ 的中心可逆元和投射元模 $J(R)$ 可提升。因为 $R$ 是拟 $J$-$*$-clean 环,由命题 3 得 $R$ 是 $*$-clean 环,所以 $R$ 是 clean 环。由引理 2 得幂等元模 $J(R)$ 可提升,由引理 3 得投射元模 $J(R)$ 可提升。任意 $\bar{u}\in U_c(R/J(R))$,存在 $\bar{s}\in R/J(R)$,使得 $\bar{u}\bar{s}=\overline{1}$,从而 $us-1\in J(R)$,即 $us\in 1+J(R)\subseteq U(R)$,说明 $u$ 有右逆。类似可证 $u$ 有左逆,故 $u\in U(R)=U_c(R)$,即 $R$ 的中心可逆元模 $J(R)$ 可提升。

$\Leftarrow$。任意 $a\in R$, $\bar{a}\in R/J(R)$。由于 $R/J(R)$ 是交换 $*$-正则环,由命题 2 得 $R/J(R)$ 是拟投射环,故存在 $\bar{k}\in U_c(R/J(R))$, $\bar{p}\in P(R/J(R))$,使得 $\bar{a}=\bar{k}\bar{p}$。又因为中心可逆元和投射元模 $J(R)$ 可提升,所以存在 $j\in J(R)$,使得 $a=kp+j$,其中 $k\in U_c(R)$, $p\in P(R)$,因此,$R$ 是拟 $J$-$*$-clean 环。

**定理 2**　设 $R$ 是 $*$-环,$U(R)=U_c(R)$, $I$ 是 $R$ 的 $*$-不变理想,$I\subseteq J(R)$ 且投射元模 $I$ 可提升,则 $R$ 是拟 $J$-$*$-clean环当且仅当 $R/I$ 是拟 $J$-$*$-clean 环。

**证明**　$\Rightarrow$。由命题 9 得证。

$\Leftarrow$。设 $R/I$ 是拟 $J$-$*$-clean 环,任意 $a\in R$,存在 $\bar{k}\in U_c(R/I)$, $\bar{p}\in P(R/I)$, $\bar{j}\in J(R/I)$,使得 $\bar{a}=\bar{k}\bar{p}+\bar{j}$。因为投射元模 $I$ 可提升,所以,存在 $p\in P(R)$, $r\in I$,使得 $a=kp+j+r$。类似定理 1 可证明 $k\in U_c(R)$,因此,$R$ 是拟 $J$-$*$-clean 环。

**例 3**　设 $Z_5$ 是 $*$-环,其中 $*=1_R$。可以验证 $Z_5$ 是拟 $J$-$*$-clean 环,但 $Z$ 不是拟 $J$-$*$-clean 环,因为 2 不能表示为拟投射元与 Jacobson 根中元素之和。

**推论 2**　设 $R$ 是 $*$-环,$U(R)=U_c(R)$,则 $R$ 是拟 $J$-$*$-clean 环当且仅当 $R/J(R)$ 是拟 $J$-$*$-clean 环且投射元模 $J(R)$ 可提升。

**证明**　$\Rightarrow$。因为 $R$ 是拟 $J$-$*$-clean 环,由命题 3 得 $R$ 是 $*$-clean 环,所以 $R$ 是 clean 环。由引理 2 得幂等元模 $J(R)$ 可提升,再根据引理 3 得投射元模 $J(R)$ 可提升,因此,由定理 2 得 $R/J(R)$ 是拟 $J$-$*$-clean 环。

$\Leftarrow$。由定理 2 得证。

设 $R=\prod_{i=1}^{n}R_i$ 是环 $R_i$ 的直积,且 $*_i:R_i\to R_i$ 是 $R_i$ 的对合运算。定义对合运算 $*:R\to R$ 为 $(a_i)^*=(a_i^*)$,则 $R$ 也是 $*$-环。

**命题 10**　设 $R$ 是 $*$-环,则直积 $R=\prod_{i=1}^{n}R_i$ 是拟 $J$-$*$-clean 环当且仅当每一个环 $R_i$ 是拟 $J$-$*$-clean 环。

**证明**　$\Rightarrow$。显然。

$\Leftarrow$。任取 $a=(r_1,r_2,\cdots,r_n)\in R$,其中 $r_i\in R_i$。因为 $R_i$ 是拟 $J$-$*$-clean 环,所以,存在 $k_i\in U_c(R_i)$, $p_i\in$

$P(R_i)$, $j_i\in J(R_i)$,使得 $r_i=k_ip_i+j_i$, $i=1,2,\cdots,n$。令 $k=(k_1,k_2,\cdots,k_n)$, $p=(p_1,p_2,\cdots,p_n)$, $j=(j_1,j_2,\cdots,j_n)$,则 $a=kp+j$。易知,$k\in U_c(R)$, $p\in P(R)$, $j\in J(R)$,因此,$R$ 是拟 $J$-*-clean 环。

**推论 3**　设 $R$ 是*-环且 $e$ 是 $R$ 的中心投射元,则 $R$ 是拟 $J$-*-clean 环当且仅当 $eR$ 和 $(1-e)R$ 都是拟 $J$-*-clean环。

设 $R$ 是*-环,定义对合运算 $*:R[[x]]\to R[[x]]$ 为 $\left(\sum\limits_{i=0}^{\infty}a_ix^i\right)^*=\sum\limits_{i=0}^{\infty}a_i^*x^i$,则 $R[[x]]$ 也是*-环。

**命题 11**　设 $R$ 是*-环,则 $R$ 是拟 $J$-*-clean 环当且仅当 $R[[x]]$ 是拟 $J$-*-clean 环。

**证明**　$\Rightarrow$。设 $f(x)=\sum\limits_{i=0}^{\infty}a_ix^i\in R[[x]]$,由于 $R$ 是拟 $J$-*-clean 环,因此存在 $k\in U_c(R)$, $p\in P(R)$, $j\in J(R)$,使得 $a_0=kp+j$,则 $f(x)=kp+j+\sum\limits_{i=1}^{\infty}a_ix^i$,其中 $p\in P(R)\subseteq P(R[[x]])$, $k\in U_c(R)\subseteq U_c(R[[x]])$。下面证明 $j+\sum\limits_{i=1}^{\infty}a_ix^i\in J(R[[x]])$。事实上,因为 $j\in J(R)$,所以对任意 $b\in R$, $1+bj$ 可逆,对 $a_i$, $x^i$, $1+b\left(j+\sum\limits_{i=1}^{\infty}a_ix^i\right)=1+bj+\sum\limits_{i=1}^{\infty}ba_ix^i$ 可逆,因此,$j+\sum\limits_{i=1}^{\infty}a_ix^i\in J(R[[x]])$, $R[[x]]$ 是拟 $J$-*-clean 环。

$\Leftarrow$。注意到 $R[[x]]/(x)\cong R$ 且 $(x)$ 是*-不变理想,由命题 9 得 $R$ 是拟 $J$-*-clean 环。

**推论 4**　设 $R$ 是*-环,则 $R$ 是拟 $J$-*-clean 环当且仅当 $R[x]/(x^{n+1})$ 是拟 $J$-*-clean 环。

**证明**　$\Rightarrow$。由命题 11 和 $R[x]/(x^{n+1})$ 是 $R[[x]]$ 的同态像可证。

$\Leftarrow$。由 $R$ 是 $R[x]/(x^{n+1})$ 的同态像可证。

设 $R$ 是*-环且 $T(R,R)$ 是 $R$ 的平凡扩张,即 $T(R,R)=\left\{\begin{pmatrix}a&b\\0&a\end{pmatrix}\mid a,b\in R\right\}$。定义对合运算 $*:T(R,R)\to T(R,R)$ 为 $(x,y)\mapsto(x^*,y^*)$,则 $T(R,R)$ 也是*-环。

**命题 12**　设 $R$ 是*-环,则 $R$ 是拟 $J$-*-clean 环当且仅当 $T(R,R)$ 是拟 $J$-*-clean 环。

**证明**　$\Rightarrow$。任意 $\begin{pmatrix}a&b\\0&a\end{pmatrix}\in T(R,R)$,其中 $a,b\in R$。因为 $R$ 是拟 $J$-*-clean 环,所以存在 $k_1,k_2\in U_c(R)$, $p_1,p_2\in P(R)$, $j_1,j_2\in J(R)$,使得 $a=k_1p_1+j_1$, $b=k_2p_2+j_2$,于是

$$\begin{pmatrix}a&b\\0&a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}k_1p_1+j_1&k_2p_2+j_2\\0&k_1p_1+j_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}k_1&0\\0&k_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p_1&0\\0&p_1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}j_1&k_2p_2+j_2\\0&j_1\end{pmatrix}。$$

显然,$\begin{pmatrix}k_1&0\\0&k_1\end{pmatrix}\in U_c(T(R,R))$, $\begin{pmatrix}p_1&0\\0&p_1\end{pmatrix}\in P(T(R,R))$。下证 $\begin{pmatrix}j_1&k_2p_2+j_2\\0&j_1\end{pmatrix}\in J(T(R,R))$。事实上,任意 $\begin{pmatrix}x&y\\0&x\end{pmatrix}\in T(R,R)$,其中 $x,y\in R$,

$$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}x&y\\0&x\end{pmatrix}\begin{pmatrix}j_1&k_2p_2+j_2\\0&j_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-xj_1&-x(k_2p_2+j_2)-yj_1\\0&1-xj_1\end{pmatrix}\in U(T(R,R))。$$

因此,$T(R,R)$ 是拟 $J$-*-clean 环。

$\Leftarrow$。任意 $a,b\in R$,因为 $T(R,R)$ 是拟 $J$-*-clean 环,所以

$$\begin{pmatrix}a&b\\0&a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}k_1&k_2\\0&k_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p_1&p_2\\0&p_1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}j_1&j_2\\0&j_1\end{pmatrix},$$

其中 $\begin{pmatrix}k_1&k_2\\0&k_1\end{pmatrix}\in U_c(T(R,R))$, $\begin{pmatrix}p_1&p_2\\0&p_1\end{pmatrix}\in P(T(R,R))$, $\begin{pmatrix}j_1&j_2\\0&j_1\end{pmatrix}\in J(T(R,R))$,则 $a=k_1p_1+j_1$。下证 $k_1\in U_c(R)$, $p_1\in P(R)$, $j_1\in J(R)$。事实上,对任意 $x,y\in R$,

$$\begin{pmatrix}x&y\\0&x\end{pmatrix}\begin{pmatrix}k_1&k_2\\0&k_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}xk_1&xk_2+yk_1\\0&xk_1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}k_1&k_2\\0&k_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x&y\\0&x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}k_1x&k_1y+k_2x\\0&k_1x\end{pmatrix},$$

有 $xk_1=k_1x$,则 $k_1$ 是中心的。因为 $\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}x&y\\0&x\end{pmatrix}\begin{pmatrix}j_1&j_2\\0&j_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-xj_1&-xj_2-yj_1\\0&1-xj_1\end{pmatrix}$ 可逆,所以 $1-xj_1$ 可逆,$j_1\in J(R)$。显然,$k_1$ 可逆,$p_1\in P(R)$,故 $a=k_1p_1+j_1$ 是拟 $J$-$*$-clean 元,$R$ 是拟 $J$-$*$-clean 环。

设 $R$ 是$*$-环,称 $a\in R$ 是强 $\pi$-$*$-正则元[8],若其满足文献[8]中定理 3.2 的条件。称 $R$ 是强 $\pi$-$*$-正则环[12],若 $R$ 中每个元素都是强 $\pi$-$*$-正则元。

**引理 4**[8]　设 $R$ 是$*$-环,则 $R$ 是强 $\pi$-$*$-正则环当且仅当对任意 $a\in R$,存在 $p\in P(R)$, $u\in U(R)$使得 $a=p+u$, $ap\in \mathrm{nil}(R)$。

**命题 13**　设 $R$ 是交换$*$-环且 $r\in R$,若 $r=a+b$,其中 $a$ 是强 $\pi$-$*$-正则元,$j\in J(R)$,则 $r$ 是拟 $J$-$*$-clean 元。

**证明**　因为 $a$ 是强 $\pi$-$*$-正则元,由引理 4,设 $a=p+u$,其中 $p\in P(R)$, $u\in U(R)$且 $ap\in \mathrm{nil}(R)$,则

$$r=a+j=pa+(1-p)a+j=pa+(1-p)u+j=u(1-p)+(j+pa)。$$

因为 $R$ 是交换$*$-环,所以 $\mathrm{nil}(R)\subseteq J(R)$,于是 $j+pa\in J(R)$,因此 $r=u(1-p)+(j+pa)$是 $r$ 的一种拟 $J$-$*$-clean 分解。

## 2　强拟 $J$-$*$-clean 环

称$*$-环 $R$ 是 medium $*$-clean 环[12],若 $R$ 中每个元素都可以表示为 Jacobson 根中 1 个元素与 1 个投射元之和或差且它们可以交换。

**命题 14**　若 $R$ 是 medium $*$-clean 环,则 $R$ 是强拟 $J$-$*$-clean 环。

**证明**　显然。

下面的例子说明命题 14 的逆不成立。

**例 4**　设 $Z_3$ 是$*$-环,其中 $*=1_R$。可以验证 $Z_3$ 是强拟 $J$-$*$-clean 环,但 $Z_3$ 不是 medium $*$-clean 环,因为 $\bar{2}$不能表示为投射元与 Jacobson 根中元素之和或差。

下面的例子说明 medium $*$-clean 环未必是强 $J$-$*$-clean 环。

先回顾一下局部化[13]的概念。

设 $R$ 是交换环,$S$ 是 $R$ 的乘法封闭子集,在集合 $R\times S$ 中定义等价关系:

$$(a,s)\sim(b,t)\Leftrightarrow \text{存在 } u\in S \text{ 使得} (at-bs)u=0。$$

将$(a,s)$的等价类记为 $a/s$。在等价类所成集合中规定加法和乘法运算:

$$(a/s)+(b/t)=(at+bs)/st;$$

$$(a/s)(b/t)=ab/st,$$

则称为 $R$ 关于 $S$ 的局部化,记作 $S^{-1}R$ 或 $R_S$,又称为分式环。

**例 5**[12]　设 $R=Z_{(3)}$是 $Z$ 关于(3)的局部化且 $*=1_R$,则 $R$ 是 medium $*$-clean 环,不是强 $J$-$*$-clean 环。

由以上例子有以下推断:

强 $J$-$*$-clean 环$\Rightarrow$medium $*$-clean 环$\Rightarrow$强拟 $J$-$*$-clean 环$\Rightarrow$强$*$-clean 环。

**引理 5**[14]　设 $R$ 是$*$-环,若 $R$ 中每个幂等元都是投射元,则 $R$ 是 abelian。

**引理 6**[14]　设 $R$ 是$*$-环,则下列命题等价:

(1) $R$ 是 clean 环且 $R$ 中每个幂等元都是投射元;

(2) $R$ 是 abelian $*$-clean 环;

(3) $R$ 是强$*$-clean 环。

**命题 15**　设 $R$ 是$*$-环,则下列命题等价:

(1) $R$ 是强拟 $J$-$*$-clean 环;

(2) $R$ 是 abelian 拟 $J$-$*$-clean 环;

(3) $R$ 是拟 $J$-clean 环且 $R$ 中每个幂等元都是投射元。

**证明**　(2)$\Rightarrow$(1)显然。

(1)$\Rightarrow$(3)。因为 $R$ 是强拟 $J$-$*$-clean 环,所以由命题 3 得 $R$ 是强$*$-clean 环,因此,由引理 6 得 $R$ 中每个

幂等元都是投射元。

(3)⇒(2)。因为 $R$ 中每个幂等元都是投射元，所以由引理 5 得 $R$ 是 abelian，因此，$R$ 是 abelian 拟 $J$-$*$-clean 环。

由命题 9 类似可证以下结论。

**命题 16** 设 $R$ 是强拟 $J$-$*$-clean 环，若 $I$ 是 $R$ 的$*$-不变理想，则 $R/I$ 是强拟 $J$-$*$-clean 环。

**定理 3** 设 $R$ 是 $*$-环且 $U(R)=U_c(R)$，$I$ 是 $R$ 的 $*$-不变理想且 $I\subseteq J(R)$，则 $R$ 是强拟 $J$-$*$-clean 环当且仅当 $R$ 是强 $*$-clean 环且 $R/I$ 是强拟 $J$-$*$-clean 环。

**证明** ⇒。由命题 3、16 得。

⇐。因为 $R/I$ 是强拟 $J$-$*$-clean 环，所以对任意 $\bar{a}\in R/I$，则存在 $\bar{k}\in U_c(R/I)$，$\bar{p}\in P(R/I)$，$\bar{j}\in J(R/I)$，使得 $\bar{a}=\bar{k}\bar{p}+\bar{j}$。由于 $R$ 是强 $*$-clean 环，则由引理 6 知 $R$ 中每个幂等元都是投射元。又由引理 2 得幂等元模 $I$ 可提升，所以投射元模 $I$ 可提升。类似于定理 2 中的证明有中心可逆元模 $I$ 可提升，因此，存在 $r\in J(R)$，$k\in U_c(R)$，使得 $a=kp+j+r$，$p(j+r)=(j+r)p$，因此 $R$ 是强拟 $J$-$*$-clean 环。

**引理 7**[14] 设 $R$ 是 $*$-环，则下列命题等价：

(1) $R$ 是强 $*$-clean 环；

(2) $R/J(R)$ 是强 $*$-clean 环，$R$ 中投射元是中心的且投射元模 $J(R)$ 可提升；

(3) $R/J(R)$ 是约化 clean 环，$R/J(R)$ 中的幂等元可被提升为 $R$ 中的中心投射元。

**定理 4** 设 $R$ 是 $*$-环且 $U(R)=U_c(R)$，则下列命题等价：

(1) $R$ 是强拟 $J$-$*$-clean 环；

(2) $R$ 是强 $*$-clean 环且 $R/J(R)$ 是强拟 $J$-$*$-clean 环；

(3) $R$ 是强 $*$-clean 环且 $R/J(R)$ 是拟投射环；

(4) $R/J(R)$ 是强拟 $J$-$*$-clean 环，$R$ 中投射元是中心的且投射元模 $J(R)$ 可提升；

(5) $R/J(R)$ 是约化拟 $J$-clean 环，$R/J(R)$ 中的幂等元可被提升为 $R$ 中的中心投射元。

**证明** (1)⇔(2)、(1)⇔(3) 显然。

(1)⇒(4)。由命题 16 得 $R/J(R)$ 是强拟 $J$-$*$-clean 环，又因为 $R$ 是强拟 $J$-$*$-clean 环，所以 $R$ 是强 $*$-clean环。剩下部分由引理 7 可证。

(4)⇒(5)。因为 $R/J(R)$ 是强拟 $J$-$*$-clean 环，所以 $R/J(R)$ 是强 $*$-clean 环。剩下部分由引理 7 可证。

(4)⇒(1)。设 $R/J(R)$ 是拟 $J$-clean 环。任意 $a\in R$，则存在 $\bar{k}\in U_c(R/J(R))$，$\bar{e}\in Id(R/J(R))$，$\bar{j}\in J(R/J(R))$，使得 $\bar{a}=\bar{k}\bar{e}+\bar{j}$。因为 $R/J(R)$ 中的幂等元可被提升为 $R$ 中的中心投射元，所以，存在中心投射元 $p\in R$，$r\in J(R)$，使得 $a=kp+j+r$，显然 $j+r\in J(R)$。类似于定理 2 的证明，有 $k\in U(R)=U_c(R)$。因此，$R$ 是强拟 $J$-$*$-clean 环。

**推论 5** 设 $R$ 是 $*$-环，$U(R)=U_c(R)$ 且 $R$ 是 $UJ$-环，则 $R$ 是强拟 $J$-$*$-clean 环当且仅当

(1) $R$ 是强 $*$-clean 环；

(2) $R/2R$ 是强拟 $J$-$*$-clean 环且 $2\in J(R)$。

**证明** ⇒。因为 $R$ 是强拟 $J$-$*$-clean 环，所以存在 $k\in U_c(R)$，$p\in P(R)$，$j\in J(R)$，使得 $2=kp+j$。因为 $(kp+(p-1))(k^{-1}p+(p-1))=1$，所以 $1+p=2+(p-1)=kp+(p-1)+j\in U(R)$。由于 $R$ 是 $UJ$-环，因此 $p\in J(R)$，则 $p=0$。从而 $2=j\in J(R)$。剩下部分由定理 3 得。

⇐。由定理 3 得。

**命题 17** 设 $R$ 是 $*$-正则环且 $U(R)=U_c(R)$，则 $R$ 是强拟 $J$-$*$-clean 环当且仅当 $R$ 是拟投射环。

**证明** ⇒。因为 $R$ 是强拟 $J$-$*$-clean 环，所以由定理 4，得 $R/J(R)$ 是拟投射环。又由于 $R$ 是 $*$-正则环，从而 $R$ 是正则环，则 $J(R)=0$，因此 $R$ 是拟投射环。

⇐。显然。

**定理 5** 设 $R$ 是 $*$-环且 $R$ 中每个可逆元是自伴随的，则 $R$ 是强拟 $J$-$*$-clean 环当且仅当

(1) $R$ 是拟 $J$-$*$-clean 环；

(2) 对任意投射元 $e,f\in R$，若 $e-f\in J(R)$，则 $e=f$。

**证明** $\Rightarrow$。显然 $R$ 是拟 $J$-$*$-clean 环。对任意的投射元 $e,f\in R$,因为 $R$ 是强拟 $J$-$*$-clean 环,所以由命题 15 得 $R$ 是 abelian,因此 $ef=fe$,得到 $(e-f)^3=e-f$,从而 $(e-f)(1-(e-f)^2)=0$,因此 $e=f$。

$\Leftarrow$。对任意幂等元 $e\in R$,存在 $k\in U_c(R)$, $g\in P(R)$,使得 $e-kg\in J(R)$。因为 $R$ 中每个可逆元是自伴随的,所以 $e^*-kg=e^*-k^*g\in J(R)$,从而 $e-e^*=(e-kg)-(e^*-kg)\in J(R)$。

令 $x=1+(e-e^*)^*(e-e^*)$, $t=x^{-1}$,易知 $x^*=x$, $t^*=t$,故 $e^*x=e^*ee^*=xe^*$,从而 $e^*t=te^*$, $et=te$。令 $f=e^*et=te^*e$,则 $f^*=f$, $f^2=e^*ete^*et=e^*ee^*(tet)=e^*xtet=e^*et=f$, $fe=f$, $ef=ee^*et=ext=e$, $f=e^*f$,从而,$e-f=ef-e^*f=(e-e^*)f\in J(R)$,此时 $f=e^*e(1+(e^*-e)(e-e^*))^{-1}$。

令 $x'=1+(e^*-e)^*(e^*-e)$, $t'=(x')^{-1}$,易知 $(x')^*=x'$, $(t')^*=t'$,故 $ex'=ee^*e=x'e$,从而 $et'=t'e$, $e^*t'=t'e^*$。令 $f'=ee^*t'=t'ee^*$,类似可证 $(f')^*=(f')^2=f'$, $ef'=f'$, $f'e=e$, $f'=f'e^*$,从而,$e-f'=f'e-f'e^*=f'(e-e^*)\in J(R)$,此时 $f'=(1+(e-e^*)(e^*-e))^{-1}ee^*$。

由上述得 $e-f$, $e-f'\in J(R)$, $f,f'$ 都是投射元,故 $f-f'=(e-f')-(e-f)\in J(R)$,从而 $f=f'$,即

$$e^*e(1+(e^*-e)(e-e^*))^{-1}=(1+(e-e^*)(e^*-e))^{-1}ee^*。$$

于是

$$(1+(e-e^*)(e^*-e))e^*e=ee^*(1+(e^*-e)(e-e^*)),$$

得到 $e^*ee^*e=ee^*ee^*$,则

$$(e-e^*)^3-(e-e^*)=-ee^*e+e^*ee^*;$$

$$((e-e^*)^3-(e-e^*))(e+e^*)=(e-e^*)^3-(e-e^*)。$$

因此 $(e-e^*)((e-e^*)^2-1)((e+e^*)-1)=0$。

因为 $e-f\in J(R)$,所以 $e^*-f\in J(R)$,则 $(e+e^*)-2f\in J(R)$。于是 $(e+e^*)-1=(2f-1)+((e+e^*)-2f)\in U(R)$。又 $e-e^*\in J(R)$,从而 $(e-e^*)^2-1\in U(R)$,故 $e=e^*$。因此,由引理 5 知 $R$ 是 abelian。由命题 15 得 $R$ 是强拟 $J$-$*$-clean 环。

称投射元 $e,f\in R$ 是等价的[6],记作 $e\sim f$,若存在 $w\in R$,使得 $w^*w=e$ 且 $ww^*=f$。

称环 $R$ 有稳定度 1[15],若 $aR+bR=R$,其中 $a,b\in R$,则存在 $y\in R$,使得 $a+by\in U(R)$。例如,半局部环、单位正则环、强 $\pi$-正则环等均有稳定度 1。

**引理 8**[15] 设 $R$ 是 exchange 环,则 $R$ 有稳定度 1 当且仅当对任意幂等元 $e,f\in R$,若 $eR\cong fR$,则存在 $u\in U(R)$,使得 $e=ufu^{-1}$。

**命题 18** 设 $R$ 是 $*$-环且 $R$ 中每个可逆元是自伴随的,则 $R$ 是强拟 $J$-$*$-clean 环当且仅当

(1) $R$ 是拟 $J$-$*$-clean 环;

(2) 对任意投射元 $e,f\in R$,若 $e\sim f$,则 $e=f$。

**证明** $\Rightarrow$。显然(1)成立。由定理 4 得 $R/J(R)$ 是拟投射环。由命题 2 得 $R/J(R)$ 是交换 $*$-正则环,则 $R/J(R)$ 是强 $\pi$-正则环。由文献[15]得,每个强 $\pi$-正则环都有稳定度 1,即 $R/J(R)$ 有稳定度 1,则易知 $R$ 有稳定度 1。若对任意的投射元 $e,f\in R$, $e-f\in J(R)$,有 $e\sim f$,由文献[15]可得 $eR\cong fR$。由引理 8 得,存在 $u\in U(R)$,使得 $e=ufu^{-1}$。因为 $R$ 是强拟 $J$-$*$-clean 环,所以由命题 15 得 $R$ 是 abelian,则 $e=f$。

$\Leftarrow$。对任意的投射元 $e,f\in R$ 使得 $e-f\in J(R)$。令 $u=1-e-f$,则 $eu=-ef=uf$。易证 $u=u^*=u^{-1}\in U(R)$。令 $w=fu^{-1}e$,则 $f=u^{-1}eu=ww^*$ 且 $e=ufu^{-1}=w^*w$,因此,$e\sim f$。由假设得 $e=f$,由定理 5 得 $R$ 是强拟 $J$-$*$-clean 环。

设 $R$ 是 $*$-环,称元素 $a\in R$ 是 partial isometry 元[6],若 $a=aa^*a$。称元素 $u\in R$ 是 unitary 元[6],若 $uu^*=u^*u=1$。

**命题 19** 设 $R$ 是 $*$-环且 $R$ 中每个可逆元是自伴随的,则 $R$ 是强拟 $J$-$*$-clean 环当且仅当

(1) $R$ 是拟 $J$-$*$-clean 环;

(2) 对任意 partial isometry 元 $a\in R$,存在 $e\in P(R)$, unitary 元 $u\in R$,使得 $a=eu=ue$。

**证明** $\Rightarrow$。显然(1)成立。对任意的 partial isometry 元 $w\in R$,有 $w=ww^*w$,从而 $w^*=w^*ww^*$。因为 $w^*w=w^*ww^*w=(w^*w)^*$, $ww^*=ww^*ww^*=(ww^*)^*$,所以 $w^*w$ 和 $ww^*$ 是投射元且 $w^*w\sim ww^*$。由命题 18 得 $w^*w=ww^*$。令 $u=1-w^*w+w$,则 $u^*=1-w^*w+w^*$。从而 $uu^*=u^*u=1$,即 $u\in R$ 是 unitary 元。令 $e=ww^*$,则 $e$ 是投射元,故 $w=ww^*(1-ww^*+w)=eu$。又因为 $R$ 是强拟 $J$-$*$-clean 环,所以由命题 15 得 $R$ 是

abelian,因此,$w=eu=ue$ 得证。

$\Leftarrow$。对任意的投射元 $e,f\in R$ 使得 $e\sim f$。存在 $w\in R$,使得 $w^*w=e$ 且 $ww^*=f$。假设 $w\in fRe$, $w^*\in eRf$,从而 $ww^*w=we=w$,即 $w$ 是 partial isometry 元,故存在 $p\in P(R)$, unitary 元 $u\in R$,使得 $w=pu=up$,则 $e=w^*w=(u^*p)(pu)=u^*pu=u^*up=p$ 且 $f=ww^*=(pu)(u^*p)=pu^*up=p$,因此 $e=f$。由命题 18 得 $R$ 是强拟 $J$-$*$-clean 环。

设 $R$ 是 $*$-环,称元素 $a\in R$ 是唯一 $*$-clean 元[12],若存在唯一的投射元 $e$,使得 $a-e$ 是可逆的。

**定理 6** 设 $R$ 是 $*$-环且 $R$ 中每个可逆元是 1 的自伴随平方根,则 $R$ 是强拟 $J$-$*$-clean 环当且仅当

(1) $R$ 是拟 $J$-$*$-clean 环;

(2) 对任意 $a\in R$, $a^2$ 是唯一 $*$-clean 元。

**证明** $\Rightarrow$。显然(1)成立。对任意 $a\in R$,存在 $k\in U_c(R)$, $p\in P(R)$, $j\in J(R)$,使得 $a=kp+j$, $pj=jp$,则 $a^2=(kp+j)^2=k^2p+j'$,其中 $j'\in J(R)$。因为 $R$ 中每个可逆元是 1 的自伴随平方根,所以 $a^2=k^2p+j'=p+j'=(1-p)+((2p-1)+j')$。又由于$(2p-1)^2=1$,因此 $a^2$ 是 $*$-clean 元。下证唯一性。不妨设 $a^2=f+v$,其中 $f\in P(R)$, $v\in U(R)$,则 $p-f=v-j'\in U(R)$。因为 $R$ 是强拟 $J$-$*$-clean 环,所以由命题 15 得 $R$ 是 abelian,则$(p-f)^3=p-f$,即$(p-f)(1-(p-f)^2)=0$,从而 $1-p+2pf-f=0$。故 $f=(1-2p)^{-1}(1-p)=(1-2p)(1-p)=1-p$,因此,$a^2$ 是唯一 $*$-clean 元。

$\Leftarrow$。对任意的投射元 $e,f\in R$,设 $e-f\in J(R)$,因为$(2e-1)^2=1$, $(2f-1)^2=1$,所以 $2e-1\in U(R)$, $(2f-1)+(e-f)\in U(R)+J(R)\subseteq U(R)$。又由于 $e^2=e=(1-e)+(2e-1)=(1-f)+((2f-1)+(e-f))$ 且 $e^2$ 是唯一 $*$-clean元,因此 $1-e=1-f$,即 $e=f$。由定理 5 得 $R$ 是强拟 $J$-$*$-clean 环。

**例 6** 设 $Z_3$ 是 $*$-环,其中 $*=1_R$。可以验证 $Z_3$ 是强拟 $J$-$*$-clean 环,但$-1\in \mathbf{Z}_3$不是唯一 $*$-clean 元,因为 $-1=0+(-1)=1+1$。

**参考文献:**

[1] VAŠ L. $*$-Clean rings; some clean and almost clean Baer $*$-rings and von Neumann algebras[J]. Journal of Algebra, 2010, 324(12):3388-3400.
[2] CHEN Huanyin. On strongly $J$-clean rings[J]. Communications in Algebra, 2010, 38(10):3790-3804.
[3] TANG Gaohua, SU Huadong, YUAN Pingzhi. Quasi-clean rings and strongly quasi-clean rings[J]. Communications in Contemporary Mathematics, 2023, 25(2):2150079.
[4] 王尧,陈蒋欢,任艳丽. 拟 $J$-clean 环[J]. 山东大学学报(理学版),2023,58(6):1-8.
WANG Yao, CHEN Jianghuan, REN Yanli. Quasi $J$-clean rings[J]. Journal of Shandong University(Natural Science), 2023, 58(6):1-8.
[5] NICHOLSON W K, ZHOU Y. Clean general rings[J]. Journal of Algebra, 2005, 291(1):297-311.
[6] BERBERIAN S K. Baer $*$-rings[M]. New York: Springer, 1972.
[7] CHEN H Y, HARMANCI A, ÖZCAN A C. Strongly $J$-clean rings with involutions[J]. Contemporary Mathematics, 2014, 609:33-44.
[8] CUI Jian, WANG Zhou. A note on strongly $*$-clean rings[J]. Journal of the Korean Mathematical Society, 2015, 52(4):839-851.
[9] CUI Jian, YIN Xiaobin. Some characterizations of $*$-regular rings[J]. Communications in Algebra, 2017, 45(2):841-848.
[10] DANCHEV P V. Rings with Jacobson units[J]. Toyama Mathematical Journal, 2016, 38:61-74.
[11] HAN J C, NICHOLSON W K. Extensions of clean rings[J]. Communications in Algebra, 2001, 29(6):2589-2595.
[12] CHEN H Y, ABDOLYOUSEFI M S, KOSE H. On medium $*$-clean rings[J]. Mediterranean Journal of Mathematics, 2019, 16(1):1-13.
[13] ATIYAH M F, MACDONALD I G. Introduction to commutative algebra[M]. Boulder: Westview Press, 1969.
[14] LI Chunna, ZHOU Yiqiang. On strongly $*$-clean rings[J]. Journal of Algebra and Its Applications, 2011, 10(6):1363-1370.
[15] CHEN Huanyin. Rings related to stable range conditions[M]. Hackensack: World Scientific, 2011.

(编辑:陈丽萍)