

基于一般重叠函数的模糊数学形态学边缘检测方法

王军涛¹, 黄强²

(1. 西安石油大学理学院, 陕西 西安 710065; 2. 西安石油大学计算机学院, 陕西 西安 710065)

摘要: 基于一般重叠函数与其诱导的剩余蕴涵分别构造了模糊膨胀和模糊腐蚀两类模糊数学形态学算子, 并研究模糊膨胀、模糊腐蚀算子的代数性质, 将模糊聚类方法与模糊膨胀、模糊腐蚀算子结合, 提出一种新的模糊数学形态学边缘检测方法, 利用该算法对多个灰度图像边缘检测。相较于三角模和经典合取算子的边缘检测方法, 文中提出的边缘检测方法适用范围更广, 实验结果表明, 在尽可能提取到完整图像边缘的前提下, 本文边缘检测方法能够有效减少噪声引入率。

关键词: 一般重叠函数; 剩余蕴涵; 模糊数学形态学; 图像边缘检测和提取

中图分类号: TP391

文献标志码: A

引用格式: 王军涛, 黄强. 基于一般重叠函数的模糊数学形态学边缘检测方法[J]. 山东大学学报(理学版), 2026, 61(1): 36-48.

Fuzzy mathematical morphology edge detection method derived from general overlap functions

WANG Juntao¹, HUANG Qiang²

(1. School of Science, Xi'an Shiyou University, Xi'an 710065, Shaanxi, China; 2. School of Computer Science, Xi'an Shiyou University, Xi'an 710065, Shaanxi, China)

Abstract: Two types of fuzzy mathematical morphology operators are constructed based on the general overlap function, and the corresponding fuzzy mathematical morphological edge detection methods are proposed, which are successfully applied to image edge extraction. Based on the general overlap functions and their corresponding residuated implications, two types of fuzzy mathematical morphological operators, including fuzzy erosion and fuzzy dilation, are constructed, respectively, and their related algebraic properties are studied. A new fuzzy mathematical morphological edge detection method is proposed by combining the fuzzy clustering method with the fuzzy erosion and fuzzy dilation. This edge detection method is wider than that of the edge detection method of the triangular norms and the classical conjunction, and the experimental results show that the noise introduction rate can be effectively reduced under the premise of extracting the edge of the complete image as much as possible.

Key words: general overlap function; residuated implication; fuzzy mathematical morphology; image edge detection and extraction

0 引言

重叠函数^[1]是一类特殊的二元聚合函数, 它也常作为模糊合取的真值函数解决图像处理和分类问题^[2], 这些问题最初均利用三角模^[3]作为聚合函数处理。随着研究的不断深入, 越来越多的学者发现三角模的结合律不仅作用不大, 而且还增加了计算的复杂程度^[4], 因此弱化三角模的结合律, 提出新的非结合模糊合取连接词真值函数——重叠函数。一般重叠函数^[5]是较重叠函数范围更广的函数形式, 在弱化重叠函数边界条件基础上得到的一类新的多元函数, 即一般重叠函数。在计算分类问题中一般重叠函数匹配度具有优势。模糊蕴涵^[6]是模糊逻辑理论中最基本的逻辑联结词之一, 在模糊推理和控制系统、图像处理、数据

收稿日期: 2025-03-24; 网络出版时间: 2025-12-16

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(12471442); 陕西省自然科学基金基础研究计划资助项目(2025JC-YBQN-092, 2025JC-YBMS-034); 陕西省教育厅青年高校创新团队科研项目(23JP132); 西安石油大学研究生创新项目(YCX2413141)

第一作者: 王军涛(1987—), 男, 副教授, 硕士生导师, 博士, 研究方向为序代数、非经典逻辑及不确定性推理. E-mail: wjt@xsyu.edu.cn

挖掘中有重要作用^[7],利用聚合函数诱导其相应模糊蕴涵(或剩余蕴涵)^[8]是构造模糊蕴涵最常用的方法之一。

数学形态学理论^[9]源于二值形态学和灰度形态学,主要应用于二值图像处理,提取图像的形状特征。Serra以集合论为工具,在经典集上利用数学形态学处理图像的腐蚀、膨胀、开和闭,为后续图像处理的研究提供了坚实理论基础。Bloch等^[11]发表数学形态学的拓展综述,总结数学形态学的发展与基本理论,数学形态学不仅广泛应用于图像处理领域,如边缘检测、图像分割以及纹理分析,而且还应用于在材料科学、生物医学成像、文档识别等多个学科领域^[12]。由于图像在处理存在图像本身的模糊性以及图像处理中的模糊性,因此将模糊概念引入数学形态学中。Sinha等^[13]首先将模糊理论引入数学形态学领域,即模糊数学形态学,图像视为模糊集合,集合的交、并运算分别由模糊集的交、并运算代替,形成模糊腐蚀和模糊膨胀,为图像处理中的模糊前景和模糊结构元素提供了一种新的模糊代数处理框架;De Baets等^[14]建立了模糊数学形态学的基本理论框架,探讨了模糊形态学算子的幂等性、扩展性、反扩展性和凸性等相关性质,为模糊图像处理提供了理论基础和方法论指导。随着机器学习相关理论研究的不断深入,基于模糊集的 K -均值算法,即模糊聚类对图像预处理并实现图像分割,能提高其效率^[15]。

图像边缘提取是图像处理和计算机视觉领域中的一个非常重要的技术,用于检测和识别图像的边缘和轮廓,进行行为分析和异常检测,常用的经典算法主要有Canny、Prewitt、Laplacian、Sobel、Roberts算法。Nachtegaal等^[16]提出了模糊数学形态学方法提取灰度图像的边缘信息,González-Hidalgo等^[17]基于离散三角模研究了模糊数学形态学的数学性质,包括单调性、幂等性、平移和缩放不变性等,利用灰度图像边缘提取和噪声减小实验,与umbra方法和连续Łukasiewicz三角模得到的结果对比。三角模的结合律作为代数运算时简化运算过程,但是在实际应用研究中,尤其是解决验证性问题时,结合律会增加计算的复杂程度,而非结合的三角模在模糊数学形态学理论和实际应用中能减小计算复杂度,文献[18-20]基于重叠函数构造模糊数学形态学算子并结合模糊聚类算法,提出了引入噪声较少的边缘检测算法。

但现有研究用于构造模糊膨胀和模糊腐蚀算子的重叠函数和模糊蕴涵未构成剩余对,看似放宽了重叠函数和模糊蕴涵的选取范围,实则导致两者关联不大,增加实验过程中选取聚合函数和模糊蕴涵的难度,同时增加实验过程和结果分析数据处理的复杂程度。本文研究基于一般重叠函数并结合模糊聚类的模糊数学形态学边缘检测(general overlap function-based fuzzy mathematical morphology for edge detection with fuzzy c-means clustering, GFCM)方法,构建对应的模糊数学形态学检测方法。与已有的研究工作相比,本文中所得的理论结果更具一般性,算法的应用范围自然也更广。

1 预备知识

定义 1^[16] 二元函数 $C: [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ 称为模糊合取若满足以下条件:

- (1) $\forall x, y, z \in [0, 1]$, 当 $x \leq y$ 时, 有 $C(x, z) \leq C(y, z)$, $C(z, x) \leq C(z, y)$,
- (2) $C(0, 0) = C(1, 0) = C(0, 1) = 0$,
- (3) $C(1, 1) = 1$ 。

定义 2^[5] 二元函数 $G: [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ 称为一般重叠函数若满足以下条件:

- (1) $G(x, y) = G(y, x)$,
- (2) 若 $xy = 0$, 则 $G(x, y) = 0$,
- (3) 若 $xy = 1$, 则 $G(x, y) = 1$,
- (4) G 关于两个变量均是单调递增的,
- (5) G 是连续的。

一般重叠函数 G 称为膨胀的若其满足性质 $G(1, x) \geq x$ 。

如无特别说明,本文中的一般重叠函数均是膨胀的一般重叠函数。

例 1 一般重叠函数的 5 个例子如下:

$$G_1 = \frac{2xy}{1+xy}, \quad G_2 = \sqrt[3]{x^2y^2}, \quad G_3 = \sin\left(\frac{\pi}{2}xy\right), \quad G_4 = \frac{1}{2}\log_2(3xy+1), \quad G_5 = \max\left(0, \frac{3xy-0.1}{2.9}\right)。$$

定义 3^[6] 二元函数 $T:[0,1]^2 \rightarrow [0,1]$ 称为三角模若满足以下条件:

- (1) T 是单调递增的,
- (2) T 是可交换的,
- (3) T 满足结合律,
- (4) $T(1,x)=x$ 。

定义 4^[6] 二元函数 $I:[0,1]^2 \rightarrow [0,1]$ 称为模糊蕴涵若满足以下条件:

- (1) 当 $x \leq y$ 时,有 $I(x,z) \geq I(y,z)$, $I(z,x) \leq I(z,y)$,
- (2) $I(0,0)=I(0,1)=I(1,1)=1$,
- (3) $I(1,0)=0$ 。

定理 1^[6] 设 C 为模糊合取,定义二元函数,

$$I_C = \sup \{ t \in [0,1] \mid C(x,t) \leq y \}。$$

若满足 $C(1,x) \geq 0$,则称 I_C 为模糊合取 C 诱导的剩余蕴涵。特别地,由左连续模糊合取诱导的模糊蕴涵是剩余蕴涵且两者满足剩余律

$$C(x,y) \leq z \text{ 当且仅当 } y \leq I_C(x,z)。$$

例 2 由于例 1 的 5 个一般重叠函数均满足定义 1,因此根据定理 1 可求出相应的剩余蕴涵:

$$I_{G_1} = \begin{cases} \frac{y}{x(2-y)}, & \text{其他,} \\ 1, & \frac{1}{x} > \frac{2}{y} - 1, \end{cases} \quad I_{G_2} = \begin{cases} \frac{y^{1.5}}{x}, & \text{其他,} \\ 1, & x < y^{1.5}, \end{cases} \quad I_{G_3} = \begin{cases} \frac{2\arcsin y}{\pi x}, & \text{其他,} \\ 1, & \sin \frac{\pi x}{2} < y, \end{cases}$$

$$I_{G_4} = \begin{cases} \frac{2^{2y}-1}{3x}, & \text{其他,} \\ 1, & \frac{1}{2} \log_2(3x+1) < y, \end{cases} \quad I_{G_5} = \begin{cases} \frac{2.9y+0.1}{3x}, & \text{其他,} \\ 1, & y > \frac{2.9y+1}{3x}. \end{cases}$$

例 1 中的每个一般重叠函数都可以诱导对应的剩余蕴涵,此时称 (G, I_G) 为一般重叠函数 G 的剩余对。

定义 5^[16] 设 $A: \mathbf{R}^n \rightarrow [0,1]$, $B: \mathbf{R}^n \rightarrow [0,1]$, C 为模糊合取, I 为模糊蕴涵,则模糊腐蚀和膨胀算子定义为

$$E(A, B)(p) = \inf_{q \in \mathbf{R}^n} I(B(q), A(p-q)),$$

$$D(A, B)(p) = \sup_{q \in \mathbf{R}^n} C(B(q), A(p-q))。$$

式中: p 表示模糊腐蚀、膨胀运算中待计算灰度值的目标坐标, q 为原始图像对应于该目标位置的灰度结构元素所覆盖的参考坐标与 p 的偏移量。

基于定义 5 中构造的模糊腐蚀和膨胀算子,文献[16]给出了其相应的图像边缘检测算法。

算法 1^[16] 模糊数学形态学图像边缘检测算法。

输入 灰度图像 A , 结构元素 B 。

输出 二值边缘图像 A 。

(1) 灰度图像 A 模糊化为 $A \leftarrow \frac{A}{255.0}$;

(2) 计算 A 的模糊腐蚀 $E(A, B)$ 和模糊膨胀 $D(A, B)$;

(3) 得到 A 的灰度边缘: $A^* \leftarrow D(A, B) \setminus E(A, B)$;

(4) 将 A^* 去模糊化和二值化,得到最终的二值边缘图像 A 。

文献[17]基于三角模的剩余对 (T, I_T) 构造了模糊膨胀和腐蚀算子,并提出了基于三角模的模糊数学形态学边缘检测方法(T -norms based fuzzy mathematical morphology edge extraction algorithm, TFMM)。

2 基于一般重叠函数的模糊数学形态学算子

相较于三角模和重叠函数,一般重叠函数为模糊合取联结词提供了更广泛的代数处理框架,不仅具有重

叠函数的连续性和单调性,而且边界条件更宽,这种灵活性使得一般重叠函数能够更好地适应不同的应用场景,在图像边缘检测与分类等领域,能够更精确地捕捉模糊集合间的复杂关系,这也是本文利用一般重叠函数 G 的剩余对 (G, I_G) 构造模糊数学形态学算子的主要原因。

定义 6 设 $A: \mathbf{R}^2 \rightarrow [0, 1]$, $B: \mathbf{R}^2 \rightarrow [0, 1]$, 令 $f(B) = \{B(q) \neq \emptyset\} \subseteq \mathbf{R}^2$, (G, I_G) 为一般重叠函数 G 对应的剩余对,则模糊腐蚀与模糊膨胀定义为

$$E_{I_G}(A, B)(p) = \inf_{q \in f(B)} I_G(B(q), A(p-q)),$$

$$D_G(A, B)(p) = \sup_{q \in f(B)} G(B(q), A(p-q)).$$

注 1 定义 5 中并没有严格要求构造模糊膨胀和模糊腐蚀的模糊合取和模糊蕴涵满足剩余律,而定义 6 中的模糊蕴涵是通过一般重叠函数诱导的剩余蕴涵,这是定义 5,6 的本质区别。

例 3 如图 1 所示, A_1 是一个灰度图像(已模糊化), 结构元素 B'_1 、 B'_2 分别为三阶模糊方阵:

$$B'_1 = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.9 & 0.9 \\ 0.9 & 1 & 0.9 \\ 0.9 & 0.9 & 0.9 \end{pmatrix}, \quad B'_2 = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.6 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}.$$

当结构元素 B'_1 的中心与图 1 的中心,即与 0.03 重合时,模糊膨胀为(由于模糊腐蚀与模糊膨胀的计算方法类似,此处仅计算模糊膨胀):

$$D_G(A_1, B'_1)(p) = \sup_{q \in f(B'_1)} D_G(B'_1(q), A_1(p-q))$$

$$= \sup_{q \in f(B'_1)} D_G \left(\begin{pmatrix} 0.9 & 0.9 & 0.9 \\ 0.9 & 1 & 0.9 \\ 0.9 & 0.9 & 0.9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0.88 & 0.95 & 0.42 \\ 0.25 & 0.03 & 0.60 \\ 0.44 & 0.12 & 0.99 \end{pmatrix} \right)$$

$$= \sup_{q \in f(B'_1)} \begin{pmatrix} D_G(0.9, 0.88) & D_G(0.9, 0.95) & D_G(0.9, 0.42) \\ D_G(0.9, 0.25) & D_G(1, 0.03) & D_G(0.9, 0.60) \\ D_G(0.9, 0.44) & D_G(0.9, 0.12) & D_G(0.9, 0.99) \end{pmatrix}.$$

当图像 A 与 B 未能完全重叠时,只计算 A 与 B 重叠的部分。

0.72	0.92	0.83	0.49	0.14
0.23	0.88	0.95	0.42	1.00
0.32	0.25	0.03	0.60	0.62
0.94	0.44	0.12	0.99	0.91
0.52	0.26	0.68	0.90	0.03

图 1 随机生成的灰度图像 A_1
Fig.1 Randomly generated gray scale image

定理 2 令 A, A_d 为灰度图像, B, B_d 为灰度结构元素 $(d = 1, 2, \dots, k)$, (G, I_G) 为一般重叠函数 G 的剩余对,则模糊膨胀和腐蚀算子满足下列性质:

- (1) D_G 关于 2 个变量递增,
- (2) E_{I_G} 仅关于第 1 个变量递增,
- (3) $D_G(\bigcup_{d=1}^k A_d, B) = \bigcup_{d=1}^k D_G(A_d, B)$, $D_G(A, \bigcup_{d=1}^k B_d) = \bigcup_{d=1}^k D_G(A, B_d)$,
- (4) $E_{I_G}(\bigcap_{d=1}^k A_d, B) = \bigcap_{d=1}^k E_{I_G}(A_d, B)$, $E_{I_G}(A, \bigcap_{d=1}^k B_d) = \bigcap_{d=1}^k E_{I_G}(A, B_d)$ 。

证明 证明与文献[16]命题 37 类似,证明略。

例 4 如图 2 所示, A_2 和 A_3 是仅灰度峰值不同的灰度图像(其中 A_3 灰度最大为 127)。首先检测 A_2 的

边缘信息(结构元素为 B'_1 , 剩余对为 (G_3, I_{G_3})), 模糊腐蚀后, 在视觉上图像的整体灰度下降, 模糊膨胀则相反, 模糊膨胀与模糊腐蚀作差后得到 A_2 的边缘信息; 若替换输入为 A_3 , 重复上述操作, 腐蚀运算后的整体取值偏低, 继续作差无法得到 A_3 的边缘信息; 若替换结构元素为 B'_2 , 再次操作, 再次成功检测到边缘信息。

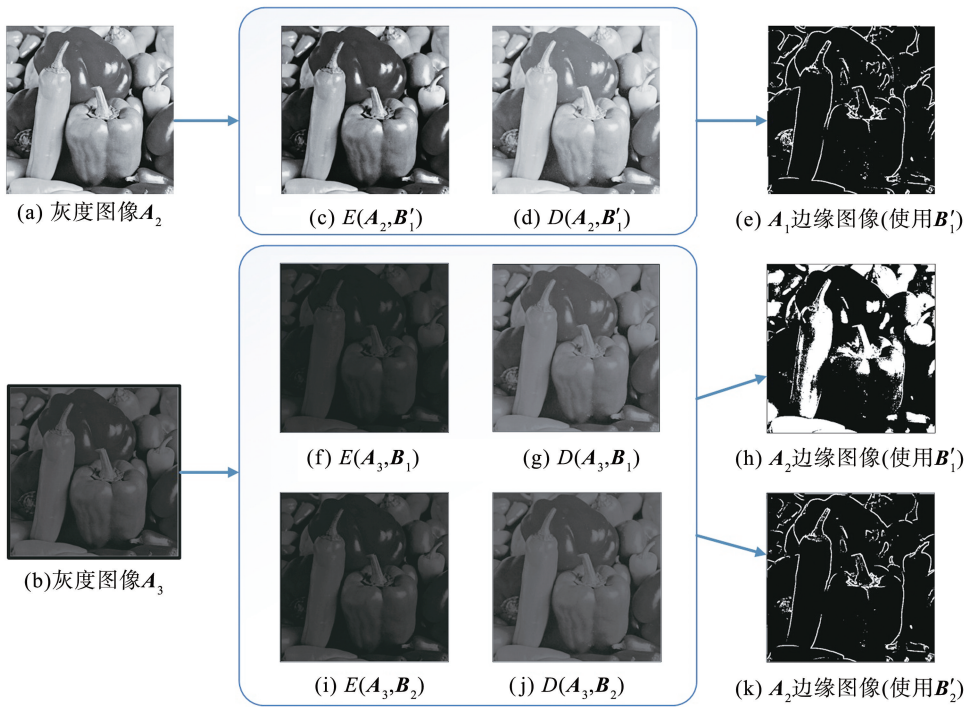


图2 基于定义6的图像边缘检测流程示例

Fig.2 Demonstration of image edge detection using the operators defined in definition 6

不同结构元素对图像边缘检测的结果有影响。然而数据集的灰度存在不稳定性, 若仅使用算法1检测边缘, 会丢失部分边缘信息。为了最大程度检测到灰度图像关键部分的边缘信息, 本文考虑将数据集分割为灰度值整体相对差异较大的2个区域: 目标(O_{bj})与背景(B_G), 再分别检测边缘信息以保证最大限度地检测到所有的边缘信息。那么, 如何有效地分割呢?

常见的图像分割算法有阈值分割法、区域生长分割法以及基于聚类的分割法等, 但这些分割法存在一定的局限性, 如阈值分割法对噪声敏感且难以处理灰度渐变图像; 区域生长分割法依赖初始种子点的选择, 而本文采用模糊C均值(fuzzy C-means, FCM)算法对图像数据集进行分割。FCM算法^[15]通过优化目标函数, 计算每个样本(像素点归一化)的隶属度, FCM算法的模糊隶属机制比传统硬聚类方法能够更好地适应灰度的不稳定性, 从而划分图像为目标与背景。定义模糊聚类算法的目标函数为

$$J = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \mu_{ij}^2 \|s_j - c_i\|^2, \quad (1)$$

式中: M 个聚类中心, N 个聚类样本, s_j 表示第 j 个样本, c_i 为第 i 个聚类中心, 即

$$c_i = \frac{\sum_{j=1}^N \mu_{ij}^2 s_j}{\sum_{j=1}^N \mu_{ij}^2}, \quad (2)$$

式中: μ_{ij} 代表 s_j 关于 c_i 的隶属度, $\mu_{ij} \in [0, 1]$ 且满足 $\sum_{i=1}^M \mu_{ij} = 1$, 即

$$\mu_{ij} = \frac{1}{\sum_{l=1}^M \left(\frac{\|s_j - c_l\|^2}{\|s_j - c_i\|^2} \right)^{2\alpha}} \quad (3)$$

式中: c_l 表示第 l 个聚类中心 ($l=1, 2, \dots, M$ 且 $l \neq i$)。

在分割灰度图像时, 若分割依据仅为灰度值单一因素, 造成2个距离较远但灰度值相近的两个点被聚成

一类的现象,不利于后续的图像边缘检测。因此,在聚类中还须考虑样本的位置信息。定义向量

$$s = \left(\frac{u}{U}, \frac{v}{V}, \frac{Z(u,v)}{255} \right) \in [0,1]^3, \quad c = \left(\frac{u}{U}, \frac{v}{V}, \frac{Z(u,v)}{255} \right) \in [0,1]^3,$$

式中: s 为归一化后的样本, U, V 分别表示灰度图像的宽和高, $Z(u, v)$ 表示第 u 行, 第 v 列所在样本的灰度值, c 表示第 u 行, 第 v 列, 灰度值为 $Z(u, v)$ 的聚类中心。

算法 2 基于模糊聚类的灰度图像分割算法。

输入 灰度图像 A , 最大迭代次数 m , 迭代阈值 w , 聚类中心数量 a 。

输出 灰度图像 A 的分割结果 A' 。

- (1) 模糊化 A 得到 A , 关于灰度图像 A 的向量组 $S = (s_1, s_2, \dots, s_{u \times v})$, 初始化迭代次数 $h = 1$;
- (2) 随机初始化 $c_i, i = 1, 2, \dots, a$;
- (3) 根据式(2)更新隶属度矩阵;
- (4) 根据式(3)更新聚类中心;
- (5) 计算目标函数 J 的值, 若 $J > w, h < m$, 则当前迭代次数 h 自增 1, 并跳转步骤(3), 否则跳转步骤(6);
- (6) 得到最大隶属度为第 g 个 ($g = 1, 2, \dots, a$) 聚类中心的所有的点构成的集合, 并分别赋灰度值为

$$\frac{255g}{a};$$

- (7) 计算各聚类中心分别对应的域的灰度均值, 对灰度值排序并得到分割结果 A' 以确定最终的目标 O_{b_j} 与背景 B_G 。

定理 3 设 A, B 分别为灰度图像和灰度结构元素, (G, I_G) 是关于一般重叠函数 G 的剩余对, 则

- (1) $\forall p, p-q \in f(B)$, 若 $A(p-q) = 0$, 则 $D_G(A, B)(p) = 0$ 。
- (2) $\exists p, q, (p-q) \in f(B)$,
 - (i) 若 $B(q) = 1$ 且 $A(p-q) = 1$, 则 $D_G(A, B)(p) = 1$,
 - (ii) 若 $B(q) = 1$ 且 $A(p-q) = 0$, 则 $E_{I_G}(A, B)(p) = 0$,
 - (iii) 若 $B(q) = 0$ 或 $A(p-q) = 0$, 则 $D_G(A, B)(p) = 0$ 。

证明 证明与文献[18]定理 3 类似, 证明略。

定理 4 设灰度图像 A 和结构元素 B 为两个闭映射, $f(B)$ 是闭集, G 为一般重叠函数, 则 $\forall q \in \mathbf{R}^2$,

$$D_G(A, B)(p) = \max_{q \in f(B)} G(B(q), A(p-q))。$$

证明 证明与文献[18]中定理 4 的证明类似, 证明略。

作为定理 4 的推广, 得到下面更一般的结论。

定理 5 设 A_1, A_2 分别为灰度图像, B 为灰度结构元素, G 为一般重叠函数, $D_G(A, B)$ 为模糊膨胀, 则 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta$, 若

$$|A_1(r) - A_2(r)| \leq \delta (\forall r \in \mathbf{R}^2),$$

那么以下表达成立:

$$|D_G(A_1, B)(p) - D_G(A_2, B)(p)| \leq \varepsilon (\forall p \in \mathbf{R}^2)。$$

证明 证明与文献[16]中定理 5 的证明相类似。

本文提出了新的 GFCM 算法, 这种算法以 FCM 聚类作为预处理步骤, 首先分割图像为目标和背景, 再分别用不同结构元素分别对不同的区域提取边缘, 尽可能提取到完整的图像边缘。

算法 3 GFCM 图像边缘检测算法。

输入 灰度图像 A , 灰度结构元素 B_1, B_2 。

输出 二值边缘图像 A^* 。

- (1) 灰度图像 A 模糊化为 $A \leftarrow \frac{A}{255.0}$;
- (2) 执行算法 2 分割图像, 分别得到灰度图像 A 的目标 O_{b_j} 与背景 B_G ;
- (3) 当 $B_1(L(0,0)) \in O_{b_j}$, 计算模糊腐蚀 $E_{I_G}(A, B_1)$ 与模糊膨胀 $D_G(A, B_1)$;
- (4) 当 $B_2(L(0,0)) \in B_G$, 计算模糊腐蚀 $E_{I_G}(A, B_2)$ 与模糊膨胀 $D_G(A, B_2)$;

- (5) 分别计算目标和背景的灰度边缘图像 $\begin{cases} O_{\text{edge}} = D_G(A, B_1) \setminus E_{I_G}(A, B_1); \\ B_{\text{edge}} = D_G(A, B_2) \setminus E_{I_G}(A, B_2); \end{cases}$
- (6) 得到新的灰度边缘图像 $A^* = O_{\text{edge}} \cup B_{\text{edge}}$;
- (7) 对 A^* 去模糊化后二值化, 得到 A^* 。

3 图像边缘检测实验

3.1 实验流程与数据集

图3展示了实验的整体流程, 为全面评估本文中算法的性能, 实验将本文所提出的 GFCM 算法与已有算法 Canny、Sobel、Laplacian、Prewitt、Roberts 和 TFMM^[17] 边缘检测算法进行对比。

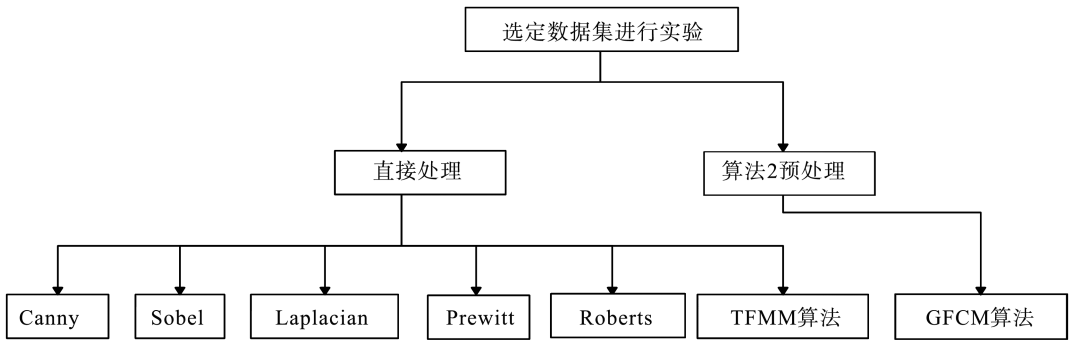


图3 实验流程图

Fig.3 Flow chart of experiment

实验的具体步骤如下:

- (1) 选择如图4所示的灰度图像检测边缘;
- (2) 归一化灰度图像中的所有像素点为 s ;
- (3) 设置最大迭代次数 $m = 10$, 迭代阈值 $w = 10^{-6}$, 聚类中心数量 $a = 10$;
- (4) 随机初始化聚类中心 $c_i, i = 1, \dots, 10$;
- (5) 根据公式(2)更新隶属度矩阵;
- (6) 根据公式(3)更新聚类中心;
- (7) 判定是否满足终止条件, 若满足则退出循环, 否则继续迭代;
- (8) 得到灰度图像目标与背景的分割结果;
- (9) 根据聚类结果分割区域, 对不同区域使用不同的结构元素分别计算模糊腐蚀和模糊膨胀;
- (10) 得到灰度边缘图像;
- (11) 将灰度边缘图像二值化得到最终的边缘图像;
- (12) 将得到的实验结果与数据集中人工标注的真实边缘(ground truth, GT)进行对比;
- (13) 设计对比实验, 得到实验结果。



图4 实验测试图像

Fig.4 Test images used in the experiments

3.2 实验结果

为了对实验结果有更加完整的评估,选择伯克利分割数据集 (Berkeley segmentation data set and Benchmark 500, BSDS500) 实验。首先模糊化数据集并进行模糊聚类,实现图像分割,并得到目标与背景,结果如图 5 所示,图中存在少量局部断裂,由定理 2、5 可知,少量断裂不影响最终的图像边缘提取结果。将 GFCM 算法用于图像边缘提取的结果如图 6 所示,TFMM 算法检测的图像边缘结果如图 7 所示,图 8—12 为经典图像边缘检测算法的结果。

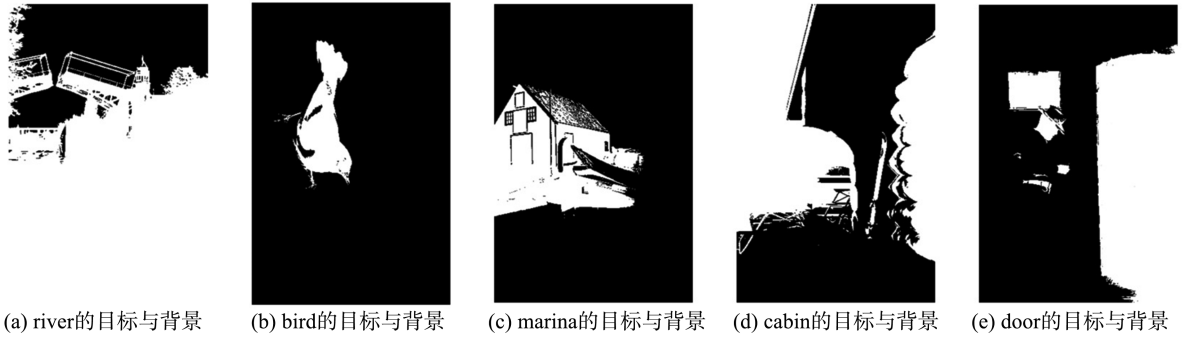


图 5 由算法 2 得到的目标-背景二值化结果

Fig.5 Object-background binarization results stitching image obtained by algorithm 2

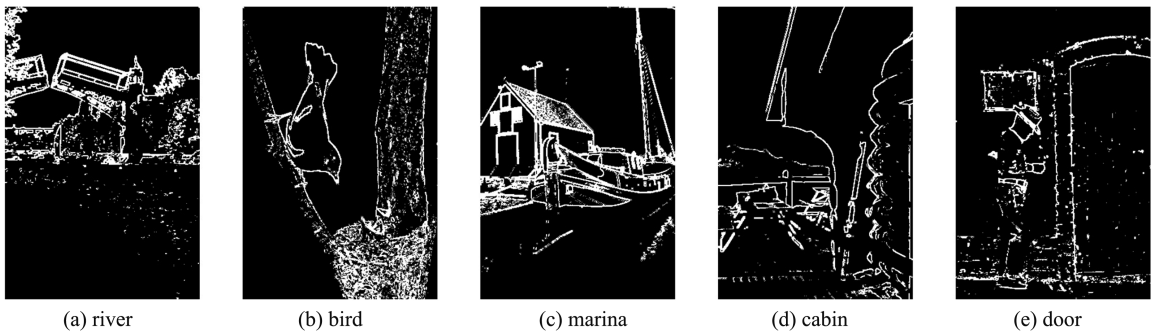


图 6 GFCM 算法的图像边缘检测结果

Fig.6 Image edge detection results using GFCM algorithm

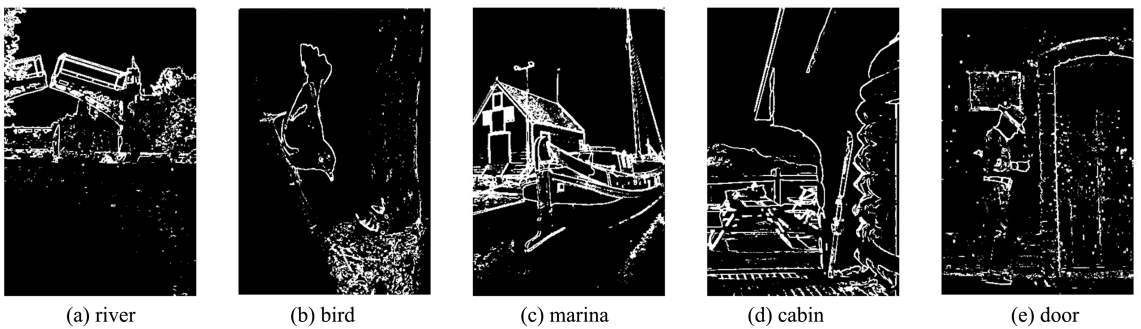


图 7 TFMM 算法的图像边缘检测结果

Fig.7 Image edge detection results using TFMM algorithm

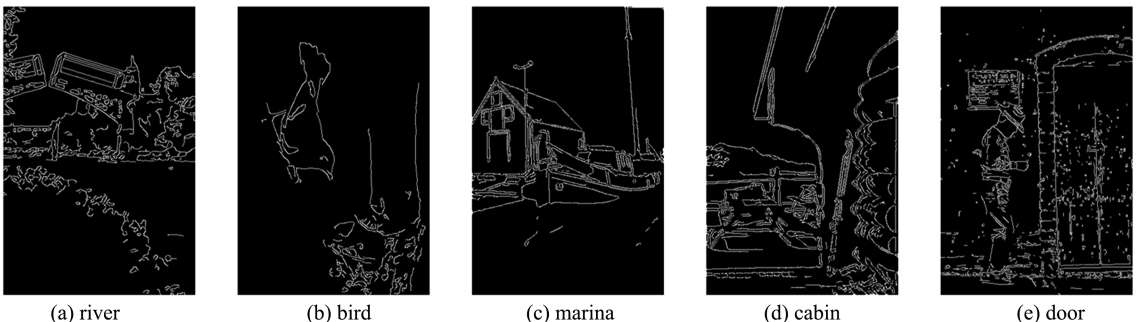


图 8 Canny 算法的检测边缘结果

Fig.8 Image edge detection results using Canny algorithm

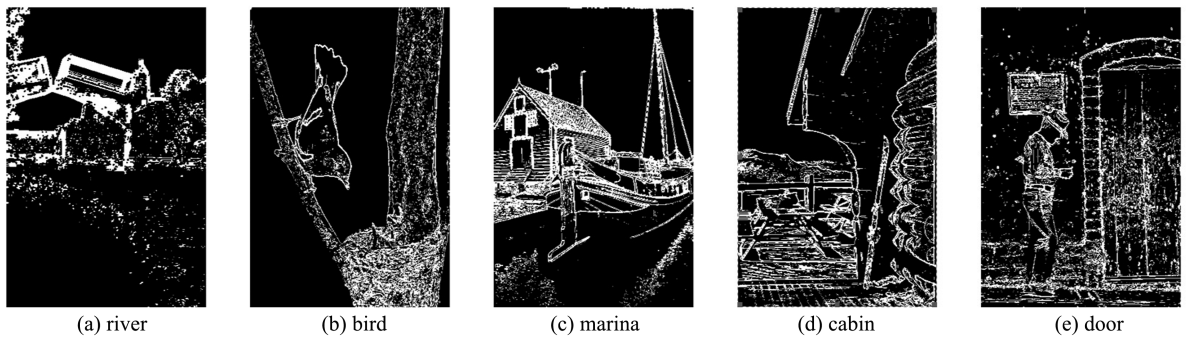


图 9 Roberts 算法的检测边缘结果

Fig.9 Image edge detection results using Roberts algorithm

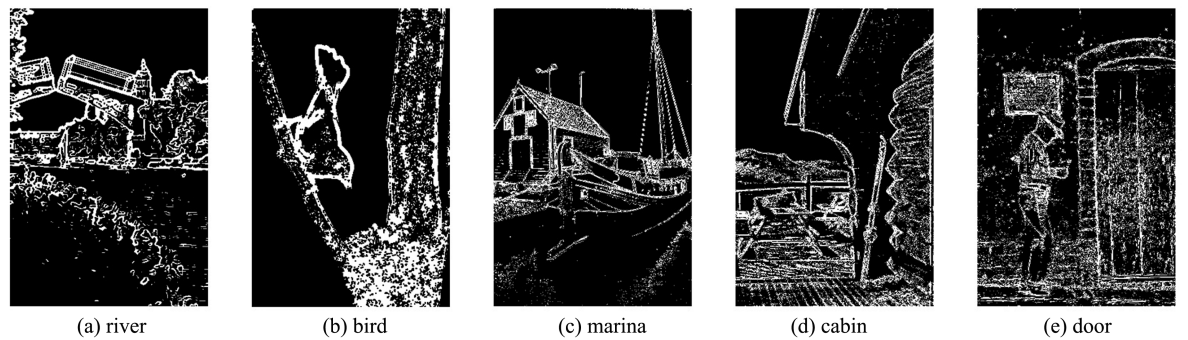


图 10 Laplacian 算法的检测边缘结果

Fig.10 Image edge detection results using Laplacian algorithm

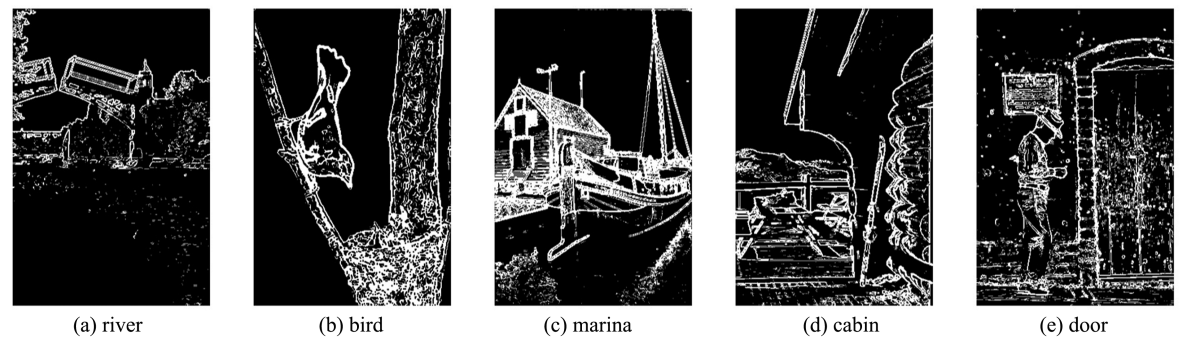


图 11 Prewitt 算法的检测边缘结果

Fig.11 Image edge detection results using Prewitt algorithm

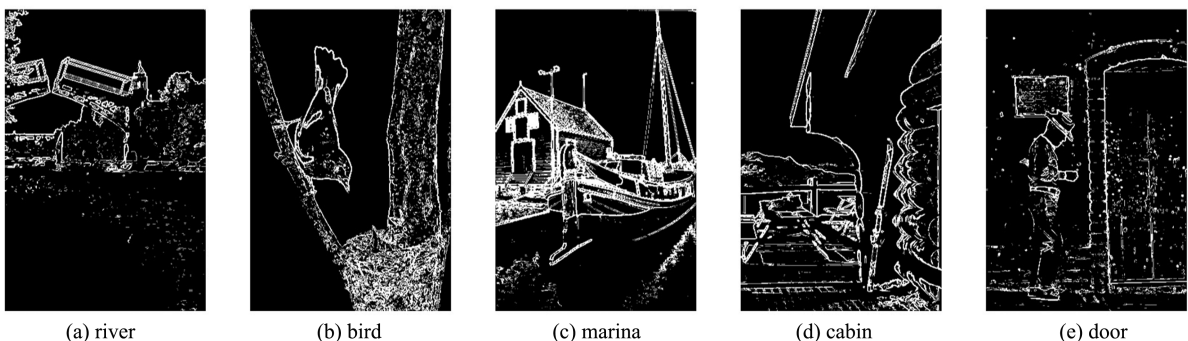


图 12 Sobel 算法的检测边缘结果

Fig.12 Image edge detection results using Sobel algorithm

在经典边缘检测算法中,虽然 Canny 边缘检测算法尽可能避免引入噪声,使得部分真边缘未检测到。Roberts 算法中(a)出现了双边缘,其余的边缘检测算法虽然检测到边缘信息,但由于对纹理边缘过于敏感,引入了大量的噪声,使得检测结果中边缘与噪声混杂,难以准确区分真实边缘的轮廓。而 TFMM 算法与 GFCM 算法在检测到边缘信息的同时,也降低了噪声。

3.3 算法评估

BSDS500 数据集中包含实验的图像以及 GT,即 GT 作为文中算法检验的参照,和文献[17]的部分指标保持一致,利用精确率 P 和召回率 R 量化检测效果,精确率为

$$P = \frac{T_p}{T_p + F_p}, \tag{4}$$

式中: T_p 表示算法正确识别出的真实边缘像素数量, F_p 代表将非边缘像素错误标记为边缘的数量。 P 衡量检测结果为边缘的样本中有多少是真边缘,体现边缘检测的准确性。

召回率为

$$R = \frac{T_p}{T_p + F_N}, \tag{5}$$

式中: F_N 指真实边缘像素未被检测出的数量, R 反映真边缘被算法正确检测的比例,体现检测的覆盖率。

P 、 R 均可评估图像边缘检测的性能,若单独考虑会造成算法评估的片面性,而 F (F -Score) 作为精确率和召回率的调和平均数,更适合于评估图像边缘提取的能力,即

$$F = \frac{2P \times R}{P + R}. \tag{6}$$

当 F 越大时,说明检测到的边缘的准确度也越大,对于不同的(不同类型的)图像, F 也往往有较大的差异,这是由于不同的图像有不同的边缘特征。

在边缘检测的任务中,噪声是图像边缘检测中不可避免的,而降低噪声的引入也是边缘检测的一个任务,噪声引入率为

$$\eta = \frac{S_{\text{noise}}}{S}. \tag{7}$$

式中: S_{noise} 表示引入的噪声面积, S 表示灰度图像总面积。噪声引入率作为评估算法的另一标准。

表 1 列举了实验中用于 TFMM 算法的三角模及相应的剩余对 (T, I_T) 。

表 1 三角模的剩余对 (T, I_T)
Table 1 Pairs (T, I_T) of triangle norms

三角模	剩余蕴涵
$T_1 = \min(x, y)$	$I_{T_1} = \min(1, y)$
$T_2 = xy$	$I_{T_2} = \begin{cases} \frac{y}{x}, & \text{其他} \\ 1, & y > x \end{cases}$
$T_3 = \max(0, x+y-1)$	$I_{T_3} = \begin{cases} y+1-x, & x \geq y \\ 1, & x < y \end{cases}$
$T_4 = \max(x^{0.5} + y^{0.5} - 1, 0)^2$	$I_{T_4} = \min(1, (\sqrt{y} - \sqrt{x} + 1)^2)$

GFCM 算法的边缘提取结果的 F 和噪声引入率分别如表 2—3 所示。表 4—5 为 TFMM 算法的 F 与噪声引入率,将两类模糊数学形态学边缘提取算法的均值与经典边缘检测(见图 8—12)算法进行对比得到了表 6—7。

表 2 GFCM 算法的边缘检测 F
Table 2 Edge detection F of GFCM algorithm

剩余对	river	bird	marina	cabin	door
(G_1, I_{G_1})	0.370 0	0.260 0	0.340 0	0.280 0	0.350 0
(G_2, I_{G_2})	0.360 0	0.270 0	0.320 0	0.280 0	0.310 0
(G_3, I_{G_3})	0.380 0	0.250 0	0.370 0	0.240 0	0.300 0
(G_4, I_{G_4})	0.380 0	0.270 0	0.320 0	0.280 0	0.310 0
GFCM 算法的 F 平均值	0.372 5	0.262 5	0.337 5	0.270 0	0.317 5

表3 GFCM算法的边缘检测噪声引入率
Table 3 Edge detection noise introduction rate of GFCM algorithm 单位:%

剩余对	river	bird	marina	cabin	door
(G_1, I_{G_1})	0.72	1.17	0.65	1.22	0.74
(G_2, I_{G_2})	0.59	2.60	0.70	1.48	1.02
(G_3, I_{G_3})	1.83	1.25	0.42	1.45	1.30
(G_4, I_{G_4})	0.52	1.26	0.63	1.42	0.84
GFCM算法的噪声引入率平均值	0.92	1.57	0.60	1.39	0.98

表4 TFMM算法的边缘检测 F
Table 4 Edge detection F of TFMM algorithm

剩余对	river	bird	marina	cabin	door
(T_1, I_{T_1})	0.39	0.28	0.33	0.28	0.31
(T_2, I_{T_2})	0.35	0.24	0.32	0.28	0.33
(T_3, I_{T_3})	0.40	0.23	0.35	0.26	0.30
(T_4, I_{T_4})	0.42	0.29	0.33	0.28	0.32
TFMM算法的 F 平均值	0.39	0.26	0.33	0.28	0.32

表5 TFMM算法的边缘检测噪声引入率
Table 5 Edge detection noise introduction rate of TFMM algorithm 单位:%

剩余对	river	bird	marina	cabin	door
(T_1, I_{T_1})	1.65	1.80	0.99	1.39	1.61
(T_2, I_{T_2})	1.34	1.86	0.94	1.37	1.56
(T_3, I_{T_3})	1.29	2.06	1.05	1.68	3.07
(T_4, I_{T_4})	1.22	1.89	1.02	1.47	2.34
GFCM算法的噪声引入率平均值	1.38	1.90	1.00	1.48	2.15

表6 边缘检测方法的 F
Table 6 Distribution of $f1$ -scores for edge detection method

算法	river	bird	marina	cabin	door
Canny	0.26	0.16	0.21	0.22	0.23
Roberts	0.29	0.23	0.26	0.19	0.25
Laplacian	0.37	0.24	0.29	0.22	0.27
Prewitt	0.34	0.23	0.30	0.24	0.30
Sobel	0.30	0.21	0.32	0.25	0.26
TFMM	0.39	0.26	0.33	0.28	0.32
GFCM	0.37	0.26	0.34	0.27	0.32

表7 边缘检测方法的噪声引入率
Table 7 Distribution of noise introduction rates for edge detection method 单位:%

算法	river	bird	marina	cabin	door
Canny	2.51	0.99	2.10	4.53	3.83
Roberts	1.94	3.34	1.59	2.53	4.71
Laplacian	2.48	2.41	2.31	3.84	6.13
Prewitt	2.14	1.24	1.25	1.74	4.17
Sobel	1.93	2.97	1.40	2.55	3.35
TFMM	1.38	1.90	1.00	1.48	2.15
GFCM	0.92	1.57	0.60	1.39	0.98

当应用 GFCM、TFMM、Canny、Laplacian、Prewitt、Roberts、Sobel 算法分别对等图 4 进行边缘提取时,每个算法的 F 和平均噪声引入率如表 6 所示。但在表 2—5 中,噪声引入率存在一定的波动,这是由于不同的灰度图像有着不同的特征,这些特征对噪声有着直接的影响。

在图像边缘检测任务中,GFCM 算法的提取结果与 TFMM 算法的无显著差异,GFCM 算法的噪声引入率小于 TFMM 算法。如图 13 所示。

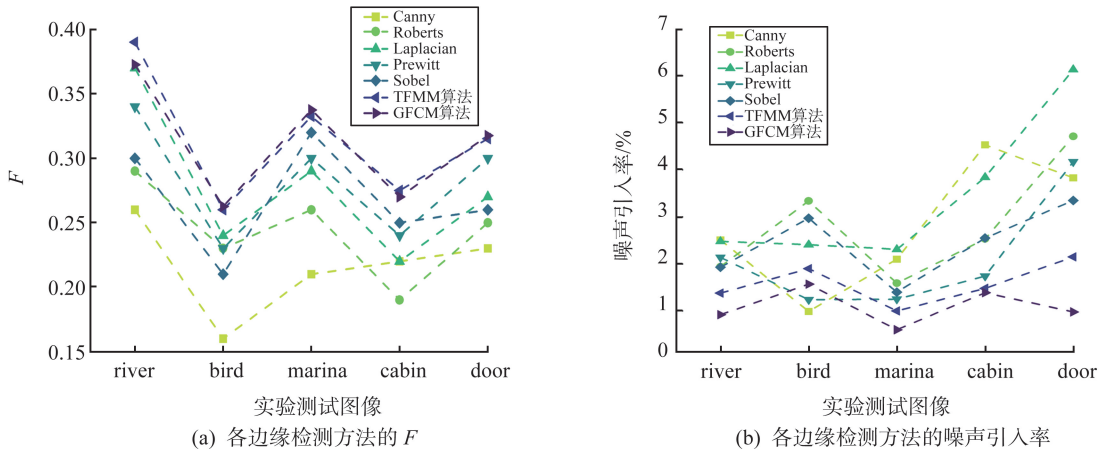


图 13 不同边缘检测算法的 F 与噪声引入率对比统计图
 Fig.13 Comparison of F and noise introduction rate of different edge detection algorithms

基于实验结果的对比分析表明,TFMM 算法与 GFCM 算法在图像边缘提取性能基本一致,而传统边缘检测算法相对逊色。图像 bird 经 Canny 算法检测后的噪声引入率较小,但利用 Canny 算法提取的结果丢失了很多细节边缘,且波动程度较大,说明 Canny 算法鲁棒性低。根据图 13(b),GFCM 算法的平均噪声引入率最低且稳定,因此 GFCM 算法的边缘检测能力最佳。

实验结果表明,GFCM 算法与 TFMM 算法相比,GFCM 算法虽然去除了模糊腐蚀和模糊膨胀算子的结合律以及强边界条件,但没有影响图像边缘提取,甚至噪声引入率小。原因是将一般重叠函数与其相应剩余蕴涵应用于模糊数学形态学算子的构建中,提出了基于一般重叠函数的模糊数学形态学算子。通过算法 2 预处理灰度图像,提高了 GFCM 算法的适应性和准确性,针对图像中的目标和背景分别采用了不同的结构元素,扩展了模糊形态学算子在灰度图像边缘提取的优势,最终的实验结果也证实文中提出的 GFCM 算法能够相较于 TFMM 算法有较小的噪声引入率,同时拓宽现有文献中的可用于图像边缘检测的聚合函数的范围。

4 结语

基于一般重叠函数与其相应剩余蕴涵分别构造了模糊膨胀和模糊腐蚀两类模糊数学形态学算子,将模糊聚类方法与算子相结合,提出了一种新的模糊数学形态学图像边缘检测方法,应用于图像边缘提取实验中,相较于由三角模和经典合取算子构造的图像边缘检测方法,文中所提出的边缘检测方法在尽可能提取到图像边缘的前提下,具有较小的噪声引入率。在理论研究方面,将一般重叠函数和模糊粗糙集结合起来构造相应的模糊形态学边缘检测方法,该方法的应用范围。

算法 2 在图像边缘检测中因为时间复杂度较大导致的效率瓶颈问题展开分析,计算复杂度随迭代次数和数据量增长显著提升。未来研究可从以下两个方向深入研究:在保证边缘检测精度的前提下,通过算法优化或并行计算策略提升执行效率;将研究范畴从自然图像拓展至多模态图像(如红外、深度及医学影像等),并构建系统的鲁棒性评估框架,引入高斯噪声、脉冲噪声等不同类型及强度的合成噪声,全面验证算法在复杂场景下的适应性。这不仅有助于完善算法性能评估体系,也为实际应用中的计算效率与鲁棒性平衡提供了理论依据。

参考文献:

[1] BUSTINCE H, FERNANDEZ J, MESIAR R, et al. Overlap functions [J]. Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, 2010, 72(3/4):1488-1499.

[2] JURIO A, BUSTINCE H, PAGOLA M, et al. Some properties of overlap and grouping functions and their application to image thresholding[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2013, 229:69-90.

[3] HÁJEK P. Metamathematics of fuzzy logic[M]. Dordrecht: Springer Science & Business Media, 2013:27-56.

- [4] DROSSOS C A. Generalized t -norm structures[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1999, 104(1):53-59.
- [5] DE MIGUEL L, GÓMEZ D, RODRÍGUEZ J T, et al. General overlap functions[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2019, 372:81-96.
- [6] BACZYŃSKI M, BELIAKOV G, SOLA HB, et al. Advances in fuzzy implication functions[M]. Berlin: Springer, 2013: 1-30.
- [7] YAGER R R. On some new classes of implication operators and their role in approximate reasoning[J]. Information Sciences, 2004, 167(1):193-216.
- [8] RUAN D, KERRE E E. Fuzzy implication operators and generalized fuzzy method of cases[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1993, 54(1): 23-37.
- [9] SERRA J. Image analysis and mathematical morphology[M]. London: Academic Press, 1982:591-597.
- [10] MATHERON G. Random sets and integral geometry[M]. New York: Wiley, 1975:277-278.
- [11] BLOCH I, HEIJMANS H, RONSE C. Mathematical morphology[M]. Dordrecht: Springer, 2007:857-944.
- [12] 石炜,刘松,杨锦春,等. 列车滚子轴承表面缺陷图像的边缘提取[J]. 机械设计与制造,2024,405(11):179-183.
SHI Wei, LIU Song, YANG Jinchun, et al. Edge extraction of surface defect image of train roller bearing[J]. Machinery Design & Manufacture, 2024, 405(11):179-183.
- [13] SINHA D, DOUGHERTY E R. Fuzzy mathematical morphology [J]. Journal of Visual Communication and Image Representation, 1992, 3:286-302.
- [14] DE BAETS B, KERRE E E, GUPTA M. The fundamentals of fuzzy mathematical morphology part 1: basic concepts[J]. International Journal of General Systems, 1995, 23:155-171.
- [15] IZAKIAN H, ABRAHAM A. Fuzzy C -means and fuzzy swarm for fuzzy clustering problem[J]. Expert Systems with Applications, 2011, 38(3):1835-1838.
- [16] NACHTEGAEL M, KERRE E E. Classical and fuzzy approaches towards mathematical morphology[M] // KERRE E E, NACHTEGAEL M. Fuzzy Techniques in Image Processing. Berlin: Springer, 2000:3-57.
- [17] GONZÁLEZ-HIDALGO M, MASSANET S. A fuzzy mathematical morphology based on discrete t -norms: fundamentals and applications to image processing[J]. Soft Computing, 2014, 18:2297-2311.
- [18] ZHANG Xiaohong, LI Mengyuan, LIU Hui. Overlap functions-based fuzzy mathematical morphological operators and their applications in image edge extraction[J]. Fractal and Fractional, 2023, 465(7):1-23.
- [19] ZHANG Xiaohong, LI Mengyuan, SHAO Songtao, et al. (I, O) -fuzzy rough sets based on overlap functions with their applications to feature selection and image edge extraction[J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2024, 32(4):1796-1809.
- [20] LI Mengyuan, ZHANG Xiaohong, SHANG Jiaoyan, et al. General quasi overlap functions and fuzzy neighborhood systems-based fuzzy rough sets with their applications[J]. IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering, 2024, 36(12): 8349-8361.

(编辑:陈丽萍)