山东大学学报(理学版)2026 年 1 月 第 61 卷 第 1 期
Journal of Shandong University(*Natural Science*), Vol.61, No.1, 2026 http://lxbwk.njournal.sdu.edu.cn

文章编号:1671-9352(2026)01-0103-13 DOI:10.6040/j.issn.1671-9352.0.2024.429

T-球形模糊环境下基于减法和除法算子的灰色-多准则妥协解排序方法

邓世海[1],郑婷婷[1,2*],赖龙翔[1]

(1.安徽大学数学科学学院, 安徽 合肥 230601; 2.安徽大学大学数学教学中心, 安徽 合肥 230601)

摘要:提出 T-球形模糊数的减法和除法算子,讨论 T-球形模糊数减法和除法算子的性质。提出基于 T-球形模糊减法和除法算子的灰色关联分析方法,并将该方法与多准则妥协解排序(vlsekriterijumska optimizacija i kompromisno resenje, VIKOR)方法结合,防止计算过程中 T-球形模糊信息的丢失,利用一种新的得分函数完善 T-球形模糊数的比较机制。通过实例及对比实验说明所提的基于 T-球形模糊减法和除法算子的灰色-VIKOR 方法的有效性和优越性,为解决 T-球形模糊环境下的多属性决策问题提供新的有效的方法。

关键词:T-球形模糊集;T-球形模糊交叉熵;减法和除法算子;得分函数;灰色-VIKOR 方法

中图分类号:O159 **文献标志码**:A

引用格式:邓世海,郑婷婷,赖龙翔. T-球形模糊环境下基于减法和除法算子的灰色-多准则妥协解排序方法[J]. 山东大学学报(理学版),2026,61(1):103-115.

Gray-vlsekriterijumska optimizacija i kompromisno resenje method based on subtraction and division operators in T-spherical fuzzy environment

DENG Shihai[1], ZHENG Tingting[1,2*], LAI Longxiang[1]

(1. School of Mathematical Sciences, Anhui University, Hefei 230601, Anhui, China; 2. Center for University Mathematics Teaching, Anhui University, Hefei 230601, Anhui, China)

Abstract: The subtraction and division operators for T-spherical fuzzy numbers are proposed, and the properties of these subtraction and division operators for T-spherical fuzzy numbers are discussed. A grey relational analysis method based on T-spherical fuzzy subtraction and division operators is introduced. This method is then integrated with the vlsekriterijumska optimizacija i kompromisno resenje (VIKOR) method to prevent the loss of T-spherical fuzzy information during calculations. Additionally, a novel score function is employed to refine the comparison mechanism for T-spherical fuzzy numbers. The validity and superiority of the proposed grey-VIKOR method, grounded in T-spherical fuzzy subtraction and division operators, are demonstrated through illustrative examples and comparative experiments. This approach provides a novel and effective methodology for addressing multi-attribute decision-making problems in T-spherical fuzzy environments.

Key words: T-spherical fuzzy set; T-spherical fuzzy cross-entropy; subtraction and division operators; score function; grey-VIKOR method

0 引言

Zadeh[1]于 1965 年首次提出模糊集(fuzzy sets, FSs)理论用于解决不确定性问题后,模糊集得到了快速的发展。Atanassov[2]定义了直觉模糊集(intuitionistic fuzzy sets, IFSs),隶属度 μ 和非隶属度 ν 刻画决策信息的模糊性,并要求 $0\leqslant\mu+\nu\leqslant 1$。但是,IFSs 对于隶属度与非隶属度之和大于 1 的情况不再合适,为此,文献

收稿日期:2024-12-11; **网络出版时间**:2025-12-11

基金项目:国家自然科学基金资助项目(61806001)

第一作者:邓世海(2001—),男,硕士研究生,研究方向为粒计算和知识发现. E-mail:3315106493@qq.com

* **通信作者**:郑婷婷(1978—),女,教授,博士,研究方向为粒计算和知识发现. E-mail:tt-zheng@163.com

[3-4]提出毕达哥拉斯模糊集(Pythagorean fuzzy sets, PyFSs),要求 $0 \leqslant \mu^2+\nu^2 \leqslant 1$,以及 q 阶正交模糊集(q-rung orthopair fuzzy sets, q-ROFSs),要求 $0 \leqslant \mu^q+\nu^q \leqslant 1(q \geqslant 1)$,将隶属度和非隶属度形成的空间扩充到更大的范围。考虑到决策或评价时决策者犹豫不决的态度,Cuong[5]在 IFSs 的基础上提出了图片模糊集(picture fuzzy sets, PFSs)的概念,隶属度 μ、非隶属度 ν 和中立度 η 刻画模糊性,满足 $0 \leqslant \mu+\nu+\eta \leqslant 1$。Mahmood 等[6]做了进一步的推广,提出了球形模糊集(spherical fuzzy sets, SFSs)和 T-球形模糊集(T-spherical fuzzy sets, T-SFSs)的概念,分别需要满足 $0 \leqslant \mu^2+\nu^2+\eta^2 \leqslant 1$ 和 $0 \leqslant \mu^t+\nu^t+\eta^t \leqslant 1(t \geqslant 1)$。$T$-SFSs 是前面提出模糊集的推广,当 μ、ν、η、t 取相应的值时,T-SFSs 将退化成前面提出的 IFSs、PyFSs、q-ROFSs、PFSs、SFSs 等。由于 T-SFSs 应用范围更广,因此得到了快速的发展。Ullah 等[7]研究了 T-SFSs 的余弦相似测度、灰色相似测度和集合论相似测度等新的相似测度,并研究了它们在模式识别中的应用;Zeng 等[8]提出了 T-SFSs 交互式加权平均聚合算子并将其应用到太阳能电池选择的多属性决策过程中;Chen[9]提出了基于改进的 T-球形模糊数(T-spherical fuzzy numbers, T-SFNs)的得分函数和基于 Minkowski 距离测度的多准则妥协解排序 (vlsekriterijumska optimizacija i kompromisno resenje, VIKOR)方法,并用于解决仓库位置和广告策略的选择问题。虽然 T-SFSs 具有广泛的应用前景,但是其理论还不够完善。

交叉熵是度量信息差异性的有效工具,在确定属性权重中具有非常广泛的应用。Wei[10]提出了图片模糊交叉熵,用于解决新兴技术商业化潜力评价的多属性决策问题;Wu 等[11]提出犹豫图片模糊语言集加权交叉熵,使用优劣解距离法(technique for order preference by similarity to ideal solution, TOPSIS)方法解决人员选择问题;Bozyiğit 等[12]提出了基于 d-Choquet 积分的参数图片模糊交叉熵测度,用于建筑材料的识别;Yang 等[13]提出基于交叉熵测度的 T-球形模糊数据关系组织排序与综合方法,解决了老旧社区改造方案选择的问题。但是,关于模糊环境下交叉熵的研究,大多直接将经典数学中的交叉熵函数应用到模糊环境中,使用交叉熵度量 2 个模糊集之间的差异时,可能会出现不同的模糊集具有相同的交叉熵的情形。因此,寻找更加符合直觉的交叉熵测度描述两模糊集之间的差异是非常有必要的。

大量学者研究了 T-SFSs,但是 T-SFNs 的运算方面的理论还有待完善。Mahmood 等[6]提出 T-SFNs 的加法、乘法、数乘和方幂算子;Khan 等[14]基于阿基米德三角模和阿基米德三角余模提出新的 T-SFNs 的加法、乘法、数乘和方幂算子,给出相应的聚合算子并应用于多属性决策问题中;Wang 等[15]利用 Frank 积与 Frank 和定义新的 T-SFNs 的加法、乘法、数乘和方幂算子。也有一些学者对模糊数的减法和除法算子展开了研究,例如,Du 等[16]提出基于汉明距离的直觉模糊数的减法和除法算子;Li 等[17]提出语言直觉模糊数的减法和除法算子,并基于此使用 VIKOR 方法解决全球供应商选择问题;Liu 等[18]提出基于严格三角模 PFNs 的交互运算法则,基于此研究,孟伟伟等[19]研究了在图片模糊环境下的减法和除法算子,进一步发展了图片模糊数(picture fuzzy numbers, PFNs)的基本运算,并应用到模式识别中。掌握减法和除法算子可以更深入挖掘模糊数的有用信息,但是 T-SFNs 的减法和除法算子的研究还未见报道,所以研究 T-SFNs 的减法和除法运算及在多属性决策中的应用,是非常有必要的。

对模糊环境下的多属性决策问题,比较备选方案的优劣,通常使用的方法是构造得分函数。Wei[20]提出图片模糊数的得分函数和精确函数用于比较图片模糊数的大小;Wan 等[21]提出改进的球形模糊数得分函数,充分考虑隶属度、非隶属度、中立度和拒绝度对得分函数的影响;Chen[9]利用指数函数,提出了改进的 T-SFNs 的得分函数;Wang 等[22]提出了 T-SFNs 的 8 种得分函数,探究了不同得分函数在处理多准则决策问题时的比较优势;Li 等[23]在毕达哥拉斯模糊环境下,基于剩余扇形面积提出改进的得分函数和排序方法。关于得分函数许多学者做了大量研究工作,但是还应进一步改进现有的得分函数,构造更加合理的 T-SFNs 得分函数,能提高备选方案排序的合理性和有效性。

T-SFSs 在多属性决策中有着非常重要的作用,但是有时仅使用 T-SFSs 可能无法完全有效地挖掘所有对决策有用的信息,所以寻找其他描述模糊性的工具并研究其与 T-SFSs 相结合后的决策效果是非常有必要的。灰色系统理论是我国学者邓聚龙[24]提出的,而灰色关联分析是灰色系统理论的重要组成部分,之后许多学者在此理论基础上展开了研究。赵梦洁等[25]将灰色理论和 VIKOR 方法结合,提出了组合赋权灰色-VIKOR 模型,改进单一 VIKOR 方法。Han 等[26]基于改进的灰色关联分析提出多变量混沌时间序列预测模型,对时间序列进行预测;Hu[27]将灰色关联分析和神经网络结合,解决镁材料需求预测问题。Duran 等[28]利用灰色关联研究土耳其宏观经济指标与土耳其国内储蓄之间的关联关系。灰色理论具有广泛的应

用，因此，在 T-球形模糊环境下研究灰色关联分析相关理论应用及其效果是非常有意义的。

利用 T-SFSs 处理复杂不确定的多属性决策问题是有效的方法之一。Farrokhizadeh[29] 提出了集偏差最大化法结合 TOPSIS 方法的球形模糊决策方法，但是该方法得到的备选方案的排序结果可能存在不合理性；Chen 等[9] 提出了基于改进的 T-球形模糊数的得分函数和基于 Minkowski 距离测度的 VIKOR 方法，然而其得分函数在比较 2 个模糊数时会出现不符合直觉的情形；Ganie 等[30] 在球形模糊环境中提出了基于新的模糊熵的复杂比例评价（complex proportion assessment, COPRAS）方法，然而其综合评价值之间的差异非常小，不利于合理决策。单一决策方法往往难以充分利用决策信息，从而影响决策的合理性和有效性。

为此，本文提出新的得分函数用于比较 2 个 T-SFNs 并且精确表达灰色关联度，提出 T-SFNs 的减法和除法算子，并以 T-SFNs 的形式表达灰色关联度，避免了 T-球形模糊信息在计算过程中的丢失。使用基于 J-散度函数的 T-球形模糊交叉熵测度，确定属性客观权重，并与主观权重组合获得更加合理的属性权重。将灰色关联分析的相关理论引入 T-球形模糊环境中，提出基于减法和除法算子的灰色-VIKOR 方法，为解决多属性决策问题提供新的思路。

1　预备知识

1.1　灰色理论

灰色关联分析是我国学者邓聚龙[24] 创立的灰色系统理论中的重要组成部分，是一种综合评价各属性的分析方法。

定义 1[24]　设 $X_0=\{x_0(k)\mid k=1,2,\cdots,\gamma\}$ 为参考序列，$X_\tau=\{x_\tau(k)\mid k=1,2,\cdots,\gamma\}$（$\tau=1,2,\cdots,h$）为比较序列，$\Delta_{0\tau}(k)=\mid x_0(k)-x_\tau(k)\mid$，则 $x_0(k)$ 与 $x_\tau(k)$ 之间的灰色关联系数为

$$Y(x_0(k),x_\tau(k))=\frac{x_{\min}+\rho x_{\max}}{\Delta_{0\tau}(k)+\rho x_{\max}},\tag{1}$$

式中：$x_{\min}=\min\limits_{\tau}\ \min\limits_{k}\{\Delta_{0\tau}(k)\}$，$x_{\max}=\max\limits_{\tau}\ \max\limits_{k}\{\Delta_{0\tau}(k)\}$，$\rho$ 为分辨系数，$\rho\in[0,1]$，按最少信息原理取 $\rho=0.5$。

由聚合灰色关联系数 $Y(x_0(k),x_\tau(k))$ 在各 k 点的值，得到 X_0 与 X_τ 的灰色关联度 $Y(X_0,X_\tau)$ 为

$$Y(X_0,X_\tau)=\frac{1}{\gamma}\sum_{k=1}^{\gamma}Y(x_0(k),x_\tau(k))。\tag{2}$$

1.2　T-SFS 的概念

定义 2[6]　设 U 是给定的论域，则 U 上的 T-球形模糊集（T-spherical fuzzy sets, T-SFSs）A 定义为

$$A=\{\langle x,\mu_A(x),\eta_A(x),\nu_A(x)\rangle\mid x\in U\},$$

式中：$\mu_A(x)$、$\eta_A(x)$、$\nu_A(x)$ 分别表示元素 x 属于 A 的隶属度、中立度和非隶属度，对任意的 $x\in U$，有 $\mu_A(x)$，$\eta_A(x)$，$\nu_A(x)\in[0,1]$，且 $0\leqslant\mu_A^t(x)+\eta_A^t(x)+\nu_A^t(x)\leqslant 1$，$t\geqslant 1$ 是 T-SFSs 的参数，元素 x 关于 A 的拒绝度为 $\pi_A(x)=\sqrt[t]{1-\mu_A^t(x)-\eta_A^t(x)-\nu_A^t(x)}$。

为方便，称 $\alpha=\langle\mu,\eta,\nu\rangle$ 为 U 上的 T-球形模糊数（T-spherical fuzzy number, T-SFN），其中 μ、η、ν 分别为隶属度、中立度和非隶属度，所有 U 上的 T-SFNs 组成的集合用 Θ 表示，记 $0_\Theta=\langle 0,0,1\rangle$，$1_\Theta=\langle 1,0,0\rangle$。

定义 3[6]　设 $\alpha_1=\langle\mu_1,\eta_1,\nu_1\rangle$，$\alpha_2=\langle\mu_2,\eta_2,\nu_2\rangle\in\Theta$，则它们的基本运算的定义为

（1）$\alpha_1\leqslant\alpha_2\Leftrightarrow\mu_1\leqslant\mu_2$，$\eta_1\leqslant\eta_2$，$\nu_1\geqslant\nu_2$；

（2）$\alpha_1=\alpha_2\Leftrightarrow\alpha_1\leqslant\alpha_2$，$\alpha_2\leqslant\alpha_1$；

（3）$\alpha_1\vee\alpha_2=\langle\max\{\mu_1,\mu_2\},\min\{\eta_1,\eta_2\},\min\{\nu_1,\nu_2\}\rangle$；

（4）$\alpha_1\wedge\alpha_2=\langle\min\{\mu_1,\mu_2\},\min\{\eta_1,\eta_2\},\max\{\nu_1,\nu_2\}\rangle$；

（5）$\alpha_1^c=\langle\nu_1,\eta_1,\mu_1\rangle$。

式中：α_1、α_2 表示 U 上任意的 2 个 T-SFNs，μ_1、μ_2 分别为 α_1、α_2 的隶属度，η_1、η_2 分别为 α_1、α_2 的中立度，ν_1、ν_2 分别为 α_1、α_2 的非隶属度，且满足 $0\leqslant\mu_1,\eta_1,\nu_1$，$\mu_1^t+\eta_1^t+\nu_1^t\leqslant 1$，$0\leqslant\mu_2,\eta_2,\nu_2$，$\mu_2^t+\eta_2^t+\nu_2^t\leqslant 1$（$t\geqslant 1$）。

定义 4[9]　设 $\alpha_1=(\mu_1,\eta_1,\nu_1)$，$\alpha_2=(\mu_2,\eta_2,\nu_2)\in\Theta$，则 α_1 和 α_2 之间的 Minkowski 距离 $d_p(\alpha_1,\alpha_2)$ 定

义为

$$d_p(\alpha_1,\alpha_2)=\sqrt[p]{|\mu_1^t-\mu_2^t|^p+|\eta_1^t-\eta_2^t|^p+|\nu_1^t-\nu_2^t|^p+|\pi_1^t-\pi_2^t|^p}, \tag{3}$$

式中:$\pi_r=\sqrt[t]{1-\mu_r^t-\eta_r^t-\nu_r^t}$ $(r=1,2)$,t 是 T-SFSs 中的参数。当 $p=1$ 时,Minkowski 距离为曼哈顿距离;当 $p=2$ 时,Minkowski 距离为欧氏距离;当 $p=\infty$ 时,Minkowski 距离为切比雪夫距离;本文为简化计算,在后续的实例中使用曼哈顿距离。

交叉熵都是直接将经典数学中的交叉熵迁移到模糊集中,$\langle 1,0,0\rangle$ 与 $\langle 0,1,0\rangle$ 的差异跟 $\langle 1,0,0\rangle$ 与 $\langle 0,0,1\rangle$ 的差异是一致的且都为最大值,但从模糊概念本质上看 $\langle 1,0,0\rangle$ 与 $\langle 0,0,1\rangle$ 的差异应该更大一些[10,13],文献[31]基于 J-散度给出了 T-球形模糊交叉熵的定义。

定义 5[31] 设论域 $U=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$, $P_1=\{\langle x_i,\mu_{P1}(x_i),\eta_{P1}(x_i),\nu_{P1}(x_i)\rangle \mid x_i\in U\}$ 和 $P_2=\{\langle x_i,\mu_{P2}(x_i),\eta_{P2}(x_i),\nu_{P2}(x_i)\rangle \mid x_i\in U\}$ 是论域 U 中的 T-SFSs,P_1 和 P_2 之间的 T-球形模糊交叉熵为

$$\begin{aligned}\mathrm{CH}(P_1,P_2)=\frac{\sqrt{2}}{2n}\sum_{i=1}^{n}\Bigg[&S_{P1}(x_i)\log_2\frac{2S_{P1}(x_i)}{S_{P1}(x_i)+S_{P2}(x_i)}+(1-S_{P1}(x_i))\log_2\frac{2(1-S_{P1}(x_i))}{2-S_{P1}(x_i)-S_{P2}(x_i)}\\&+S_{P2}(x_i)\log_2\frac{2S_{P2}(x_i)}{S_{P1}(x_i)+S_{P2}(x_i)}+(1-S_{P2}(x_i))\log_2\frac{2(1-S_{P2}(x_i))}{2-S_{P1}(x_i)-S_{P2}(x_i)}\\&+\varphi_{P1}(x_i)\log_2\frac{2\varphi_{P1}(x_i)}{\varphi_{P1}(x_i)+\varphi_{P2}(x_i)}+(1-\varphi_{P1}(x_i))\log_2\frac{2(1-\varphi_{P1}(x_i))}{2-\varphi_{P1}(x_i)-\varphi_{P2}(x_i)}\\&+\varphi_{P2}(x_i)\log_2\frac{2\varphi_{P2}(x_i)}{\varphi_{P1}(x_i)+\varphi_{P2}(x_i)}+(1-\varphi_{P2}(x_i))\log_2\frac{2(1-\varphi_{P2}(x_i))}{2-\varphi_{P1}(x_i)-\varphi_{P2}(x_i)}\\&+\phi_{P1}(x_i)\log_2\frac{2\phi_{P1}(x_i)}{\phi_{P1}(x_i)+\phi_{P2}(x_i)}+(1-\phi_{P1}(x_i))\log_2\frac{2(1-\phi_{P1}(x_i))}{2-\phi_{P1}(x_i)-\phi_{P2}(x_i)}\\&+\phi_{P2}(x_i)\log_2\frac{2\phi_{P2}(x_i)}{\phi_{P1}(x_i)+\phi_{P2}(x_i)}+(1-\phi_{P2}(x_i))\log_2\frac{2(1-\phi_{P2}(x_i))}{2-\phi_{P1}(x_i)-\phi_{P2}(x_i)}\Bigg]^{\frac{1}{2}}。\end{aligned} \tag{4}$$

式中:$S_{P_j}(x_i)=\dfrac{1+\mu_{Pj}^t(x_i)-\nu_{Pj}^t(x_i)}{2}$, $\varphi_{P_j}(x_i)=\dfrac{1+\mu_{Pj}^t(x_i)+\nu_{Pj}^t(x_i)}{2}$, $\phi_{P_j}(x_i)=\dfrac{1-\mu_{Pj}^t(x_i)-\eta_{Pj}^t(x_i)-\nu_{Pj}^t(x_i)}{2}$, $i=1,2,\cdots,n$; $j=1,2$。

性质 1[31] 设 P_1、P_2、P_3 是论域 U 中的任意 T-SFSs,定义 5 的 T-球形模糊交叉熵具有以下性质:

(1) $\mathrm{CH}(P_1,P_2)=\mathrm{CH}(P_2,P_1)=\mathrm{CH}(P_1^c,P_2^c)=\mathrm{CH}(P_2^c,P_1^c)$;

(2) $0\leqslant\mathrm{CH}(P_1,P_2)\leqslant 1$; $\mathrm{CH}(P_1,P_2)=0\Leftrightarrow P_1=P_2$;

$\mathrm{CH}(P_1,P_2)=1\Leftrightarrow\forall x\in U$, $\langle\mu_{P1}(x),\eta_{P1}(x),\nu_{P1}(x)\rangle=\langle 1,0,0\rangle$, $\langle\mu_{P2}(x),\eta_{P2}(x),\nu_{P2}(x)\rangle=\langle 0,0,1\rangle$; $\langle\mu_{P1}(x),\eta_{P1}(x),\nu_{P1}(x)\rangle=\langle 0,0,1\rangle$, $\langle\mu_{P2}(x),\eta_{P2}(x),\nu_{P2}(x)\rangle=\langle 1,0,0\rangle$;

(3) $\mathrm{CH}(P_1,P_2)+\mathrm{CH}(P_2,P_3)\geqslant\mathrm{CH}(P_1,P_3)$。

2 T-SFNs 的新得分函数

定义 6[9] 对任意的 $\alpha=\langle\mu,\eta,\nu\rangle$,改进的得分函数 $S(\alpha)$ 的定义为

$$S(\alpha)=1+\mu^t-\nu^t+\frac{\mathrm{e}^{\mu^t-\eta^t-\nu^t}}{1+\pi^t}, \tag{5}$$

式中,$\pi=\sqrt[t]{1-\mu^t-\eta^t-\nu^t}$ 表示拒绝度。

从式(5)中容易发现,Chen[9] 提出的 T-SFNs 的得分函数虽然关于隶属度是非减函数、关于非隶属度和拒绝度是非增函数,但是 $S(\langle 0,1,0\rangle)=1+\dfrac{1}{\mathrm{e}}<1.5=S(\langle 0,0,0\rangle)$,这是不符合正常直觉的,事实上,$\langle 0,0,0\rangle$ 表示拒绝度为 1,即对 x 是否属于集合完全不关心,可看作在讨论对象之外;而 $\langle 0,1,0\rangle$ 表示对 x 属于集合的中立度为 1,虽然对 x 是否属于集合的中立程度达到最大值,但还是在讨论对象之内,所以,$\langle 0,1,0\rangle$ 的得分大于 $\langle 0,0,0\rangle$ 的得分才是符合直觉的,为此,给出新得分函数的定义。

定义 7　对任意的 $\alpha=\langle\mu,\eta,\nu\rangle$，$\alpha$ 的新得分函数定义为

$$S^{\text{new}}(\alpha)=\mu^t-\nu^t+\frac{(1-\nu^t)^2}{(2-\mu^t-\nu^t)(1+\pi^t)}\eta^t。\tag{6}$$

式(6)充分考虑了 T-SFSs 的现实意义：η^t 的系数 $\frac{(1-\nu^t)^2}{(2-\mu^t-\nu^t)(1+\pi^t)}$ 是从众系数 $B_{\text{Be}}=\frac{1-\nu^t}{2-\mu^t-\nu^t}$ 和信息级联调节系数 $I_{\text{Ic}}=\frac{1-\nu^t}{1+\pi^t}$ 的乘积。对于犹豫不决的群体，在作出决策时，会有很强的从众心理，从众系数较低时非隶属度较低，则群体中反对的声音较弱，犹豫的个体将倾向于支持方；当信息不确定或者认为自己的信息不充分时，信息级联调节系数较大而拒绝度 π 较大时，人们获得的信息越少，对自己的信息不自信，往往倾向于根据已有的信息($\mu^t-\nu^t$)进行决策。此外，根据式(6)，$S^{\text{new}}(\alpha)\in[-1,1]$，并且 $S^{\text{new}}(\langle 0,1,0\rangle)=\frac{1}{2}>0=S^{\text{new}}(\langle 0,0,0\rangle)$，这是合理的，另外，式(6)相对于式(5)更加简单，提高了计算效率。因此，提出的新得分函数不仅具有很好的解释性，而且能够解决现有得分函数的局限性问题。

定理 1　$S^{\text{new}}(\alpha)$ 关于 μ 和 η 是单调非减函数，关于 ν 是单调非增函数。

证明　由定义 3 可知，证明 $S^{\text{new}}(\alpha)$ 满足偏序关系。由式(6)知 $S^{\text{new}}(\alpha)=\mu^t-\nu^t+\frac{(1-\nu^t)^2}{(2-\mu^t-\nu^t)(2-\mu^t-\eta^t-\nu^t)}\eta^t$，关于 μ 求偏导得 $\frac{\partial S^{\text{new}}(\alpha)}{\partial\mu}=t\mu^{t-1}+\frac{t\mu^{t-1}(4-2\mu^t-\eta^t-2\nu^t)(1-\nu^t)^2\eta^t}{(2-\mu^t-\nu^t)^2(2-\mu^t-\eta^t-\nu^t)^2}$，根据 T-SFSs 的限制条件可知 $2-\mu^t-\nu^t\geqslant 1$，$2-\mu^t-\eta^t-\nu^t\geqslant 1$，因此 $4-2\mu^t-\eta^t-2\nu^t\geqslant 2$，则 $\frac{\partial S^{\text{new}}(\alpha)}{\partial\mu}\geqslant 0$，$S^{\text{new}}(\alpha)$ 关于 μ 是单调非减函数，$S^{\text{new}}(\alpha)$ 关于 η 求偏导得 $\frac{\partial S^{\text{new}}(\alpha)}{\partial\eta}=\frac{t\eta^{t-1}(2-\mu^t-\nu^t)(2-\mu^t-\eta^t-\nu^t)(1-\nu^t)^2+t\eta^{t-1}(2-\mu^t-\nu^t)(1-\nu^t)^2\eta^t}{(2-\mu^t-\nu^t)^2(2-\mu^t-\eta^t-\nu^t)^2}\geqslant 0$，因此 $S^{\text{new}}(\alpha)$ 关于 η 是单调非减函数，关于 ν 求偏导得

$$\begin{aligned}\frac{\partial S^{\text{new}}(\alpha)}{\partial\nu}&=-t\nu^{t-1}+\frac{-t\nu^{t-1}(2-\mu^t-\nu^t)+t\nu^{t-1}(1-\nu^t)\eta^t}{(2-\mu^t-\nu^t)^2}\ \frac{(1-\nu^t)\eta^t}{(2-\mu^t-\eta^t-\nu^t)}\\&\quad+\frac{-t\nu^{t-1}(2-\mu^t-\eta^t-\nu^t)+t\nu^{t-1}(1-\nu^t)\eta^t}{(2-\mu^t-\nu^t)^2}\ \frac{(1-\nu^t)\eta^t}{(2-\mu^t-\eta^t-\nu^t)}\\&=-t\nu^{t-1}+\frac{-t\nu^{t-1}(1-\mu^t)}{(2-\mu^t-\nu^t)^2}\ \frac{(1-\nu^t)\eta^t}{(2-\mu^t-\eta^t-\nu^t)}+\frac{-t\nu^{t-1}(1-\mu^t-\eta^t)}{(2-\mu^t-\eta^t-\nu^t)^2}\ \frac{(1-\nu^t)\eta^t}{(2-\mu^t-\nu^t)}\leqslant 0,\end{aligned}$$

函数 $S^{\text{new}}(\alpha)$ 关于 ν 是单调非增函数。

推论 1　设 $\alpha_1=\langle\mu_1,\eta_1,\nu_1\rangle$，$\alpha_2=\langle\mu_2,\eta_2,\nu_2\rangle\in\Theta$，若 $\alpha_1\leqslant\alpha_2$，则 $S^{\text{new}}(\alpha_1)\leqslant S^{\text{new}}(\alpha_2)$。

证明　因为 $\alpha_1\leqslant\alpha_2$，由定义 3 可知 $\mu_1\leqslant\mu_2$，$\eta_1\leqslant\eta_2$，$\nu_1\geqslant\nu_2$，由定理 1 知 $\frac{(1-\nu_1^t)^2}{(2-\mu_1^t-\nu_1^t)(1+\pi_1^t)}\eta_1^t\leqslant\frac{(1-\nu_2^t)^2}{(2-\mu_2^t-\nu_2^t)(1+\pi_2^t)}\eta_2^t$，所以

$$\mu_1^t-\mu_2^t+\nu_2^t-\nu_1^t+\frac{(1-\nu_1^t)^2}{(2-\mu_1^t-\nu_1^t)(1+\pi_1^t)}\eta_1^t-\frac{(1-\nu_2^t)^2}{(2-\mu_2^t-\nu_2^t)(1+\pi_2^t)}\eta_2^t\leqslant 0,$$

因此 $S^{\text{new}}(\alpha_1)\leqslant S^{\text{new}}(\alpha_2)$。

为了得到更精确的排序，下面给出 T-SFNs 的精确函数和缺失函数的定义及与新得分函数共同作用的排序规则。

定义 8　对任意的 $\alpha=\langle\mu,\eta,\nu\rangle$，$\alpha$ 的精确函数 $A_c(\alpha)$ 和缺失函数 $D(\alpha)$ 分别定义为

$$A_c(\alpha)=\mu^t+\nu^t;\tag{7}$$

$$D(\alpha)=\mu^t+\eta^t+\nu^t。\tag{8}$$

对于 $\alpha_1=\langle\mu_1,\eta_1,\nu_1\rangle$，$\alpha_2=\langle\mu_2,\eta_2,\nu_2\rangle\in\Theta$，则

(1) 当 $S^{\text{new}}(\alpha_1)>S^{\text{new}}(\alpha_2)$ 时，$\alpha_1\succ\alpha_2$；

（2）当 $S^{\text{new}}(\alpha_1)=S^{\text{new}}(\alpha_2)$ 时，若 $A_c(\alpha_1)>A_c(\alpha_2)$，则 $\alpha_1\succ\alpha_2$；若 $A_c(\alpha_1)=A_c(\alpha_2)$，$D(\alpha_1)>D(\alpha_2)$，则 $\alpha_1\succ\alpha_2$；若 $D(\alpha_1)=D(\alpha_2)$，则 $\alpha_1=\alpha_2$。

3 T-SFNs 的基本算子

3.1 基于严格三角模的 T-SFNs 的加法、乘法、数乘和方幂算子

令定义 2 中 $t=1$，则 T-SFS 退化为 PFS。保证 PFNs 的加法和乘法运算后还是 PFNs。

定义 9[18] 设 $c_1=\langle\mu_a,\eta_a,\nu_a\rangle$，$c_2=\langle\mu_b,\eta_b,\nu_b\rangle$ 是任意的 PFNs，λ 为任意大于 0 的常数，则

（1）$c_1\oplus c_2=\langle 1-(1-\mu_a)(1-\mu_b),(\eta_a+\nu_a)(\eta_b+\nu_b)-\nu_a\nu_b,\nu_a\nu_b\rangle$；

（2）$c_1\otimes c_2=\langle\mu_a\mu_b,(\eta_a+\mu_a)(\eta_b+\mu_b)-\mu_a\mu_b,1-(1-\nu_a)(1-\nu_b)\rangle$；

（3）$\lambda c_1=\langle 1-(1-\mu_a)^{\lambda},(\eta_a+\nu_a)^{\lambda}-\nu_a^{\lambda},\nu_a^{\lambda}\rangle$；

（4）$c_1^{\lambda}=\langle\mu_a^{\lambda},(\eta_a+\mu_a)^{\lambda}-\mu_a^{\lambda},1-(1-\nu_a)^{\lambda}\rangle$。

式中：c_1、c_2 分别为 U 中的任意 2 个 PFNs，μ_a、μ_b 分别为 c_1、c_2 的隶属度，η_a、η_b 分别为 c_1、c_2 的中立度，ν_a、ν_b 分别为 c_1、c_2 的非隶属度，且满足 $0\leqslant\mu_a,\eta_a,\nu_a,\mu_a+\eta_a+\nu_a\leqslant 1$，$0\leqslant\mu_b,\eta_b,\nu_b,\mu_b+\eta_b+\nu_b\leqslant 1$。

下面将 PFNs 加法、乘法、数乘和方幂算子推广到 T-球形模糊环境中，给出基于严格三角模的 T-SFNs 的基本运算的定义。

定义 10 设 $\alpha_1=\langle\mu_1,\eta_1,\nu_1\rangle$，$\alpha_2=\langle\mu_2,\eta_2,\nu_2\rangle\in\Theta$，则

（1）$\alpha_1\oplus\alpha_2=\langle\sqrt[t]{1-(1-\mu_1^t)(1-\mu_2^t)},\sqrt[t]{(\eta_1^t+\nu_1^t)(\eta_2^t+\nu_2^t)-\nu_1^t\nu_2^t},\nu_1\nu_2\rangle$；

（2）$\alpha_1\otimes\alpha_2=\langle\mu_1\mu_2,\sqrt[t]{(\eta_1^t+\mu_1^t)(\eta_2^t+\mu_2^t)-\mu_1^t\mu_2^t},\sqrt[t]{1-(1-\nu_1^t)(1-\nu_2^t)}\rangle$；

（3）$\lambda\alpha_1=\langle\sqrt[t]{1-(1-\mu_1^t)^{\lambda}},\sqrt[t]{(\eta_1^t+\nu_1^t)^{\lambda}-\nu_1^{t\lambda}},\nu_1^{\lambda}\rangle$；

（4）$\alpha_1^{\lambda}=\langle\mu_1^{\lambda},\sqrt[t]{(\eta_1^t+\mu_1^t)^{\lambda}-\mu_1^{t\lambda}},\sqrt[t]{1-(1-\nu_1^t)^{\lambda}}\rangle$。

根据定义 10，可以得到以下性质。

性质 2 设 α_1，α_2，$\alpha\in\Theta$，λ_1、λ_2、λ 均为任意大于 0 的常数，有

（1）$\alpha_1\oplus\alpha_2=\alpha_2\oplus\alpha_1$；

（2）$\alpha_1\otimes\alpha_2=\alpha_2\otimes\alpha_1$；

（3）$\lambda(\alpha_1\oplus\alpha_2)=\lambda\alpha_1\oplus\lambda\alpha_2$；

（4）$\lambda_1\alpha\oplus\lambda_2\alpha=(\lambda_1+\lambda_2)\alpha$；

（5）${\alpha_1}^{\lambda}\otimes{\alpha_2}^{\lambda}=(\alpha_1\otimes\alpha_2)^{\lambda}$；

（6）$\alpha^{\lambda_1}\otimes\alpha^{\lambda_2}=\alpha^{\lambda_1+\lambda_2}$。

3.2 T-SFNs 的减法和除法算子

根据 PFNs 的加法、乘法、数乘、方幂算子，基于最优化理论文献[19]研究了 PFNs 的减法和除法算子的定义。

c_1 和 c_2 减法和除法运算定义为

$$c_1\ominus c_2=\left\langle 0\vee\frac{\mu_a-\mu_b}{1-\mu_b},\left\{0\vee\left(\frac{\eta_a+\nu_a}{\eta_b+\nu_b}-\frac{\nu_a}{\nu_b}\right)\right\}\wedge\left\{0\vee\left(1-\frac{\nu_a}{\nu_b}\right)\right\}\wedge\left\{0\vee\left(\frac{1-\mu_a}{1-\mu_b}-\frac{\nu_a}{\nu_b}\right)\right\},1\wedge\frac{\nu_a}{\nu_b}\wedge\frac{1-\mu_a}{1-\mu_b}\right\rangle;$$

$$c_1\oslash c_2=\left\langle 1\wedge\frac{\mu_a}{\mu_b}\wedge\frac{1-\nu_a}{1-\nu_b},\left\{0\vee\left(\frac{\eta_a+\mu_a}{\eta_b+\mu_b}-\frac{\mu_a}{\mu_b}\right)\right\}\wedge\left\{0\vee\left(1-\frac{\mu_a}{\mu_b}\right)\right\}\wedge\left\{0\vee\left(\frac{1-\nu_a}{1-\nu_b}-\frac{\mu_a}{\mu_b}\right)\right\},0\vee\frac{\nu_a-\nu_b}{1-\nu_b}\right\rangle。$$

下面将其推广到 T-球形模糊环境中，给出 T-SFNs 的减法和除法算子的计算式。

定义 11 α_1 和 α_2 的减法和除法算子定义为

$$\alpha_1\ominus\alpha_2=\left\langle\sqrt[t]{0\vee\frac{\mu_1^t-\mu_2^t}{1-\mu_2^t}},\sqrt[t]{0\vee\left(\frac{\eta_1^t+\nu_1^t}{\eta_2^t+\nu_2^t}-\frac{\nu_1^t}{\nu_2^t}\right)}\wedge\sqrt[t]{0\vee\left(1-\frac{\nu_1^t}{\nu_2^t}\right)}\wedge\sqrt[t]{0\vee\left(\frac{1-\mu_1^t}{1-\mu_2^t}-\frac{\nu_1^t}{\nu_2^t}\right)},1\wedge\frac{\nu_1}{\nu_2}\wedge\sqrt[t]{\frac{1-\mu_1^t}{1-\mu_2^t}}\right\rangle;\quad(9)$$

$$\alpha_1\oslash\alpha_2=\left\langle 1\wedge\frac{\mu_1}{\mu_2}\wedge\sqrt[t]{\frac{1-\nu_1^t}{1-\nu_2^t}},\sqrt[t]{0\vee\left(\frac{\eta_1^t+\mu_1^t}{\eta_2^t+\mu_2^t}-\frac{\mu_1^t}{\mu_2^t}\right)}\wedge\sqrt[t]{0\vee\left(1-\frac{\mu_1^t}{\mu_2^t}\right)}\wedge\sqrt[t]{0\vee\left(\frac{1-\nu_1^t}{1-\nu_2^t}-\frac{\mu_1^t}{\mu_2^t}\right)},\sqrt[t]{0\vee\frac{\nu_1^t-\nu_2^t}{1-\nu_2^t}}\right\rangle。\quad(10)$$

假设在$\vee$运算符下$\frac{0}{0}\triangleq 0$,在$\wedge$运算符下$\frac{0}{0}\triangleq 1$,例如取$\alpha_1=\langle 1,0,0\rangle$, $\alpha_2=\langle 1,0,0\rangle$,则

$$\begin{aligned}\alpha_1\ominus\alpha_2&=\left\langle\sqrt[t]{0\vee\frac{1-1}{1-1}},\sqrt[t]{0\vee\left(\frac{0+0}{0+0}-\frac{0}{0}\right)}\wedge\sqrt[t]{0\vee\left(1-\frac{0}{0}\right)}\wedge\sqrt[t]{0\vee\left(\frac{1-1}{1-1}-\frac{0}{0}\right)},1\wedge\frac{0}{0}\wedge\sqrt[t]{\frac{1-1}{1-1}}\right\rangle\\&=\left\langle\sqrt[t]{0\vee\frac{0}{0}},\sqrt[t]{0\vee\left(\frac{0}{0}-\frac{0}{0}\right)}\wedge\sqrt[t]{0\vee\left(1-\frac{0}{0}\right)}\wedge\sqrt[t]{0\vee\left(\frac{0}{0}-\frac{0}{0}\right)},1\wedge\frac{0}{0}\wedge\frac{0}{0}\right\rangle\\&=\left\langle\sqrt[t]{0\vee 0},\sqrt[t]{0\vee(0-0)}\wedge\sqrt[t]{0\vee(1-0)}\wedge\sqrt[t]{0\vee(0-0)},1\wedge 1\wedge 1\right\rangle=\langle 0,0,1\rangle。\end{aligned}$$

性质 3　对任意的$\alpha=\langle\mu,\eta,\nu\rangle$有如下结论成立:

(1) $\alpha\ominus 0_\Theta=\alpha$, $\alpha\oslash 1_\Theta=\alpha$;

(2) $\alpha\ominus\alpha=0_\Theta$, $\alpha\oslash\alpha=1_\Theta$;

(3) 若$\alpha\neq 1_\Theta$,则$1_\Theta\ominus\alpha=1_\Theta$;

(4) 若$\alpha\neq 0_\Theta$,则$0_\Theta\oslash\alpha=0_\Theta$。

性质 4　设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha\in\Theta$, $\lambda_1>\lambda_2>0$, $\lambda>0$,则

(1) $\lambda(\alpha_1\ominus\alpha_2)=\lambda\alpha_1\ominus\lambda\alpha_2$;

(2) $(\alpha_1\oslash\alpha_2)^\lambda=\alpha_1{}^\lambda\oslash\alpha_2{}^\lambda$;

(3) $\lambda_1\alpha\ominus\lambda_2\alpha=(\lambda_1-\lambda_2)\alpha$;

(4) $\alpha^{\lambda_1}\oslash\alpha^{\lambda_2}=\alpha^{\lambda_1-\lambda_2}$;

(5) $(\alpha_1\oplus\alpha_2)\ominus\alpha_2\leqslant\alpha_1$;

(6) $(\alpha_1\otimes\alpha_2)\oslash\alpha_2\geqslant\alpha_1$;

(7) $\alpha_1^c\oslash\alpha_2^c=(\alpha_1\ominus\alpha_2)^c$;

(8) $\alpha_1^c\ominus\alpha_2^c=(\alpha_1\oslash\alpha_2)^c$。

性质 3、4 的证明与文献[19]中的证明类似,略。

4　基于 T-SFNs 减法和除法算子的灰色-VIKOR 方法

4.1　问题描述

针对一个T-球形模糊环境下的多属性决策问题,假设$B=\{B_1,B_2,\cdots,B_m\}$为备选方案集, $Z=\{Z_1,Z_2,\cdots,Z_l\}$为所有的属性集。设专家根据经验给出的属性主观权重向量为$\boldsymbol{\omega}^{\text{sub}}=(\omega_1^{\text{sub}},\omega_2^{\text{sub}},\cdots,\omega_l^{\text{sub}})^{\mathrm T}$,备选方案$B_s(s=1,2,\cdots,m)$在属性$Z_f(f=1,2,\cdots,l)$下的评价值为$T$-SFNs $\alpha_{sf}=\langle\mu_{sf},\eta_{sf},\nu_{sf}\rangle$,由这些$T$-SFNs 构成的$T$-SFSs 决策矩阵为$\boldsymbol{R}=(\alpha_{sf})_{m\times l}$。

4.2　属性权重的确定

在实际的模糊决策过程中,属性权重一般都是根据专家的经验给出,具有很强的主观性,为了获得更加合适的属性权重,需要计算属性的客观权重。在属性Z_f下,所有备选方案集$B_s(s=1,2,\cdots,m)$相对于其他备选方案的交叉熵定义为$\sum_{s=1}^{m}\frac{1}{m-1}\sum_{e=1}^{m}\mathrm{CH}(\alpha_{sf},\alpha_{ef})$, $H(\boldsymbol{\omega}^{\text{obj}})$为所有属性下的各方案之间的综合交叉熵,其中$\boldsymbol{\omega}^{\text{obj}}=(\omega_1^{\text{obj}},\omega_2^{\text{obj}},\cdots,\omega_l^{\text{obj}})^{\mathrm T}$是根据$T$-球形模糊交叉熵得到的各属性的客观权重向量。下面给出利用T-球形模糊交叉熵确定客观属性权重的方法。

构建目标规划模型为

$$\max H(\boldsymbol{\omega}^{\text{obj}})=\sum_{f=1}^{l}\sum_{s=1}^{m}\omega_f^{\text{obj}}\left(\frac{1}{m-1}\sum_{e=1}^{m}\mathrm{CH}(\alpha_{sf},\alpha_{ef})\right)。$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}\sum_{f=1}^{l}\omega_f^{\text{obj}}=1;\\\omega_f^{\text{obj}}\geqslant 0,\ f=1,2,\cdots,l。\end{cases}$$

用拉格朗日乘子法求解模型,构建拉格朗日函数

$$L(\boldsymbol{\omega}^{\text{obj}},y)=\sum_{f=1}^{l}\sum_{s=1}^{m}\omega_f^{\text{obj}}\left(\frac{1}{m-1}\sum_{e=1}^{m}\text{CH}(\alpha_{sf},\alpha_{ef})\right)+\frac{1}{2}y\left(\sum_{f=1}^{l}\omega_f^{\text{obj}}-1\right)。$$

对拉格朗日函数分别关于 $\boldsymbol{\omega}^{\text{obj}}$ 和 λ 求偏导数,并令偏导数为 0,得

$$\begin{cases}\dfrac{\partial L(\omega_f^{\text{obj}},y)}{\partial\omega_f^{\text{obj}}}=\sum\limits_{s=1}^{m}\left(\dfrac{1}{m-1}\sum\limits_{e=1}^{m}\text{CH}(\alpha_{sf},\alpha_{ef})\right)+\dfrac{1}{2}y=0,\\ \dfrac{\partial L(\omega_f^{\text{obj}},y)}{\partial y}=\dfrac{1}{2}\left(\sum\limits_{f=1}^{l}\omega_f^{\text{obj}}-1\right)=0。\end{cases}\tag{11}$$

由式(11)得客观权重为

$$\omega_f^{\text{obj}}=\frac{\sum\limits_{s=1}^{m}\sum\limits_{e=1}^{m}\text{CH}(\alpha_{sf},\alpha_{ef})}{\sum\limits_{f=1}^{l}\sum\limits_{s=1}^{m}\sum\limits_{e=1}^{m}\text{CH}(\alpha_{sf},\alpha_{ef})}。\tag{12}$$

根据已知的主观权重和式(12)中确定的客观权重,得到组合权重 $\boldsymbol{\omega}=(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_f)^{\text{T}}$,其中

$$\omega_f=\varrho\,\omega_f^{\text{obj}}+(1-\varrho)\omega_f^{\text{sub}},\tag{13}$$

式中:$0\leqslant\varrho\leqslant1$, $\varrho=0.5$。

4.3 *T*-球形模糊环境下的灰色-VIKOR 方法

在备选方案优劣的评价过程中传统的 VIKOR 方法不能充分考虑各属性之间的相关性,易造成部分信息的丢失,而灰色关联分析法能够充分挖掘样本数据之间的内在规律,弥补 VIKOR 方法的缺点[25]。另外,在灰色关联度的计算中涉及到差的绝对值以及比值运算。将 VIKOR 方法和灰色关联分析结合,提出基于 T-SFNs 减法和除法算子的灰色-VIKOR 方法,具有更好的评价效果,具体的实现过程如下。

步骤 1 $\boldsymbol{R}=(\alpha_{sf})_{m\times l}$ 标准化后得到 $\boldsymbol{G}=(g_{sf})_{m\times l}$。

$$g_{sf}=\begin{cases}(\alpha_{sf})^c, & \text{属性 } Z_f \text{ 为成本型;}\\ \alpha_{sf}, & \text{属性 } Z_f \text{ 为效益型。}\end{cases}\tag{14}$$

步骤 2 根据式(12)—(13)求解组合权重 $\boldsymbol{\omega}=(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_l)^{\text{T}}$。

步骤 3 确定正理想解 g_f^+ 和负理想解 g_f^-,即

$$g_f^+=\langle\max_s\{\mu_{sf}\},\min_s\{\eta_{sf}\},\min_s\{\nu_{sf}\}\rangle;\quad g_f^-=\langle\min_s\{\mu_{sf}\},\min_s\{\eta_{sf}\},\max_s\{\nu_{sf}\}\rangle。\tag{15}$$

步骤 4 由式(3)、(5)得基于得分函数 $S(\alpha)$ 的 VIKOR 方法的群体效益值 S_s 和个体遗憾值 R_s,即

$$S_s=\sum_{f=1}^{m}\omega_f\frac{d_1(g_f^+,g_{sf})}{d_1(g_f^+,g_f^-)};\quad R_s=\max\left\{\omega_f\frac{d_1(g_f^+,g_{sf})}{d_1(g_f^+,g_f^-)}\right\}。\tag{16}$$

步骤 5 确定灰色关联系数和灰色关联度。根据式(1)、(2)将灰色理论推广到 T-球形环境中,对原来灰色关联系数中的两序列的绝对差换成模糊数之差的绝对值,即备选方案与正、负理想解的灰色关联系数 ε_{sf}^+ 和 ε_{sf}^- 分别为

$$\varepsilon_{sf}^+=\frac{(\bigwedge_s\bigwedge_f\{\omega_f|g_{sf}\ominus g_f^+|\})\oplus[\rho(\bigvee_s\bigvee_f\{\omega_f|g_{sf}\ominus g_f^+|\})]}{(\omega_f|g_{sf}\ominus g_f^+|)\oplus[\rho(\bigvee_s\bigvee_f\{\omega_f|g_{sf}\ominus g_f^+|\}]},\tag{17}$$

$$\varepsilon_{sf}^-=\frac{(\bigwedge_s\bigwedge_f\{\omega_f|g_{sf}\ominus g_f^-|\})\oplus[\rho(\bigvee_s\bigvee_f\{\omega_f|g_{sf}\ominus g_f^-|\})]}{(\omega_f|g_{sf}\ominus g_f^-|)\oplus[\rho(\bigvee_d\bigvee_f\{\omega_f|g_{sf}\ominus g_f^-|\})]},\tag{18}$$

式中:ρ 为分辨系数,$\rho=0.5$,由于式(17)、(18)分子分母都是 T-SFNs,分数线表示 T-SFNs 的除法算子$\oslash$,$\vee$ 和 $\wedge$ 分别表示定义 3 中的析取和合取算子,且

$$|g_{sf}\ominus g_f^{\mathscr{L}}|=\begin{cases}g_{sf}\ominus g_f^{\mathscr{L}}, & \text{如果 } S^{\text{new}}(g_{sf})\geqslant S^{\text{new}}(g_f^{\mathscr{L}}),\\ g_f^{\mathscr{L}}\ominus g_{sf}, & \text{如果 } S^{\text{new}}(g_{sf})\leqslant S^{\text{new}}(g_f^{\mathscr{L}}),\end{cases}\tag{19}$$

式中 $\mathscr{L}=\{+,-\}$。

备选方案与正、负理想解的灰色关联度 ε_s^+、ε_s^- 为

$$\varepsilon_s^+=\varepsilon_{s1}^+\oplus\varepsilon_{s2}^+\oplus\cdots\oplus\varepsilon_{sl}^+,\quad \varepsilon_s^-=\varepsilon_{s1}^-\oplus\varepsilon_{s2}^-\oplus\cdots\oplus\varepsilon_{sl}^-。\tag{20}$$

步骤 6　确定灰色关联后分析各备选方案的群体效益 ζ_s 和个体遗憾 ξ_s,即

$$\zeta_s=S^{\mathrm{new}}(\varepsilon_s^-\oslash\varepsilon_s^+);\quad \xi_s=\max_f\{S^{\mathrm{new}}(\varepsilon_{sf}^-\oslash\varepsilon_{sf}^+)\}。\tag{21}$$

步骤 7　确定基于 T-SFNs 减法和除法算子的灰色-VIKOR 方法下备选方案的综合评价值 Q_s,即

$$Q_s=\sigma\left(\frac{\delta_s-\delta^-}{\delta^+-\delta^-}\right)+(1-\sigma)\left(\frac{\theta_s-\theta^-}{\theta^+-\theta^-}\right),\tag{22}$$

式中

$$\begin{cases}\delta_s=\dfrac{S_s+\zeta_s}{2},\\ \delta^-=\dfrac{\min\{S_s\}+\min\{\zeta_s\}}{2},\\ \delta^+=\dfrac{\max\{S_s\}+\max\{\zeta_s\}}{2},\end{cases}$$

$$\begin{cases}\theta_s=\dfrac{R_s+\xi_s}{2},\\ \theta^-=\dfrac{\min\{R_s\}+\min\{\xi_s\}}{2},\\ \theta^+=\dfrac{\max\{R_s\}+\max\{\xi_s\}}{2},\end{cases}$$

式中:σ 是决策机制系数,一般地 $\sigma=0.5$,即折中态度,Q_s 越小,表示方案离正理想方案越近,方案越优;δ_s 为第 s 个备选方案的群体效益值,δ^- 为 m 个备选方案的最小群体效益值,δ^+ 为 m 个备选方案的最大群体效益值;θ_s 为第 s 个备选方案的个体遗憾值,θ^- 为 m 个备选方案的最小个体遗憾值,θ^+ 为 m 个备选方案的最大个体遗憾值。

步骤 8　根据 δ_s、θ_s、Q_s 的大小对备选方案进行排序。

步骤 9　验证妥协解。若 $Q_{(1)}<Q_{(2)}<\cdots<Q_{(m)}$ 且满足以下条件:

(1) $Q_{(2)}-Q_{(1)}\geqslant\dfrac{1}{m-1}$;其中 m 为备选方案的个数,$\dfrac{1}{m-1}$表示可接受的优势阈值。

(2) 在 δ_s 值和 θ_s 值的排序中,$Q_{(1)}$ 仍然是最优解。

若同时满足以上条件,则 $Q_{(1)}$ 是最优解;若只满足条件(1),则 $Q_{(1)}$、$Q_{(2)}$ 均为妥协解;若只满足条件(2),则 $Q_{(1)},Q_{(2)},\cdots,Q_{(u)}$ 都是妥协解,其中 $Q_{(u)}$ 表示排在第 u 位的 Q_s 值,$Q_{(u)}$ 满足 $Q_{(u)}-Q_{(1)}<\dfrac{1}{m-1}$。

4.4　应用实例

考虑著名的广告选择问题[29]。Case 公司是伊朗历史最悠久、最著名的食品工业公司之一。现在,公司需要选择最佳的广告策略,有 5 种备选方案:电视广告 B_1、广播广告 B_2、报纸广告 B_3、互联网和短信广告 B_4 和环境广告 B_5。3 名广告专家根据受众适合度 Z_1、内容 Z_2、印象率 Z_3 和每月费用 Z_4 等 4 项标准对这些替代方案进行评估,根据经验,假设专家给出的各个属性主观权重为 $\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{sub}}=(0.2,0.1,0.3,0.4)^{\mathrm{T}}$,3 名专家根据 4 种属性对 5 种备选方案进行模糊评价,并将信息以 T-SFNs 的形式呈现在表 1 所示的 T-球形模糊决策矩阵中。

表 1　各备选方案的初始 T-SFNs

Table 1　Initial T-spherical fuzzy numbers for each alternative

备选方案	Z_1	Z_2	Z_3	Z_4
B_1	⟨0.87,0.13,0.05⟩	⟨0.84,0.16,0.07⟩	⟨0.77,0.23,0.13⟩	⟨0.17,0.27,0.74⟩
B_2	⟨0.34,0.67,0.24⟩	⟨0.37,0.63,0.27⟩	⟨0.34,0.67,0.34⟩	⟨0.30,0.60,0.40⟩
B_3	⟨0.31,0.70,0.22⟩	⟨0.30,0.70,0.20⟩	⟨0.24,0.77,0.14⟩	⟨0.10,0.80,0.20⟩
B_4	⟨0.64,0.37,0.27⟩	⟨0.64,0.37,0.27⟩	⟨0.44,0.57,0.39⟩	⟨0.38,0.43,0.57⟩
B_5	⟨0.74,0.27,0.17⟩	⟨0.47,0.53,0.45⟩	⟨0.44,0.57,0.39⟩	⟨0.38,0.43,0.57⟩

步骤1 Z_4 属于成本型属性集，其他属性集为效益型属性集，根据式(14)将表1的 T-球形模糊决策矩阵标准化后得到决策矩阵 $\boldsymbol{G}=(g_{sf})_{m\times l}$，如表2所示，由计算可知，$t=2$。

表2 标准化后每个备选方案的 T-SFNs

Table 2 Normalized T-spherical fuzzy numbers for each alternative

备选方案	Z_1'	Z_2'	Z_3'	Z_4'
B_1	$\langle 0.87,0.13,0.05\rangle$	$\langle 0.84,0.16,0.07\rangle$	$\langle 0.77,0.23,0.13\rangle$	$\langle 0.74,0.27,0.17\rangle$
B_2	$\langle 0.34,0.67,0.24\rangle$	$\langle 0.37,0.63,0.27\rangle$	$\langle 0.34,0.67,0.34\rangle$	$\langle 0.40,0.60,0.30\rangle$
B_3	$\langle 0.31,0.70,0.22\rangle$	$\langle 0.30,0.70,0.20\rangle$	$\langle 0.24,0.77,0.14\rangle$	$\langle 0.20,0.80,0.10\rangle$
B_4	$\langle 0.64,0.37,0.27\rangle$	$\langle 0.64,0.37,0.27\rangle$	$\langle 0.44,0.57,0.39\rangle$	$\langle 0.57,0.43,0.38\rangle$
B_5	$\langle 0.74,0.27,0.17\rangle$	$\langle 0.47,0.53,0.45\rangle$	$\langle 0.44,0.57,0.39\rangle$	$\langle 0.57,0.43,0.38\rangle$

步骤2 由式(12)—(13)得各属性权重如表3所示。

表3 属性权重

Table 3 Weight of attributes

属性	$\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{sub}}$	$\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{obj}}$	$\boldsymbol{\omega}$
Z_1'	0.200 0	0.307 9	0.254 0
Z_2'	0.100 0	0.278 1	0.189 0
Z_3'	0.300 0	0.208 5	0.254 3
Z_4'	0.400 0	0.205 5	0.302 7

步骤3 根据式(15)确定正理想解 g^+、负理想解 g^-，即

$$g^+=\{\langle 0.87,0.13,0.05\rangle,\langle 0.84,0.16,0.07\rangle,\langle 0.77,0.23,0.13\rangle,\langle 0.74,0.27,0.10\rangle\};$$

$$g^-=\{\langle 0.31,0.13,0.27\rangle,\langle 0.30,0.16,0.45\rangle,\langle 0.24,0.23,0.39\rangle,\langle 0.20,0.27,0.38\rangle\}。$$

步骤4 由式(16)—(21)计算 S_s、R_s、ζ_s 和 ξ_s，结果如表4所示。

表4 各备选方案的 S_s、R_s、ζ_s、ξ_s

Table 4 The value of S_s, R_s, ζ_s and ξ_s of each alternative

备选方案	S_s	R_s	ζ_s	ξ_s
B_1	0.011 3	0.011 3	1.000 0	0.726 0
B_2	0.879 0	0.246 5	1.000 0	1.000 0
B_3	1.039 0	0.338 2	1.000 0	1.000 0
B_4	0.564 7	0.193 4	1.000 0	0.844 5
B_5	0.569 6	0.193 4	1.000 0	1.000 0

步骤5 根据式(22)计算 δ_s、θ_s 和 Q_s，并根据 Q_s 给出方案的排名，结果见表5。

表5 各备选方案的 δ_d、θ_s、Q_s

Table 5 The value of δ_s, θ_s and Q_s of each alternative

备选方案	δ_s	θ_s	Q_s	排名
B_1	0.505 6	0.368 7	0.000 0	1
B_2	0.939 5	0.623 2	0.845 9	4
B_3	1.019 5	0.669 1	1.000 0	5
B_4	0.782 4	0.519 0	0.519 4	2
B_5	0.784 8	0.596 7	0.651 1	3

步骤6 根据表5中 Q_s 确定备选方案的排序为 $B_1>B_4>B_5>B_2>B_3$，又由于 $Q_{(2)}-Q_{(1)}=0.519\,4-0=0.519\,4>\frac{1}{5-1}=0.25$ 并且 B_1 的 δ_1 和 θ_1 均最小，所以方案 B_1 是最优方案，即电视广告是最优方案。

取 $\sigma=0,0.1,0.2,0.3,0.4,0.5,0.6,0.7,0.8,0.9,1$，重复上述步骤，不同的 σ 对应的 Q_s 和备选方案的排序结果如表6所示。从表6可以看出，随着 σ 的变化，备选方案的排序结果始终为 $B_1>B_4>B_5>B_2>B_3$，最优的备选方案始终都是 B_1。B_1 对参数 σ 不敏感，避免因决策者的偏好使决策结果存在大的偏差。

表 6　不同的 σ 对应的 Q_s 和备选方案排名
Table 6　Rank alternatives Q_s with different σ

σ	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	Q_5	排序
0	0	0.847 2	1	0.500 3	0.759 0	$B_1>B_4>B_5>B_2>B_3$
0.1	0	0.846 9	1	0.504 2	0.737 4	$B_1>B_4>B_5>B_2>B_3$
0.2	0	0.846 6	1	0.508 0	0.715 8	$B_1>B_4>B_5>B_2>B_3$
0.3	0	0.846 3	1	0.511 8	0.694 3	$B_1>B_4>B_5>B_2>B_3$
0.4	0	0.846 1	1	0.515 7	0.672 7	$B_1>B_4>B_5>B_2>B_3$
0.5	0	0.845 8	1	0.519 5	0.651 1	$B_1>B_4>B_5>B_2>B_3$
0.6	0	0.845 5	1	0.523 3	0.629 6	$B_1>B_4>B_5>B_2>B_3$
0.7	0	0.845 2	1	0.527 1	0.608 0	$B_1>B_4>B_5>B_2>B_3$
0.8	0	0.844 9	1	0.531 0	0.586 4	$B_1>B_4>B_5>B_2>B_3$
0.9	0	0.844 6	1	0.534 8	0.564 9	$B_1>B_4>B_5>B_2>B_3$
1.0	0	0.844 3	1	0.536 8	0.543 3	$B_1>B_4>B_5>B_2>B_3$

4.5　对比实验

为了进一步验证基于 T-SFNs 减法和除法算子的灰色-VIKOR 方法的合理性和优越性,将本文所提的灰色-VIKOR 方法与 4 种不同的方法的结果进行对比:TOPSIS 方法[29]、COPRAS 方法[31]、基于定义 6 得分函数$S(\alpha)$的 VIKOR 方法[9]以及基于定义 7 新得分函数 $S^{\mathrm{new}}(\alpha)$的 VIKOR 方法,结果如表 7 所示。

表 7　基于不同方法的排序结果比较
Table 7　Comparison of ranking results based on different methods

方法	度量标准	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	排序结果
TOPSIS 方法[29]	法一邻近率	0.34	0.06	0.03	0.13	0.15	$B_1>B_5>B_4>B_2>B_3$
	法二邻近率	0.36	0.05	0.03	0.14	0.15	$B_1>B_5>B_4>B_2>B_3$
COPRAS 方法[31]	优先级顺序	100.00	91.670	91.411	94.624	94.098	$B_1>B_4>B_5>B_2>B_3$
基于 $S(\alpha)$的 VIKOR 方法[9]	联合广义测度	0	0.754 7	1.000 0	0.497 1	0.499 2	$B_1>B_4>B_5>B_2>B_3$
基于 $S^{\mathrm{new}}(\alpha)$的 VIKOR 方法	综合评价值	0	0.781 8	1.000 0	0.547 8	0.550 2	$B_1>B_4>B_5>B_2>B_3$
灰色-VIKOR 方法	综合评价值	0	0.845 8	1.000 0	0.519 4	0.651 1	$B_1>B_4>B_5>B_2>B_3$

由表 7 可知,本文提出的灰色-VIKOR 方法得到的最优备选方案与 TOPSIS[29]、COPRAS[31]、基于 $S(\alpha)$的 VIKOR[9]、基于 $S^{\mathrm{new}}(\alpha)$的 VIKOR 方法得到的最优备选方案都是 B_1,因此本文提出的方法是合理有效的。此外,本文所提的方法还具有如下优势:

(1) 本文方法得到的排序结果与 COPRAS[31]、基于 $S(\alpha)$的 VIKOR[9]方法以及基于 $S^{\mathrm{new}}(\alpha)$的 VIKOR 方法的排序结果是一致的,本文方法所得的决策结果对决策系数不敏感,具有更强的决策稳定性。

(2) 与 TOPSIS 方法[29]得到的备选方案排序结果相比,最优备选方案都是 B_1,本文的方法得到 $B_4>B_5$,而 TOPSIS 的方法[29]是 $B_5>B_4$。通过计算可得,对于备选方案 B_4,在不同属性集的加权后得分和为 $S^{\mathrm{new}}(B_4)=0.254\times0.392\,9+0.189\times0.392\,9+0.254\,3\times0.144\,7+0.302\,7\times0.246\,2=0.285\,4$,对于备选方案 B_5,在不同属性集的加权后得分和为 $S^{\mathrm{new}}(B_5)=0.254\times0.554\,5+0.189\times0.105\,9+0.254\,3\times0.144\,7+0.302\,7\times0.246\,2=0.272\,2$,明显 $0.285\,4>0.272\,2$,所以 $B_4>B_5$ 是更合理的,说明本文所提的方法比 TOPSIS 的方法[29]更具优越性。

(3) 基于 $S(\alpha)$的 VIKOR 方法和基于 $S^{\mathrm{new}}(\alpha)$的 VIKOR 方法得到的方案排序结果都为 $B_1>B_4>B_5>B_2>B_3$,发现使用本文所提的 $S^{\mathrm{new}}(\alpha)$计算出备选方案 B_4 和 B_5 综合评价值之间的差异大于基于 $S(\alpha)$的 VIKOR 方法的综合评价值,说明基于 $S^{\mathrm{new}}(\alpha)$的 VIKOR 方法更容易区分备选方案 B_4 和 B_5 的优劣。所以,本文提出的新的得分函数在处理更细微的决策时具有一定的优势。

(4) 与其他方法相比,本文方法得当的备选方案之间的区分度更高。TOPSIS 方法[29]得到备选方案 B_2 和 B_3 的邻近率的差异最大只有 0.03,备选方案 B_4 和 B_5 之间邻近率的差异只有 0.02;COPRAS 方法[31]得到备选方案 B_2 和 B_3 的相对差异值仅为 0.002 59,备选方案 B_4 和 B_5 之间的相对差异值也只有 0.005 26;基于 $S(\alpha)$的 VIKOR 方法和基于 $S^{\mathrm{new}}(\alpha)$的 VIKOR 方法得到备选方案 B_4 和 B_5 的区分能力较弱;而本文的方法中任何两个备选方案之间的差异值都大于 0.1,所以使用本文的方法可以实现更精准的方案区分和更可靠的排序结果,使得决策者能够更清晰选择方案和决策判断,大大提升了决策支持的有效性和可靠性。

综合上述分析,本文提出的基于 T-SFNs 减法和除法算子的灰色-VIKOR 方法相对其他方法更具合理性和优越性,是一种很好的处理复杂决策问题的方法。

5 结论

为了充分考虑各属性之间的相关性且避免部分信息的丢失,本文把灰色关联分析的理论引入 T-球形模糊决策的 VIKOR 方法中,在 T-球形模糊环境下计算灰色关联度时,若直接使用得分函数转换为精确数进行计算,容易造成备选方案在各属性下的模糊信息丢失,而使用 T-SFNs 的减法和除法算子运算能够尽可能地保留模糊信息。本文提出基于 T-SFNs 减法和除法算子的灰色-VIKOR 方法,提高决策结果的可靠性和有效性,为 T-球形模糊环境下的多属性决策问题提供了新的思路。另外,使用 T-球形模糊交叉熵求客观权重,并与主观权重组合,增加权重赋值的合理性。将本文方法和其他 4 种方法的决策结果进行对比,本文的方法得到的决策结果与其中的 COPRAS[31]、基于 $S(\alpha)$ 的 VIKOR 方法[9]以及基于 $S^{\text{new}}(\alpha)$ 的 VIKOR 方法的决策结果一致,同时,与其他方法相比本文的方法可以实现更精准的方案区分和更可靠的排序结果,使得决策者能够更清晰、更自信地进行方案选择和决策判断,大大提升决策支持的有效性和可靠性。后续工作,我们将结合复数情形,研究复 T-球形模糊数的减法和除法算子,并研究复 T-球形模糊数的减法和除法算子在多属性决策、模式识别、模糊聚类等方面的应用,将本文的方法和粒球粗糙集相结合,探究 T-球形模糊粒球粗糙集的相关理论和应用。

参考文献:

[1] ZADEH L A. Fuzzy sets[J]. Information and Control, 1965, 8(3):338-353.
[2] ATANASSSOV K T. Intuitionistic fuzzy sets[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1986, 20(1):87-96.
[3] YAGER R R. Pythagorean membership grades in multicriteria decision making[J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2014, 22(4):958-965.
[4] YAGER R R, ALAJLAN N. Approximate reasoning with generalized orthopair fuzzy sets[J]. Information Fusion, 2017, 38:65-73.
[5] CUONG B C. Picture fuzzy sets[J]. Journal of Computer Science and Cybernetics, 2014, 30(4):409-420.
[6] MAHMOOD T, ULLAH K, KHAN Q, et al. An approach toward decision-making and medical diagnosis problems using the concept of spherical fuzzy sets[J]. Neural Computing and Applications, 2019, 31:7041-7053.
[7] ULLAH K, MAHMOOD T, JAN N. Similarity measures for T-spherical fuzzy sets with applications in pattern recognition[J]. Symmetry, 2018, 10(6):193.
[8] ZENG Shouzhen, GARG H, MUNIR M, et al. A multi-attribute decision making process with immediate probabilistic interactive averaging aggregation operators of T-spherical fuzzy sets and its application in the selection of solar cells[J]. Energies, 2019, 12(23):4436.
[9] CHEN Tingyu. An evolved VIKOR method for multiple-criteria compromise ranking modeling under T-spherical fuzzy uncertainty[J]. Advanced Engineering Informatics, 2022, 54:101802.
[10] WEI Guiwu. Picture fuzzy cross-entropy for multiple attribute decision making problems[J]. Journal of Business Economics and Management, 2016, 17(4):491-502.
[11] WU Xiaohui, YANG Lin, QIAN Jie. Selecting personnel with the weighted cross-entropy TOPSIS of hesitant picture fuzzy linguistic sets[J]. Journal of Mathematics, 2021, 2021(1).
[12] BOZYİĞİT M C, OLGUN M, ÜNVER M, et al. Parametric picture fuzzy cross-entropy measures based on d-Choquet integral for building material recognition[J]. Applied Soft Computing, 2024, 166:112167.
[13] YANG Wei, PANG Yonfeng. T-spherical fuzzy ORESTE method based on cross-entropy measures and its application in multiple attribute decision-making[J]. Soft Computing, 2022, 26(19):10371-10387.
[14] KHAN M R, ULLAH K, KHAN Q. Multi-attribute decision-making using archimedean aggregation operator in T-spherical fuzzy environment[J]. Reports in Mechanical Engineering, 2023, 4(1):18-38.
[15] WANG H L, MAHMOOD T, ULLAH K. Improved CoCoSo method based on frank softmax aggregation operators for T-spherical fuzzy multiple attribute group decision-making[J]. International Journal of Fuzzy Systems, 2023, 25(3):1275-1310.
[16] DU Wensheng.Subtraction and division operations on intuitionistic fuzzy sets derived from the hamming distance[J]. Information Sciences, 2021, 571:206-224.

[17] LI Zhengfei, LIU Peide, QIN Xiyou. An extended VIKOR method for decision making problem with linguistic intuitionistic fuzzy numbers based on some new operational laws and entropy[J]. Journal of Intelligent & Fuzzy Systems, 2017, 33(3): 1919-1931.

[18] LIU Lantian, WU Xinxing, CHEN Guanrong, et al. Picture fuzzy interactional Bonferroni mean operators via strict triangular norms and applications to multicriteria decision making[J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2023, 31(8): 2632-2644.

[19] 孟伟伟,郑婷婷,刘钧歌,等. 图片模糊集的减法和除法算子研究[J]. 山东大学学报(理学版),2025,60(1):45-62.
MENG Weiwei, ZHENG Tingting, LIU Junge, et al. Image subtraction and division of fuzzy set operator research[J]. Journal of Shandong University (Natural Science), 2025, 60(1):45-62.

[20] WEI Guiwu. Picture fuzzy aggregation operators and their application to multiple attribute decision making[J]. Journal of Intelligent & Fuzzy Systems, 2017, 33(2):713-724.

[21] WAN G R, RONG Y, GARG H. An efficient spherical fuzzy MEREC-CoCoSo approach based on novel score function and aggregation operators for group decision making[J]. Granular Computing, 2023, 8(6):1481-1503.

[22] WANG Jihchang, CHEN Tingyu. A T-spherical fuzzy ELECTRE approach for multiple criteria assessment problem from a comparative perspective of score functions[J]. Journal of Intelligent & Fuzzy Systems, 2021, 41(2):3751-3770.

[23] LI Yanhong, SUN Gang. A novel score function determined by the residual sector area on PFNs space and its application in fuzzy decision making[J]. International Journal of Fuzzy Systems, 2024, 26(3):922-942.

[24] 邓聚龙. 灰色系统基本方法[M]. 武汉: 华中理工大学出版社, 1987:74-106.
DENG Julong. Basic method of grey system[M]. Wuhan: Huazhong University of Science and Technology Press, 1987:74-106.

[25] 赵梦洁,杨玉中. 基于组合赋权-灰色 VIKOR 的煤矿隐患排查治理能力评估研究[J]. 矿业安全与环保,2023,50(6):141-146.
ZHAO Mengjie, YANG Yuzhong. Research on evaluation of coal mine hidden danger detection and treatment ability based on combination empowerment-grey VIKOR[J]. Mining Safety & Environmental Protection, 2023, 50(6):141-146.

[26] HAN Min, ZHANG Ruiquan, QIU Tianshuang, et al. Multivariate chaotic time series prediction based on improved grey relational analysis[J]. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems, 2017, 49(10):2144-2154.

[27] HU Yichung. Constructing grey prediction models using grey relational analysis and neural networks for magnesium material demand forecasting[J]. Applied Soft Computing, 2020, 93:106398.

[28] DURAN E, DURAN B U, AKAY D, et al. Grey relational analysis between Turkey's macroeconomic indicators and domestic savings[J]. Grey Systems:Theory and Application, 2017, 7(1):45-59.

[29] FARROKHIZADEH E, SEYFI-SHISHAVAN S A, GÜNDOĞDU F K, et al. A spherical fuzzy methodology integrating maximizing deviation and TOPSIS methods[J]. Engineering Applications of Artificial Intelligence, 2021, 101:104212.

[30] GANIE A H, DUTTA D, SHARMA K S. A new entropy measure and COPRAS method for spherical fuzzy sets[J]. IEEE Access, 2024, 12:63917-63931.

[31] 李清. T-球形模糊集的不确定性度量及其应用研究[D]. 合肥:安徽大学,2023.
LI Qing. Uncertainty measurement of T-spherical fuzzy sets and its application[D]. Hefei: Anhui University, 2023.

(编辑:陈丽萍)