山东大学学报(理学版)2026 年 2 月 第 61 卷 第 2 期
Journal of Shandong University(*Natural Science*), Vol.61, No.2, 2026 http://lxbwk.njournal.sdu.edu.cn

文章编号:1671-9352(2026)02-0106-09 DOI:10.6040/j.issn.1671-9352.0.2024.375

广义分组(重叠)函数关于三角模和三角余模的迁移性

闫欣欣,周红军*

(陕西师范大学数学与统计学院, 陕西 西安 710119)

摘要:聚合函数的迁移性在决策分析和图像处理等方面有着广泛应用。本文以存在非平凡单位元的广义分组函数和广义重叠函数为研究对象,主要研究这两类函数关于三角模和三角余模的迁移性,刻画满足此类迁移性方程广义分组函数和广义重叠函数的结构特征。

关键词:广义分组函数;广义重叠函数;三角模;三角余模;迁移性

中图分类号:O159 **文献标志码**:A

引用格式:闫欣欣,周红军. 广义分组(重叠)函数关于三角模和三角余模的迁移性[J]. 山东大学学报(理学版),2026,61(2):106-114.

Migrativity of general grouping (overlap) functions over *t*-norms and *t*-conorms

YAN Xinxin, ZHOU Hongjun*

(School of Mathematics and Statistics, Shaanxi Normal University, Xi'an 710119, Shaanxi, China)

Abstract: The migrativity of aggregation functions plays a pivotal role in various applications, including decision making and image processing. In this paper, we take general grouping functions and general overlap functions, which possess non-trivial neutral elements, the aim is to study the migrativity of these functions over *t*-norm and *t*-conorms, and to provide the structures of general grouping functions and general overlap functions that satisfy such migrative functional equations.

Key words: general grouping function; general overlap function; *t*-norm; *t*-conorm; migrativity

0 引言

聚合函数作为一种数学工具,广泛应用于模糊逻辑、模糊决策和专家系统等领域[1-3]。其中,三角模和三角余模是最基本的两类聚合函数[4]。值得注意的是,分组函数作为三角余模的推广形式,它对结合性和单位元不作要求,主要应用于模糊偏好建模和决策制定等领域[5]。同样,Bustince 等[6]提出了重叠函数的概念,用于确定两个类别或对象之间的重叠程度。后来,通过进一步放宽分组函数和重叠函数的边界条件,Bustince 和 Miguel 等[7-8]又分别提出了广义分组函数和广义重叠函数的概念,有趣的是这两类函数可能存在单位元,且不一定是 0 和 1。因此,无论从理论还是应用角度来看,这些聚合函数都至关重要。

随着各类聚合函数的提出,广大学者加入了对其代数性质研究的潮流。其中,聚合函数的迁移性问题在理论和应用上都极具研究意义。对于聚合函数迁移性的研究最早可以追溯到是否存在严格三角模解的公开问题[9]中,后来,Durante 等[10]为了构造新的三角模引入了三角模的 α-迁移性,自此,聚合函数的迁移性成为研究的热点。就分组函数和重叠函数而言,文献[11]研究了一致模和零模关于分组函数和重叠函数的 α-迁移性,刻画了此类迁移性方程的解,随后,文献[12-14]又研究了重叠函数关于一致模和零模的 α-迁移性。但是,在进一步的研究中发现分组函数关于三角模和重叠函数关于三角余模仅有平凡解,随之,文献[15]对

收稿日期:2024-11-04; **网络出版时间**:2025-08-22

基金项目:国家自然科学基金资助项目(12171292); 陕西省杰出青年科学基金项目(2024JC-JCQN-01); 陕西师范大学研究生领航人才培养项目(LHRCTS23059)

第一作者:闫欣欣(1995—),女,博士研究生,研究方向为不确定性推理. E-mail:xxy06071226@163.com

*通信作者:周红军(1980—),男,教授,博士生导师,博士,研究方向为序代数与逻辑. E-mail:hjzhou@snnu.edu.cn

广义分组函数和广义重叠函数关于三角模和三角余模的 α-迁移性方程进行了刻画。在应用上,聚合函数的迁移性在决策和图像处理方面发挥着至关重要的作用[16-19]。

由于文献[15]仅研究了以 0 为单位元和没有单位元的广义分组函数(以 1 为单位元和没有单位元的广义重叠函数)关于三角模和三角余模的 α-迁移性,本文以存在非平凡单位元的广义分组函数和广义重叠函数为研究对象,继续刻画满足此类迁移性方程的广义分组函数和广义重叠函数的结构特征。

1　预备知识

下面给出本文中用到的一些基本概念及其相关性质。

定义 1[4]　称二元函数 $T(S):[0,1]^2\to[0,1]$ 为三角模(三角余模),若 $T(S)$ 满足交换律,结合律,关于两个变量单调不减,并且以 1(0) 为单位元。

例 1[4]　表 1 列出了一些常见的连续三角模和三角余模的表达式,其中 $x,y\in[0,1]$。

表 1　连续的三角模和三角余模

Table 1　Continuous t-norms and t-conorms

符号	表达式 $T(x,y)$	符号	表达式 $S(x,y)$
T_M	$\min(x,y)$	S_M	$\max(x,y)$
T_P	xy	S_P	$x+y-xy$
T_L	$\max(x+y-1,0)$	S_L	$\min(x+y,1)$

命题 1[4]　设 $T:[0,1]^2\to[0,1]$ 是三角模,则

(ⅰ) 称元素 $a\in[0,1]$ 是 T 的幂等元,若 $T(a,a)=a$。

(ⅱ) 称 T 是阿基米德的,若对任意的 $x,y\in(0,1)$,存在 $n\in\mathbf{N}$,使得 $x_T^{(n)}<y$,其中 $x_T^{(n)}=T(x,x_T^{(n-1)})$,$x_T^{(0)}=1$。

命题 2[4]　三角模 T 是连续的当且仅当 T 可以表示成连续阿基米德三角模的序和,即存在唯一的有限或者可数无限指标集 Λ,一族唯一确定的连续阿基米德三角模 $\{T_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ 和一族 $[0,1]$ 中非空的两两不相交的开子区间 $\{(a_\lambda,e_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$,使得

$$T(x,y)=\begin{cases}a_\lambda+(e_\lambda-a_\lambda)T_\lambda\left(\dfrac{x-a_\lambda}{e_\lambda-a_\lambda},\dfrac{y-a_\lambda}{e_\lambda-a_\lambda}\right), & (x,y)\in[a_\lambda,e_\lambda]^2,\\ \min(x,y), & \text{其他。}\end{cases}$$

记 $T=(\langle a_\lambda,e_\lambda,T_\lambda\rangle)_{\lambda\in\Lambda}$。

对偶地,三角余模的相关性质如下。

命题 3[4]　设 $S:[0,1]^2\to[0,1]$ 是三角余模,则

(ⅰ) 称元素 $b\in[0,1]$ 是 S 的幂等元,若 $S(b,b)=b$。

(ⅱ) 称 S 是阿基米德的,若对任意的 $x,y\in(0,1)$,存在 $n\in\mathbf{N}$,使得 $x_S^{(n)}>y$,其中 $x_S^{(n)}=S(x,x_S^{(n-1)})$,$x_S^{(0)}=0$。

命题 4[4]　三角余模 S 是连续的当且仅当 S 可以表示成连续阿基米德三角余模的序和,即存在唯一的有限或者可数无限指标集 Λ,一族唯一确定的连续阿基米德三角余模 $\{S_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ 和一族 $[0,1]$ 中非空的两两不相交的开子区间 $\{(a_\lambda,e_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$,使得

$$S(x,y)=\begin{cases}a_\lambda+(e_\lambda-a_\lambda)S_\lambda\left(\dfrac{x-a_\lambda}{e_\lambda-a_\lambda},\dfrac{y-a_\lambda}{e_\lambda-a_\lambda}\right), & (x,y)\in[a_\lambda,e_\lambda]^2,\\ \max(x,y), & \text{其他。}\end{cases}$$

记 $S=(\langle a_\lambda,e_\lambda,S_\lambda\rangle)_{\lambda\in\Lambda}$。

定义 2[5,7]　称二元函数 $G:[0,1]^2\to[0,1]$ 为广义分组函数,若对任意的 $x,y\in[0,1]$,G 满足以下条件:

(G1) G 是交换的;

(G2) 当 $x=1$ 或 $y=1$ 时, $G(x,y)=1$;

(G3) 当 $x=y=0$ 时, $G(x,y)=0$;

(G4) G 是递增的;

(G5) G 是连续的。

而且,若广义分组函数 G 满足

(G6) 当 $G(x,y)=1$ 时, $x=1$ 或 $y=1$;

(G7) 当 $G(x,y)=0$ 时, $x=y=0$。

则称它为分组函数。

定义 3[6,8] 称二元函数 $O:[0,1]^2\to[0,1]$ 为广义重叠函数,若对任意的 $x,y\in[0,1]$, O 满足以下条件:

(O1) O 是交换的;

(O2) 当 $xy=0$ 时, $O(x,y)=0$;

(O3) 当 $xy=1$ 时, $O(x,y)=1$;

(O4) O 是递增的;

(O5) O 是连续的。

则称它为重叠函数。

而且,若广义重叠函数 O 满足

(O6) 当 $O(x,y)=0$ 时, $xy=0$;

(O7) 当 $O(x,y)=1$ 时, $xy=1$。

广义分组函数与三角余模有着紧密的联系,每个连续的三角余模都是广义分组函数,但不一定是分组函数。例如,Łukasiewicz 三角余模 S_L 是广义分组函数,不是分组函数。而且,以 $\gamma\in(0,1)$ 为单位元的广义分组函数既不是三角余模,也不是分组函数。类似地,广义重叠函数与三角模有着紧密的联系,每个连续的三角模都是广义重叠函数,但不一定是重叠函数。例如,Łukasiewicz 三角模 T_L 是广义重叠函数,不是重叠函数。而且,以 $\gamma\in(0,1)$ 为单位元的广义重叠函数既不是三角模,也不是重叠函数.此外,由定义 2 和定义 3 可知,每一个分组(重叠)函数都是广义分组(重叠)函数。

2 广义分组函数关于三角模和三角余模的迁移性

文献[15]研究了没有单位元的广义分组函数关于三角模和三角余模的迁移性,并给出了满足迁移性方程的等价条件。本节主要研究存在非平凡单位元的广义分组函数关于三角模和三角余模的迁移性。

定义 4[15] 设 $\alpha\in[0,1]$, G 是广义分组函数, T 是三角模。称 G 是 (α,T)-迁移的(或 G 关于 T 是 α-迁移的),若对任意的 $x,y\in[0,1]$,有

$$G(T(\alpha,x),y)=G(x,T(\alpha,y))。\tag{1}$$

命题 5[15] 设 $\alpha\in(0,1)$, G 是广义分组函数, T 是三角模。若 G 是 (α,T)-迁移的,则 $G(\alpha,0)=1$。

由命题 5 可知,当 $\alpha\in(0,1)$ 时,若 G 是 (α,T)-迁移的,则 G 没有单位元。对于此类迁移性方程的研究,具体可参考文献[15]。接下来主要对存在非平凡单位元的广义分组函数关于三角余模的迁移性方程的解进行刻画。

定义 5[15] 设 $\alpha\in[0,1]$, G 是广义分组函数, S 是三角余模。称 G 是 (α,S)-迁移的(或 G 关于 S 是 α-迁移的),若对任意的 $x,y\in[0,1]$,有

$$G(S(\alpha,x),y)=G(x,S(\alpha,y))。\tag{2}$$

命题 6[15] 设 $\alpha\in\{0,1\}$, G 是广义分组函数, S 是三角余模。则 G 是 (α,S)-迁移的。

命题 7[15] 设 $\alpha\in(0,1)$, G 是广义分组函数, S 是三角余模。若 G 是 (α,S)-迁移的,则对任意的 $y\in[0,1]$,有 $G(\alpha,y)=G(0,S(\alpha,y))$。

命题 8 设 $\alpha\in(0,1)$, G 是以 $\gamma\in[0,1)$ 为单位元的广义分组函数, S 是三角余模。则 G 是 (α,S)-迁移的

当且仅当对任意的 $x,y\in[0,1]$，有 $S(\alpha,y)=G(S(\alpha,\gamma),y)$，并且 $G(G(S(\alpha,\gamma),x),y)=G(x,G(S(\alpha,\gamma),y))$。

证明　设 G 是 (α,S)-迁移的。令式(2)中 $x=\gamma$，则 $S(\alpha,y)=G(S(\alpha,\gamma),y)$。并且，对任意的 $x,y\in[0,1]$，有 $G(G(S(\alpha,\gamma),x),y)=G(S(\alpha,x),y)=G(x,S(\alpha,y))=G(x,G(S(\alpha,\gamma),y))$。

反之，若对任意的 $x,y\in[0,1]$，有 $S(\alpha,y)=G(S(\alpha,\gamma),y)$，且 $G(G(S(\alpha,\gamma),x),y)=G(x,G(S(\alpha,\gamma),y))$，则式(2)成立，即 G 是 (α,S)-迁移的。

特别地，若 $\gamma=0$，则得到如下推论：

推论 1[15]　设 $\alpha\in(0,1)$，G 是以 0 为单位元的广义分组函数，S 是三角余模。则 G 是 (α,S)-迁移的当且仅当对任意的 $x,y\in[0,1]$，有 $S(\alpha,y)=G(\alpha,y)$，并且 $G(G(\alpha,x),y)=G(x,G(\alpha,y))$。

命题 9　设 $\alpha\in(0,1)$，G 是以 $\gamma\in[0,1)$ 为单位元的广义分组函数，S 是连续三角余模。若 $S(\alpha,\alpha)=\alpha$，且 G 是 (α,S)-迁移的，则 $\gamma\in[0,\alpha)$。

证明　假设 $\gamma\in[\alpha,1)$。令式(2)中 $x=\gamma$，$y=0$，则 $0=G(\gamma,0)=G(S(\alpha,\gamma),0)=G(\gamma,S(\alpha,0))=G(\gamma,\alpha)=\alpha$，与 $\alpha>0$ 相矛盾，故假设不成立。

定理 1　设 $\alpha\in(0,1)$，G 是以 $\gamma\in[0,\alpha)$ 为单位元的广义分组函数，S 是连续三角余模。如果 $S(\alpha,\alpha)=\alpha$，则 G 是 (α,S)-迁移的当且仅当对任意的 $0\leqslant\min(x,y)\leqslant\alpha\leqslant\max(x,y)\leqslant1$，有 $G(x,y)=\max(x,y)$。

证明　由于 α 是连续三角余模 S 的幂等元，则由命题 4 可知，对任意的 $y\in[0,1]$，有 $S(\alpha,y)=\max(\alpha,y)$。假设 G 是 (α,S)-迁移的，且 $S(\alpha,\alpha)=\alpha$，则由命题 7 和命题 8 可知，对任意的 $y\in[\alpha,1]$，有 $G(0,y)=G(\alpha,y)=G(S(\alpha,\gamma),y)=S(\alpha,y)=y$。并且，由 G 的交换性可知：对任意的 $0\leqslant\min(x,y)\leqslant\alpha\leqslant\max(x,y)\leqslant1$，有 $G(x,y)=\max(x,y)$。

反之，需要证明式(2)成立。由于 G 和 S 具有交换性，分下面 3 种情况进行讨论：

(1) 若 $x,y\in[0,\alpha]$，则 $G(S(\alpha,x),y)=G(\alpha,y)=\alpha=G(x,\alpha)=G(x,S(\alpha,y))$。

(2) 若 $(x,y)\in[0,\alpha]\times(\alpha,1]$，则 $G(S(\alpha,x),y)=G(\alpha,y)=y=\max(x,y)=G(x,y)=G(x,S(\alpha,y))$。

(3) 若 $x,y\in(\alpha,1]$，则 $G(S(\alpha,x),y)=G(x,y)=G(x,S(\alpha,y))$。

定理 2　设 $\alpha\in(0,1)$，G 是以 $\gamma\in[0,1)$ 为单位元的广义分组函数，S 是连续三角余模。如果 $S(\alpha,\alpha)>\alpha$，其中 $\eta=\sup\{x\in[0,\alpha)\mid S(x,x)=x\}$，$\theta=\inf\{x\in(\alpha,1]\mid S(x,x)=x\}$，且 $\gamma\in[\alpha,\theta)$，则 G 是 (α,S)-迁移的当且仅当

(ⅰ) 存在一个连续阿基米德的三角余模 S_* 使得 $S=(\langle 0,\theta,S_*\rangle,\cdots)$。

(ⅱ) 对任意的 $0\leqslant\min(x,y)\leqslant\theta\leqslant\max(x,y)\leqslant1$，有 $G(x,y)=\max(x,y)$。

(ⅲ) 存在一个以 $\dfrac{\gamma}{\theta}$ 为单位元的广义分组函数 G_*，使得对任意的 $x,y\in[0,\theta]$，有 $G(x,y)=\theta\cdot G_*\left(\dfrac{x}{\theta},\dfrac{y}{\theta}\right)$，且 G_* 是 $\left(\dfrac{\alpha}{\theta},S_*\right)$-迁移的。

证明　由于 α 不是连续三角余模 S 的幂等元，即 $S(\alpha,\alpha)>\alpha$，则由命题 4 可知，存在一个连续阿基米德的三角余模 S_* 使得 $S=(\cdots,\langle\eta,\theta,S_*\rangle,\cdots)$，其中 $\eta=\sup\{x\in[0,\alpha)\mid S(x,x)=x\}$，$\theta=\inf\{x\in(\alpha,1]\mid S(x,x)=x\}$。

假设 G 是 (α,S)-迁移的。首先证明 $\eta=0$。由于 $S(\alpha,\eta)=\alpha$，$S(\alpha,\theta)=\theta$，根据 S 的连续性可知，存在 $y_0\in[\eta,\theta]$ 使得 $S(\alpha,y_0)=\gamma$，则 $0=G(\gamma,0)=G(S(\alpha,y_0),0)=G(y_0,\alpha)=G(y_0,S(\alpha,\eta))=G(\gamma,\eta)=\eta$，故 $\eta=0$。

接下来证明(ⅱ)是成立的。若 $y\in[\theta,1]$，则由命题 7 可知，$G(\alpha,y)=G(0,y)$，并且，根据 S_* 的连续阿基米德性，

$$
\begin{aligned}
G(\alpha,y)&=G(\alpha,S(\alpha,y))=G\left(\theta\cdot\left(\left(\frac{\alpha}{\theta}\right)_{S_*}^{(2)}\right),y\right)=G\left(\theta\cdot\left(\left(\frac{\alpha}{\theta}\right)_{S_*}^{(2)}\right),S(\alpha,y)\right)\\
&=G\left(\theta\cdot\left(\left(\frac{\alpha}{\theta}\right)_{S_*}^{(3)}\right),y\right)=\cdots=G\left(\theta\cdot\left(\left(\frac{\alpha}{\theta}\right)_{S_*}^{(n)}\right),y\right)(\forall n\in\mathbf{N})\\
&=G(\theta,y)\left(\text{存在 } n\in\mathbf{N}\text{ 使得}\left(\frac{\alpha}{\theta}\right)_{S_*}^{(n)}=1\right)。
\end{aligned}
$$

由于 $\gamma\in[\alpha,\theta)$，则对任意的 $y\in[\theta,1]$，有 $G(\theta,y)=G(0,y)=y$。再次结合 G 的交换性，(ⅱ)得证。

由 G 的定义和(ⅱ)可知，存在一个广义分组函数 G_*，使得对任意的 $x,y\in[0,\theta]$，有 $G(x,y)=\theta\cdot G_*\left(\frac{x}{\theta},\frac{y}{\theta}\right)$，其中$\frac{\gamma}{\theta}$是 G_* 的单位元。并且，对任意的 $x,y\in[0,\theta]$，有 $G(S(\alpha,x),y)=\theta\cdot G_*\left(S_*\left(\frac{\alpha}{\theta},\frac{x}{\theta}\right),\frac{y}{\theta}\right)$，$G(x,S(\alpha,y))=\theta\cdot G_*\left(\frac{x}{\theta},S_*\left(\frac{\alpha}{\theta},\frac{y}{\theta}\right)\right)$。所以，对任意的 $x,y\in[0,1]$，有 $G_*\left(S_*\left(\frac{\alpha}{\theta},x\right),y\right)=G_*\left(x,S_*\left(\frac{\alpha}{\theta},y\right)\right)$，即 G_* 是 $\left(\frac{\alpha}{\theta},S_*\right)$-迁移的。

反之，需要证明式(2)成立。由于 G 和 S 具有交换性，分下面 3 种情况进行讨论：

(1) 若 $x,y\in[0,\theta]$，由于 G_* 是 $\left(\frac{\alpha}{\theta},S_*\right)$-迁移的，则 $G(S(\alpha,x),y)=G\left(\theta\cdot S_*\left(\frac{\alpha}{\theta},\frac{x}{\theta}\right),y\right)=\theta\cdot G_*\left(S_*\left(\frac{\alpha}{\theta},\frac{x}{\theta}\right),\frac{y}{\theta}\right)=\theta\cdot G_*\left(\frac{x}{\theta},S_*\left(\frac{\alpha}{\theta},\frac{y}{\theta}\right)\right)=G\left(x,\theta\cdot S_*\left(\frac{\alpha}{\theta},\frac{y}{\theta}\right)\right)=G(x,S(\alpha,y))$。

(2) 若$(x,y)\in[0,\theta]\times(\theta,1]$，由于 $S(\alpha,x)\in[\alpha,\theta]$，则 $G(S(\alpha,x),y)=\max(S(\alpha,x),y)=y=\max(x,y)=G(x,y)=G(x,S(\alpha,y))$。

(3) 若 $x,y\in(\theta,1]$，则 $G(S(\alpha,x),y)=G(x,y)=G(x,S(\alpha,y))$。

定理 3　设 $\alpha\in(0,1)$，G 是以 $\gamma\in[0,1)$ 为单位元的广义分组函数，S 是连续三角余模。如果 $S(\alpha,\alpha)>\alpha$，其中 $\eta=\sup\{x\in[0,\alpha)\mid S(x,x)=x\}$，$\theta=\inf\{x\in(\alpha,1]\mid S(x,x)=x\}$，且 $\gamma\in(\eta,\alpha)$，则 G 是(α,S)-迁移的当且仅当

(ⅰ) 存在一个连续阿基米德的三角余模 S_* 使得 $S=(\cdots,\langle\eta,\theta,S_*\rangle,\cdots)$。

(ⅱ) 对任意的 $y\in[0,\theta]$，有 $G(\alpha,y)=G(0,S(\alpha,y))$。

(ⅲ) 对任意的 $0\leqslant\min(x,y)\leqslant\theta\leqslant\max(x,y)\leqslant1$，有 $G(x,y)=\max(x,y)$。

(ⅳ) 存在一个以$\frac{\gamma-\eta}{\theta-\eta}$为单位元的广义分组函数 G_*，使得对任意的 $x,y\in[\eta,\theta]$，有 $G(x,y)=c+(\theta-c)\cdot G_*\left(\frac{x-\eta}{\theta-\eta},\frac{y-\eta}{\theta-\eta}\right)$，其中 $c=G(\eta,\eta)$，且 G_* 是$\left(\frac{\alpha-\eta}{\theta-\eta},S_*\right)$-迁移的。

证明　假设 G 是(α,S)-迁移的，由命题 7 和定理 2 可知，我们仅需要证明(ⅳ)是成立的。由(ⅲ)可知，$G(\theta,\eta)=G(\theta,\theta)=\theta$，且令 $c=G(\eta,\eta)$，则存在一个广义分组函数 G_*，使得对任意的 $x,y\in[\eta,\theta]$，有 $G(x,y)=c+(\theta-c)\cdot G_*\left(\frac{x-\eta}{\theta-\eta},\frac{y-\eta}{\theta-\eta}\right)$，其中$\frac{\gamma-\eta}{\theta-\eta}$是 G_* 的单位元。并且，对任意的 $x,y\in[\eta,\theta]$，有 $G(S(\alpha,x),y)=c+(\theta-c)\cdot G_*\left(S_*\left(\frac{\alpha-\eta}{\theta-\eta},\frac{x-\eta}{\theta-\eta}\right),\frac{y-\eta}{\theta-\eta}\right)$，$G(x,S(\alpha,y))=c+(\theta-c)\cdot G_*\left(\frac{x-\eta}{\theta-\eta},S_*\left(\frac{\alpha-\eta}{\theta-\eta},\frac{y-\eta}{\theta-\eta}\right)\right)$。所以，对任意的 $x,y\in[0,1]$，有 $G_*\left(S_*\left(\frac{\alpha-\eta}{\theta-\eta},x\right),y\right)=G_*\left(x,S_*\left(\frac{\alpha-\eta}{\theta-\eta},y\right)\right)$，即 G_* 是$\left(\frac{\alpha-\eta}{\theta-\eta},S_*\right)$-迁移的。

反之，需要证明式(2)成立。由于 G 和 S 具有交换性，分下面 6 种情况进行讨论：

(1) 若 $x,y\in[0,\eta)$，则由(ⅱ)可知 $G(S(\alpha,x),y)=G(\alpha,y)=G(0,S(\alpha,y))=G(0,\alpha)=G(0,S(\alpha,x))=G(x,\alpha)=G(x,S(\alpha,y))$。

(2) 若 $x,y\in[0,\eta)\times[\eta,\theta]$，由(ⅰ)，(ⅱ)和(ⅳ)可知 $G(\alpha,y)=G(0,S(\alpha,y))\leqslant G(x,S(\alpha,y))\leqslant G(\eta,S(\alpha,y))=c+(\theta-c)G_*\left(0,S_*\left(\frac{\alpha-\eta}{\theta-\eta},\frac{y-\eta}{\theta-\eta}\right)\right)=c+(\theta-c)G_*\left(S_*\left(\frac{\alpha-\eta}{\theta-\eta},0\right),\frac{y-\eta}{\theta-\eta}\right)=G(\alpha,y)$，则 $G(S(\alpha,x),y)=G(\alpha,y)=G(x,S(\alpha,y))$。

(3) 若 $x,y\in[0,\eta)\times(\theta,1]$，则由(ⅰ)和(ⅲ)可知 $G(S(\alpha,x),y)=G(\alpha,y)=\max(\alpha,y)=y=\max(x,y)=G(x,y)=G(x,S(\alpha,y))$。

(4) 若 $x,y\in[\eta,\theta]$，则由(ⅰ)和(ⅳ)可知 $G(S(\alpha,x),y)=G\left(\eta+(\theta-\eta)S_*\left(\frac{\alpha-\eta}{\theta-\eta},\frac{x-\eta}{\theta-\eta}\right),y\right)=c+$

$(\theta-c)G_*\left(S_*\left(\frac{\alpha-\eta}{\theta-\eta},\frac{x-\eta}{\theta-\eta}\right),\frac{y-\eta}{\theta-\eta}\right)=c+(\theta-c)G_*\left(\frac{x-\eta}{\theta-\eta},S_*\left(\frac{\alpha-\eta}{\theta-\eta},\frac{y-\eta}{\theta-\eta}\right)\right)=G(x,S(\alpha,y))$。

(5) 若$(x,y)\in[\eta,\theta]\times(\theta,1]$,由于 $S(\alpha,x)\in[\alpha,\theta]$,因此 $G(S(\alpha,x),y)=\max(S(\alpha,x),y)=y=\max(x,y)=G(x,y)=G(x,S(\alpha,y))$。

(6) 若 $x,y\in(\theta,1]$,则 $G(S(\alpha,x),y)=G(x,y)=G(x,S(\alpha,y))$。

定理 4　设 $\alpha\in(0,1)$,G 是以 $\gamma\in[0,1)$为单位元的广义分组函数,S 是连续三角余模。如果 $S(\alpha,\alpha)>\alpha$,其中 $\eta=\sup\{x\in[0,\alpha)\mid S(x,x)=x\}$, $\theta=\inf\{x\in(\alpha,1]\mid S(x,x)=x\}$,且 $\gamma\in[0,\eta]$,则 G 是(α,S)-迁移的当且仅当

(ⅰ) 存在一个连续阿基米德的三角余模 S_* 使得 $S=(\cdots,\langle\eta,\theta,S_*\rangle,\cdots)$。

(ⅱ) 对任意的 $y\in[\eta,\theta]$,有 $G(\alpha,y)=\eta+(\theta-\eta)\cdot S_*\left(\frac{\alpha-\eta}{\theta-\eta},\frac{y-\eta}{\theta-\eta}\right)$。

(ⅲ) 对任意的 $0\leqslant\min(x,y)\leqslant\theta\leqslant\max(x,y)\leqslant1$ 或 $0\leqslant\min(x,y)\leqslant\eta<\alpha\leqslant\max(x,y)\leqslant\theta$,有 $G(x,y)=\max(x,y)$。

(ⅳ) 存在一个广义分组函数 G_*,使得对任意的 $x,y\in[\eta,\theta]$,有 $G(x,y)=c+(\theta-c)\cdot G_*\left(\frac{x-\eta}{\theta-\eta},\frac{y-\eta}{\theta-\eta}\right)$,其中 $c=G(\eta,\eta)$,且 G_* 是$\left(\frac{\alpha-\eta}{\theta-\eta},S_*\right)$-迁移的。

证明　假设 G 是(α,S)-迁移的,且 $\gamma\in[0,\eta]$,则由命题 8 可知,对任意的 $y\in[0,1]$,有 $G(\alpha,y)=G(S(\alpha,\gamma),y)=S(\alpha,y)$。结合定理 2 和定理 3 可知,下面仅需证明对任意的 $0\leqslant\min(x,y)\leqslant\eta<\alpha\leqslant\max(x,y)\leqslant\theta$,有 $G(x,y)=\max(x,y)$。

由于 $G(\alpha,\eta)=S(\alpha,\eta)=\alpha$, $G(\alpha,\theta)=\theta$,则对任意的 $x\in[\alpha,\theta]$,存在 $y\in[\eta,\theta]$使得 $G(\alpha,y)=x$,从而可知对任意的 $z\in[0,\eta]$,有 $G(z,x)=G(z,G(\alpha,y))=G(z,S(\alpha,y))=G(\alpha,y)=x$。再次结合 G 的交换性,命题得证。

反之,与定理 3 的证明类似。

注 1　在定理 4 中,若 $\gamma\in[\theta,1)$,则 G 不满足(α,S)-迁移性。假设 G 是(α,S)-迁移的,则命题 8 意味着 $S(\alpha,\alpha)=G(S(\alpha,\gamma),\alpha)=G(\gamma,\alpha)=\alpha$,与 $S(\alpha,\alpha)>\alpha$ 相矛盾。

例 2　(ⅰ) 令 $\alpha=\frac{1}{2}$, $\gamma=\frac{2}{3}$, $S=\left(\left\langle0,\frac{8}{9},S_P\right\rangle\right)$,即

$$S(x,y)=\begin{cases}x+y-\frac{9}{8}xy, & (x,y)\in\left[0,\frac{8}{9}\right]^2,\\ \max(x,y), & \text{其他}\end{cases}$$

且

$$G(x,y)=\begin{cases}0, & (x,y)\in\left[0,\frac{8}{9}\right]^2\text{ 且 }y\leqslant\frac{16-24x}{24-27x},\\ 4x+4y-\frac{9}{2}xy-\frac{8}{3}, & (x,y)\in\left[0,\frac{8}{9}\right]^2\text{ 且 }y>\frac{16-24x}{24-27x},\\ \max(x,y), & \text{其他,}\end{cases}$$

其中 $G_*(x,y)=\max(4x+4y-4xy-3,0)$,$\frac{3}{4}$是它的单位元。则由定理 2 可验证 S 和 G 满足式(2),且 G_* 是$\left(\frac{9}{16},S_P\right)$-迁移的。

(ⅱ) 令 $\alpha=\frac{2}{3}$, $\gamma=\frac{1}{3}$, $S=\left(\left\langle\frac{1}{4},\frac{3}{4},S_P\right\rangle,\left\langle\frac{3}{4},1,S_L\right\rangle\right)$,即

$$S(x,y)=\begin{cases}\frac{3}{2}x+\frac{3}{2}y-2xy-\frac{3}{8}, & (x,y)\in\left[\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right]^2,\\ \min\left(x+y-\frac{3}{4},1\right), & (x,y)\in\left[\frac{3}{4},1\right]^2,\\ \max(x,y), & \text{其他}\end{cases}$$

且

$$G(x,y)=\begin{cases}\min(x,y), & (x,y)\in\left[0,\frac{1}{3}\right]^2,\\ 2\min(x,y)+\frac{39}{20}\max(x,y)-3xy-\frac{13}{20}, & (x,y)\in\left[0,\frac{1}{4}\right]\times\left[\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right]\\ & \text{或}(x,y)\in\left[\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right]\times\left[0,\frac{1}{4}\right],\\ \frac{6}{5}\max(x,y)-\frac{3}{20}, & (x,y)\in\left[0,\frac{1}{4}\right]\times\left[\frac{2}{3},\frac{3}{4}\right]\\ & \text{或}(x,y)\in\left[\frac{2}{3},\frac{3}{4}\right]\times\left[0,\frac{1}{4}\right],\\ \frac{9}{5}x+\frac{9}{5}y-\frac{12}{5}xy-\frac{3}{5}, & (x,y)\in\left[\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right]^2\backslash\left[\frac{1}{4},\frac{1}{3}\right]^2,\\ \max(x,y), & \text{其他},\end{cases}$$

其中

$$G_*(x,y)=\begin{cases}\min(x,y), & (x,y)\in\left[0,\frac{1}{6}\right]^2,\\ \frac{6}{5}x+\frac{6}{5}y-\frac{6}{5}xy-\frac{1}{5}, & \text{其他},\end{cases}$$

$\frac{1}{6}$是它的单位元。则由定理 3 可验证 S 和 G 满足式(2),且 G_* 是$\left(\frac{5}{6},S_P\right)$-迁移的。

(ⅲ) 令 $\alpha\in\left(\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right)$, $\gamma=\frac{1}{3}$, $S=\left(\left\langle\frac{1}{2},\frac{3}{4},S_P\right\rangle\right)$,且

$$G(x,y)=\begin{cases}0, & (x,y)\in\left[0,\frac{1}{2}\right]^2\text{ 且 }y\leqslant\frac{1-3x}{3-6x},\\ 3x+3y-6xy-1, & (x,y)\in\left[0,\frac{1}{2}\right]^2\text{ 且 }y>\frac{1-3x}{3-6x},\\ 3x+3y-4xy-\frac{3}{2}, & (x,y)\in\left[\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right]^2,\\ \max(x,y), & \text{其他},\end{cases}$$

其中,$G_*=S_P$。则由定理 4 可验证 S 和 G 满足式(2),且 G_* 是$(4\alpha-2,S_P)$-迁移的。

3 广义重叠函数关于三角模和三角余模的迁移性

本章主要研究存在非平凡单位元的广义重叠函数关于三角模和三角余模的迁移性。

定义 6[15] 设 $\alpha\in[0,1]$,O 是广义重叠函数,S 是三角余模。称 O 是(α,S)-迁移的(或 O 关于 S 是 α-迁移的),若对任意的 $x,y\in[0,1]$,有

$$O(S(\alpha,x),y)=O(x,S(\alpha,y))。\tag{3}$$

命题 10[15] 设 $\alpha\in(0,1)$,O 是广义重叠函数,S 是三角余模。若 O 是(α,S)-迁移的,则 $O(\alpha,1)=0$。

由命题 10 可知,当 $\alpha\in(0,1)$时,若 O 是(α,S)-迁移的,则 O 没有单位元。对于此类迁移性方程的研究,具体可参考文献[15]。接下来主要对存在非平凡单位元的广义重叠函数关于三角模的迁移性方程的解

进行刻画。

定义 7[15]　设 $\alpha\in[0,1]$，O 是广义重叠函数，T 是三角模。称 O 是 (α,T)-迁移的（或 O 关于 T 是 α-迁移的），若对任意的 $x,y\in[0,1]$，有

$$O(T(\alpha,x),y)=O(x,T(\alpha,y))。\tag{4}$$

命题 11[15]　设 $\alpha\in\{0,1\}$，O 是广义重叠函数，T 是三角模。则 O 是 (α,T)-迁移的。

命题 12[15]　设 $\alpha\in(0,1)$，O 是广义重叠函数，T 是三角模。若 O 是 (α,T)-迁移的，则对任意的 $y\in[0,1]$，有 $O(\alpha,y)=O(1,T(\alpha,y))$。

命题 13　设 $\alpha\in(0,1)$，O 是以 $\gamma\in(0,1]$ 为单位元的广义重叠函数，T 是三角模。则 O 是 (α,T)-迁移的当且仅当对任意的 $x,y\in[0,1]$，有 $T(\alpha,y)=O(T(\alpha,\gamma),y)$，并且 $O(O(T(\alpha,\gamma),x),y)=O(x,O(T(\alpha,\gamma),y))$。

证明　类似于命题 8 可证。

特别地，若 $\gamma=1$，则得到如下推论。

推论 2[15]　设 $\alpha\in(0,1)$，O 是以 1 为单位元的广义重叠函数，T 是三角模。则 O 是 (α,T)-迁移的当且仅当对任意的 $x,y\in[0,1]$，有 $T(\alpha,y)=O(\alpha,y)$，并且 $O(O(\alpha,x),y)=O(x,O(\alpha,y))$。

命题 14　设 $\alpha\in(0,1)$，O 是以 $\gamma\in(0,1]$ 为单位元的广义重叠函数，T 是连续三角模。如果 $T(\alpha,\alpha)=\alpha$，且 O 是 (α,T)-迁移的，则 $\gamma\in(\alpha,1]$。

证明　类似于命题 9 可证。

定理 5　设 $\alpha\in(0,1)$，O 是以 $\gamma\in(\alpha,1]$ 为单位元的广义重叠函数，T 是连续三角模。如果 $T(\alpha,\alpha)=\alpha$，则 O 是 (α,T)-迁移的当且仅当对任意的 $0\leqslant\min(x,y)\leqslant\alpha\leqslant\max(x,y)\leqslant1$，有 $O(x,y)=\min(x,y)$。

证明　类似于定理 1 可证。

定理 6　设 $\alpha\in(0,1)$，O 是以 $\gamma\in(0,1]$ 为单位元的广义重叠函数，T 是连续三角模。如果 $T(\alpha,\alpha)<\alpha$，其中 $\delta=\sup\{x\in[0,\alpha)\mid T(x,x)=x\}$，$\mu=\inf\{x\in(\alpha,1]\mid T(x,x)=x\}$，且 $\gamma\in(\delta,\alpha]$，则 O 是 (α,T)-迁移的当且仅当

（ⅰ）存在一个连续阿基米德的三角模 T_* 使得 $T=(\cdots,\langle\delta,1,T_*\rangle)$。

（ⅱ）对任意的 $0\leqslant\min(x,y)\leqslant\delta\leqslant\max(x,y)\leqslant1$，有 $O(x,y)=\min(x,y)$。

（ⅲ）存在一个以 $\dfrac{\gamma-\delta}{1-\delta}$ 为单位元的广义重叠函数 O_*，使得对任意的 $x,y\in[\delta,1]$，有 $O(x,y)=\delta+(1-\delta)O_*\left(\dfrac{x-\delta}{1-\delta},\dfrac{y-\delta}{1-\delta}\right)$，且 O_* 是 $\left(\dfrac{\alpha-\delta}{1-\delta},T_*\right)$-迁移的。

证明　类似于定理 2 可证。

定理 7　设 $\alpha\in(0,1)$，O 是以 $\gamma\in(0,1]$ 为单位元的广义重叠函数，T 是连续三角模。如果 $T(\alpha,\alpha)<\alpha$，其中 $\delta=\sup\{x\in[0,\alpha)\mid T(x,x)=x\}$，$\mu=\inf\{x\in(\alpha,1]\mid T(x,x)=x\}$，且 $\gamma\in(\alpha,\mu)$，则 O 是 (α,T)-迁移的当且仅当

（ⅰ）存在一个连续阿基米德的三角模 T_* 使得 $T=(\cdots,\langle\delta,\mu,T_*\rangle,\cdots)$。

（ⅱ）对任意的 $y\in[\delta,1]$，有 $O(\alpha,y)=O(1,T(\alpha,y))$。

（ⅲ）对任意的 $0\leqslant\min(x,y)\leqslant\delta\leqslant\max(x,y)\leqslant1$，有 $O(x,y)=\min(x,y)$。

（ⅳ）存在一个以 $\dfrac{\gamma-\delta}{\mu-\delta}$ 为单位元的广义重叠函数 O_*，使得对任意的 $x,y\in[\delta,\mu]$，有 $O(x,y)=\delta+(d-\delta)\cdot O_*\left(\dfrac{x-\delta}{\mu-\delta},\dfrac{y-\delta}{\mu-\delta}\right)$，其中 $d=O(\mu,\mu)$，且 O_* 是 $\left(\dfrac{\alpha-\delta}{\mu-\delta},T_*\right)$-迁移的。

证明　类似于定理 3 可证。

定理 8　设 $\alpha\in(0,1)$，O 是以 $\gamma\in(0,1]$ 为单位元的广义重叠函数，T 是连续三角模。如果 $T(\alpha,\alpha)<\alpha$，其中 $\delta=\sup\{x\in[0,\alpha)\mid T(x,x)=x\}$，$\mu=\inf\{x\in(\alpha,1]\mid T(x,x)=x\}$，且 $\gamma\in[\mu,1]$，则 O 是 (α,T)-迁移的当且仅当

（ⅰ）存在一个连续阿基米德的三角模 T_* 使得 $T=(\cdots,\langle\delta,\mu,T_*\rangle,\cdots)$。

(ⅱ)对任意的 $y\in[\delta,\mu]$,有 $O(\alpha,y)=\delta+(\mu-\delta)\cdot T_*\left(\frac{\alpha-\delta}{\mu-\delta},\frac{y-\delta}{\mu-\delta}\right)$。

(ⅲ)对任意的 $0\leqslant\min(x,y)\leqslant\delta\leqslant\max(x,y)\leqslant 1$ 或 $\delta\leqslant\min(x,y)\leqslant\alpha<\mu\leqslant\max(x,y)\leqslant 1$,有 $O(x,y)=\min(x,y)$。

(ⅳ)存在一个广义重叠函数 O_*,使得对任意的 $x,y\in[\delta,\mu]$,有 $O(x,y)=\delta+(d-\delta)\cdot O_*\left(\frac{x-\delta}{\mu-\delta},\frac{y-\delta}{\mu-\delta}\right)$,其中 $d=O(\mu,\mu)$,且 O_* 是 $\left(\frac{\alpha-\delta}{\mu-\delta},T_*\right)$-迁移的。

证明 类似于定理 4 可证。

注 2 在定理 8 中,若 $\gamma\in(0,\delta]$,则 O 不满足 (α,T)-迁移性。假设 O 是 (α,T)-迁移的,则命题 13 意味着 $T(\alpha,\alpha)=O(T(\alpha,\gamma),\alpha)=O(\gamma,\alpha)=\alpha$,与 $T(\alpha,\alpha)<\alpha$ 相矛盾。

参考文献:

[1] BELIAKOV G, PRADERA A, CALVO T. Aggregation functions: a guide for practitioners[M]. Berlin: Springer-Verlag, 2007.

[2] XALVO T, MAYOR G, MESIAR R. Aggregation operators: new trends and applications[M]. Heidelberg: Physica, 2002.

[3] JAMES S. An introduction to data analysis using aggregation functions in **R**[M]. Cham: Springer, 2016.

[4] KLEMENT E P, MSEIAR R, PAP E. Triangular norms[M]. Dordrecht: Kluwer, 2000.

[5] BUSTINCE H, PAGOLA M, MESIAR R, et al. Grouping, overlaps, and generalized bientropic functions for fuzzy modeling of pairwise comparisons[J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2012, 20(3):405-415.

[6] BUSTINCE H, FERNANDEZ J, MESIAR R, et al. Overlap functions[J]. Nonlinear Analysis, 2010, 72:1488-1499.

[7] SANTOS H, DIMURO G P, ASMUS T C, et al. General grouping functions[C]//Information Processing and Management of Uncertainty in Knowledge-based Systems. Cham: Springer, 2020 (1238):481-495.

[8] MIGUEL L D, GÓMEZ D, RODRÍGUEZ J T, et al. General overlap functions[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2019, 372:81-96.

[9] MESIAR R, NOVÁK V. Open problems from the 2nd international conference on fuzzy sets theory and its applications[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1996, 81:185-190.

[10] DURANTE F, SARKOCI P. A note on the convex combinations of triangular norms[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2008, 159:77-80.

[11] QIAO Junsheng, HU Baoqing. On the migrativity of uninorms and nullnorms over overlap and grouping functions[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2018, 346:1-54.

[12] ZHOU Hongjun, YAN Xinxin. Migrativity properties of overlap functions over uninorms[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2021, 403:10-37.

[13] ZHU Kuanyun, HU Baoqing. Addendum to "On the migrativity of uninorms and nullnorms over overlap and grouping functions"[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2020, 386:48-59.

[14] LI Wenhuang, QIN Feng. New results on the migrativity properties for overlap (grouping) functions and uninorms[J]. Iranian Journal of Fuzzy Systems, 2021, 18 (3):111-128.

[15] YAN Xinxin, ZHOU Hongjun. Migrativity properties of general grouping (overlap) functions with regard to null-norms[J]. Computational and Applied Mathematics, 2024, 143 (251):1-23.

[16] KERRE E E, NACHTEGAEL M. Fuzzy techniques in image processing[M]. Berlin: Springer-Verlag, 2000.

[17] MONTERO J, GÓMEZ D, MUÑOZ S. Fuzzy information representation for decision aiding[C]//Proceedings of the IPMU Conference. Málaga: Universidad complutense madrid, 2008:1425-1430.

[18] MONTERO J, LÓPEZ V, GÓMEZ D. The role of fuzziness in decision making[C]//Fuzzy Logic. Berlin: Springer, 2007: 337-349.

[19] ROY B. Decision science or decision-aid science[J]. European Journal of Operational Research, 1993, 66:184-203.

(编辑:胡春燕)