山东大学学报(理学版)2026 年 2 月 第 61 卷 第 2 期
Journal of Shandong University(*Natural Science*), Vol.61, No.2, 2026 http://lxbwk.njournal.sdu.edu.cn

文章编号:1671-9352(2026)02-0088-11 DOI:10.6040/j.issn.1671-9352.0.2024.220

变系数非线性抛物型方程的辐射系数识别问题

龙畅,杨柳 *
(兰州交通大学数理学院, 甘肃 兰州 730070)

摘要:研究一类利用附加条件重构并带有变系数的非线性抛物型方程辐射系数的反问题,其中方程的变系数依赖于解的梯度。首先由能量估计证明相应定解问题的解的唯一性与稳定性,然后基于最优控制理论并利用 Tikhonov 正则化方法将原问题转化为一个优化问题,最后利用极小元所满足的必要条件证明极小元的存在性、唯一性和稳定性。

关键词:反问题;非线性抛物型方程;最优控制
中图分类号:O175 **文献标志码**:A
引用格式:龙畅,杨柳. 变系数非线性抛物型方程的辐射系数识别问题[J]. 山东大学学报(理学版),2026,61(2):88-98.

Identification of radiation coefficients for nonlinear parabolic equations with variable coefficients

LONG Chang, YANG Liu *
(School of Mathematics and Physics, Lanzhou Jiaotong University, Lanzhou 730070, Gansu, China)

Abstract: In this paper, we study a class of inverse problems that use additional conditions to reconstruct the radiation coefficients of nonlinear parabolic equations with variable coefficients, where the variable coefficient of the equation depends on the gradient of the solution. Firstly, the uniqueness and stability of the corresponding solution to definite solutions problem are proved by energy estimation. Secondly, based on the optimal control theory, the original problem is transformed into an optimization problem by using Tikhonov regularization method. Finally, the existence, uniqueness and stability of the minimum element are proved by using the necessary conditions satisfied by the minimum.

Key words: inverse problem; nonlinear parabolic equations; optimal control

0 引言

本文考虑变系数非线性抛物型方程确定未知系数 $h(x)$ 的问题:

$$\begin{cases} u_t-(a(|u_x|^2)u_x)_x+h(x)u=f(x,t), & (x,t)\in Q=[0,l]\times(0,T], \\ u|_{\partial\Omega}=0, & \\ u|_{t=0}=\varphi(x), & x\in[0,l], \end{cases} \tag{1}$$

其中 a 和 φ 是两个给定的光滑函数。假设给定如下附加条件:

$$u|_{t=T}=g(x),\quad x\in\bar{\Omega}=[0,l], \tag{2}$$

其中,$T(T>0)$、$g(x)$是可以通过测量或者实验得到的已知函数。

在这种情况下,将确定函数对$(u(x,t),h(x))$的值。未知系数 $h(x)$表示辐射系数,通常与介质性质有关。$a(x)$表示热容量等热传导系数,而$(h(x),u(x,t))$表示热源大小,它取决于位置 x、时间 t 和温度 u。也就是说 $h(x)$实际上描述了热源器件或散热器介质的性质[1]。逆问题的任务是从溶液的某些信息中获得介

收稿日期:2024-06-26; **网络出版时间**:2025-09-29
基金项目:国家自然科学基金资助项目(61663018,11961042); 甘肃省自然科学基金资助项目(22JR5RA341)
第一作者:龙畅(1999—),男,硕士研究生,研究方向为数学物理反问题. E-mail:2764255494@qq.com
* **通信作者**:杨柳(1977—),女,教授,博士生导师,博士,研究方向为数学物理反问题. E-mail:l_yang218@163.com

质的热传导特性[2]，即根据有关 $u(x,t)$ 一些附加信息确定热方程中的未知系数，其难点在于，逆问题在 Hadamard 的意义上大多数情况下都是不适定的[3]，而正问题是适定的[4-5]。由于通过实验获得的终端观测数据 $g(x)$ 中始终存在不可避免的误差，$g(x)$ 中的小扰动可能导致 $h(x)$ 发生较大变化，使结果变得毫无意义[6]。

在实际应用中，材料的性质如导热系数和扩散系数可能会随着时间或空间的变化而变化。在工程设计中，准确识别辐射系数对于提升系统性能，降低能耗具有重要意义。辐射系数用于描述物体与周围环境之间的热交换，因此在建筑隔热和电子设备冷却等领域中，高效的热管理系统的设计对提升设备或产品性能至关重要。此外，提高辐射系数的识别精度还能提升设备和系统的能源利用效率，降低能源消耗，从而促进能源的可持续发展[7]。

本文根据附加边界条件（即在边界或最终时间上获取的测量数据）确定抛物线型非线性偏微分方程中的未知系数，这被称为反系数问题[8-10]。这些问题研究中，未知的前导系数可能取决于变量 x 或解 $u=u(x,t)$，即 $a=a(x)$ 或 $a=a(u)$。然而，椭圆算子 $Au:(a(|u_x|^2)u_x)_x$ 与计算材料学有关，其中主系数依赖于解 $u=u(x,t)$ 的梯度，即 $a=a(|u_x|^2)$[11]。根据 J_2-塑型形变理论，可以用 Hencky 相关性[12]来描述：

$$\Upsilon=w(\upsilon^2)\upsilon。$$

其中 $\upsilon:=\sqrt{2\varepsilon_{ij}^D\varepsilon_{ij}^D}$ 和 $\Upsilon:=\sqrt{0.5\sigma_{ij}^D\sigma_{ij}^D}$ 分别是应变和应力的强度。对于工程材料，正函数 $w(\upsilon^2)$ 称为塑型函数，假定是连续和有界的，即

$$w\in C[0,\infty),\quad 0<c_1\leqslant w(\upsilon)\leqslant c_2,\qquad \forall\upsilon\in[0,\infty),$$

且 $\Upsilon(\upsilon)$ 是一个单调递增的凸函数：

$$[\Upsilon(\upsilon_1)-\Upsilon(\upsilon_2)](\upsilon_1-\upsilon_2)>0。$$

考虑到上述物理模型，假设反问题(1)中系数 $a=a(s)$，满足以下条件：

(A_1) $a\in C[0,\infty)$，$c_1\leqslant a(s)\leqslant c_2$，$\forall s\in[0,\infty)$；

(A_2) $0<\underline{a}\leqslant a'(s)\leqslant\overline{a}$，$\overline{a}\leqslant 4\underline{a}$；

(A_3) $a(0)\geqslant\dfrac{1}{\underline{a}}\overline{a}^2+\delta$，$\exists\delta>0$；

(A_4) $0<\underline{a}_1\leqslant a''(s)\leqslant\overline{a}_1$。

其中，c_1、c_2 和 $\underline{a}$、$\overline{a}$、$\underline{a}_1$、$\overline{a}_1$ 是正常数。

利用某些附加观测条件确定热传导方程的零阶项系数是一个经典反问题，不论是理论分析还是数值模拟，已有很多结果[13-15]。这些模型绝大多数是线性热传导方程。相较于线性模型，本文考虑的是一个非线性模型(1)，且主项系数 a 依赖于解的梯度的平方，即 $a=a(|u_x|^2)$。这一项的出现一方面会大大增加本模型的适用范围，且导致测量参数对待反演参数的敏感性更强，比线性关系更容易实现反演，但另一方面也会使得相应的分析变得极为复杂。事实上，方程(1)的解 u 依赖于未知系数 h，而 a 又依赖于 $|u_x|^2$，这样 a 实际上也是与 h 相关的。从某种意义上说，方程(1)实际上包含了两个未知系数。主项系数、零阶项系数以及方程的解。三者之间的耦合性是本文的主要特色，也是最大的困难。

条件(A_1)—(A_4)称为结构性条件，这些条件在非线性方程的分析中是常见的。如前所述，由于 a、h 和 u 之间的耦合性，需要谨慎对待每一个积分项，为了得到稳定性估计，这些条件是不可或缺的。

1　正问题

本文中若无其他说明，符号 C 表示与 T 无关的不同常数。

定理 1　记 $Q_t=\{(x,t)|0\leqslant x\leqslant l,\ 0\leqslant t\leqslant T\}$，在集合 Q_t 中考虑抛物问题。对任意给定的 $f\in L^2(Q_t)$，$\varphi\in L^2[0,l]$，方程存在唯一解且满足如下估计式：

$$\int_0^l u^2\mathrm{d}x+\int_0^t\int_0^l u_x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t\leqslant C\left(\int_0^l\varphi^2\mathrm{d}x+\int_0^t\int_0^l f^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t\right)。$$

证明　在抛物方程(1)两边同乘 u，并在 Q_t 上积分

$$\int_0^t\int_0^l u_t u\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\int_0^t\int_0^l a(|u_x|^2)|u_x|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\int_0^t\int_0^l h(x)u^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t=\int_0^t\int_0^l fu\mathrm{d}x\mathrm{d}t。\tag{3}$$

式(3)左端第一部分为

$$\begin{aligned}\int_0^t\int_0^l u_t u\mathrm{d}x\mathrm{d}t&=\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^l (u^2)_t\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{2}\int_0^l (u^2)\mid_{t=0}^{t}\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2}\left(\int_0^l |u^2|\mathrm{d}x-\int_0^l\varphi^2\mathrm{d}x\right)。\end{aligned}$$

根据假设条件(A_1),可以得出

$$c_1\int_0^t\int_0^l |u_x|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t\leqslant\int_0^t\int_0^l a(|u_x|^2)|u_x|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t。$$

注意到

$$\int_0^t\int_0^l h(x)u^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t\geqslant 0。$$

式(3) 右端应用 Young 不等式,有

$$\begin{aligned}\int_0^t\int_0^l fu\mathrm{d}x\mathrm{d}t&\leqslant\frac{\varepsilon^2}{2}\int_0^t\int_0^l u^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\frac{1}{2\varepsilon^2}\int_0^t\int_0^l f^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\&\leqslant\frac{\varepsilon^2c_0^2}{2}\int_0^t\int_0^l |u_x|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\frac{1}{2\varepsilon^2}\int_0^t\int_0^l f^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

其中,选择 ε 使得

$$\frac{\varepsilon^2c_o^2}{2}=\frac{c_1}{2}。$$

在最后一个不等式中,应用了 Poincaré 不等式,其中 c_0 是 Poincaré 常数,

结合上述的不等式以及式(3),有

$$\int_0^l u^2\mathrm{d}x+\int_0^t\int_0^l u_x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t\leqslant C\left(\int_0^l\varphi^2\mathrm{d}x+\int_0^t\int_0^l f^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t\right)。$$

证毕。

注1 方程(1)两边同乘以 u_t,并在 Q_t 上积分,利用分部积分以及条件(A_1)—(A_4),还可以得到更强的结论:

$$\|u\|_{W_2^{2,1}(Q_T)}\leqslant C,$$

这里 C 是一个常数。空间 $W_2^{2,1}(Q_T)$ 的定义参见文献[16],过程较长,此处略。

注2 假设 a 为常数,考虑如下非齐次 Dirichlet 边界条件:

$$\begin{cases}u_t-au_{xx}+h(x)u=f(x,t), & (x,t)\in Q=[0,l]\times(0,T],\\ u|_{x=0}=g_1(t),\ u|_{x=l}=g_2(t), & t\in(0,T],\\ u|_{t=0}=\varphi(x), & x\in[0,l]。\end{cases}$$

令

$$u=Y+\frac{l-x}{l}g_1+\frac{x}{l}g_2,$$

$$F(x,t)=\frac{l-x}{l}g_1+\frac{x}{l}g_2,$$

容易验证 Y 满足如下方程:

$$\begin{cases}Y_t-aY_{xx}+hY=\tilde{f}(x,t), & (x,t)\in Q=[0,l]\times(0,T],\\ Y|_{x=0}=Y|_{x=l}=0, & t\in(0,T],\\ Y|_{t=0}=\tilde{\varphi}(x), & x\in[0,l],\end{cases}$$

其中

$$\tilde{\varphi}=\varphi-F(x,0),$$

$$\tilde{f}=f-F_t-hF。$$

此时采用的分析方法与本文一致。

考虑非线性情况,则方程中 a 为 $a(|u_x|^2)$,采用同样的函数变换,方程可化为

$$Y_t+F_t-(a(|Y_x+F_x|^2)(Y_x+F_x))_x+h(Y+F)=f。$$

易见 Y 满足齐次 Dirichlet 边界条件,将上面方程化简可得

$$Y_t-(a(|Y_x+F_x|^2)Y_x)_x+hY=\tilde{F}(x,t,|Y_x|),$$

其中

$$\tilde{F}(x,t,|Y_x|):=f-F_t-hF+(a(|Y_x+F_x|^2)F_x)_x。$$

此时右端 $\tilde{F}(x,t,|Y_x|)$ 不仅与 x,t 相关,还与 $|Y_x|$ 也相关,且关于 $|Y_x|$ 是非线性的。可以采用类似的方法进行分析,但较之齐次情形会更加复杂。Robin 边界的情形也可以类似分析,此处不再赘述。

2 最优控制问题

由于问题是不适定的,故用最优控制方法来讨论该反问题。

求 $\bar{h}(x)\in\mathscr{A}$,使得

$$J(\bar{h})=\min_{h\in\mathscr{A}}J(h),\tag{4}$$

$$J(h)=\frac{1}{2}\int_0^l|u(x,T;h)-g(x)|^2\mathrm{d}x+\frac{N}{2}\int_0^l|h_x|^2\mathrm{d}x,$$

其中

$$\mathscr{A}=\{h(x)\,|\,0<\alpha\leqslant h(x)\leqslant\beta,\quad h_x\in L^2[0,l]\},$$

$u(x,t;h)$ 是方程(1)对应于给定系数 $h(x)\in\mathscr{A}$ 的解,N 是正则化参数,α、β 是两个给定的正常数。

引理 1　设 $u(x,t)\in C^2(Q)\cap C(\bar{Q})$ 是问题(1)的解,则对 $u(x,t)$ 有如下估计式:

$$\max_Q|u|\leqslant\max\left\{\frac{1}{h_0}\sup_Q|f|,\sup_{[0,l]}|\varphi|\right\}。$$

引理 2　对任意子序列 $\{h_n\}\in\mathscr{A}$,当 $n\to\infty$,$\|h_n-h\|_{L^1[0,l]}\to0$,有

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^l|u(x,T;h_n)-g(x)|^2\mathrm{d}x=\int_0^l|u(x,T;h)-g(x)|^2\mathrm{d}x。$$

引理 1、2 的证明与文献[17]类似,此处略。

定理 2　存在极小元 $\bar{h}\in\mathscr{A}$,使得

$$J(\bar{h})=\min_{h\in\mathscr{A}}J(h)。$$

证明　$J(h)$ 显然是非负的,则 $J(h)$ 有下确界 $k=\inf_{h\in\mathscr{A}}J(h)$,设 $\{h_n\}$ 是极小化序列,即

$$k\leqslant J(h_n)\leqslant k+\frac{1}{n},\quad n=1,2,\cdots。$$

注意到 $J(h_n)\leqslant C$,则

$$\|(h_n)_x\|_{L^2[0,l]}\leqslant C,$$

这里常数 C 与 n 无关。同时 $\{h_n\}$ 是有界的,则

$$\|h_n\|_{H^1[0,l]}\leqslant C,$$

因此可以选取一个 $\{h_n\}$ 的子序列,不妨仍设为 $\{h_n\}$,有

$$h_n(x)\to\bar{h}(x)\in H^1[0,l],\quad(n\to\infty)。$$

利用 Sobolev 嵌入定理,得

$$\|h_n(x)-\bar{h}(x)\|_{L^1[0,l]}\to0,\quad(n\to\infty),$$

即 $\{h_n(x)\}\in\mathscr{A}$。因此,当 $(n\to\infty)$ 时,在 $L^1[0,l]$ 中有

$$h_n(x)\to\bar{h}(x)\in\mathscr{A}。$$

注意到

$$\lim_{n\to\infty}\frac{N}{2}\int_0^l|(h_n)_x|\mathrm{d}x=\frac{N}{2}\int_0^l|\bar{h}_x|\mathrm{d}x。$$

由引理 2,可知

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^l|u(x,T;h_n)-g(x)|^2\mathrm{d}x=\int_0^l|u(x,T;h)-g(x)|^2\mathrm{d}x。$$

即得

$$J(h_n)\to J(\bar{h}),\quad n\to\infty,$$

则

$$J(\bar{h})=\min_{h\in\mathscr{A}}J(h)。$$

证毕。

3　必要条件

定理 3　令 h 是最优控制问题(4)的极小元,则存在三元函数组$(u,v;h)$满足下面条件:

$$\begin{cases}u_t-(a(|u_x|^2)u_x)_x+hu=f(x,t), & (x,t)\in Q,\\ u|_{\partial\Omega}=0, & \\ u|_{t=0}=\phi(x), & x\in[0,l],\end{cases}\tag{5}$$

$$\begin{cases}-v_t-(2u_xv_xa'(|u_x|^2)+a(|u_x|^2)v_x)_x+hvhv=0, & (x,t)\in Q,\\ v|_{\partial\Omega}=0, & \\ v|_{t=T}=u(x,T)-g(x), & x\in[0,l],\end{cases}\tag{6}$$

以及

$$\int_0^t\int_0^l uv(h-q)\mathrm{d}x\mathrm{d}t-N\int_0^l h_x\cdot(h-q)_x\mathrm{d}x\geqslant0,\tag{7}$$

对任意 $q\in\mathscr{A}$ 都成立。

证明　对任意的 $q\in\mathscr{A}$, $0\leqslant\theta\leqslant1$,有

$$h_\theta\equiv(1-\theta)h+\theta q\in\mathscr{A},$$

于是

$$J_\theta=J(h_\theta)=\frac{1}{2}\int_0^l|u(x,T;h_\theta)-g(x)|^2\mathrm{d}x+\frac{N}{2}\int_0^l|(h_\theta)_x|^2\mathrm{d}x。$$

令 u_θ 为方程(1)对应给定系数 $h=h_\theta$ 时的解。因为 h 是一个最优解,则

$$\left.\frac{\mathrm{d}J_\theta}{\mathrm{d}\theta}\right|_{\theta=0}=\int_0^l[u(x,T;h)-g(x)]\left.\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}\right|_{\theta=0}\mathrm{d}x+N\int_0^l h_x\cdot(q-h)_x\mathrm{d}x\geqslant0。\tag{8}$$

令 $\tilde{u}_\theta\equiv\dfrac{\partial u_\theta}{\partial\theta}$,直接计算可得

$$\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial t}(\tilde{u}_\theta)-\dfrac{\partial}{\partial x}\left(2\dfrac{\partial u_\theta}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial}{\partial x}(\tilde{u}_\theta)\cdot a'\left(\left|\dfrac{\partial u_\theta}{\partial x}\right|^2\right)+\dfrac{\partial}{\partial x}(\tilde{u}_\theta)\cdot a\left(\left|\dfrac{\partial u_\theta}{\partial x}\right|^2\right)\right)+h_\theta\tilde{u}_\theta=(h-q)u_\theta,\\ \tilde{u}_\theta|_{\partial\Omega}=0,\\ \tilde{u}_\theta|_{t=0}=0。\end{cases}$$

令 $\xi=\tilde{u}_\theta|_{\theta=0}$,则 ξ 满足

$$\begin{cases}\xi_t-(2u_x\xi_xa'(|u_x|^2)+a(|u_x|^2)\xi_x)_x+h\xi=(h-q)u,\\ \xi|_{\partial\Omega}=0,\\ \xi|_{t=0}=0。\end{cases}$$

由式(8)得到

$$\int_0^l [u(x,T;h)-g(x)]\xi(x,T)\mathrm{d}x-N\int_0^l h_x\cdot(h-q)_x\mathrm{d}x\geqslant 0。\tag{9}$$

令 $\mathscr{L}\xi=\xi_t-(2u_x\xi_x a'(|u_x|^2)+a(|u_x|^2)\xi_x)_x+h\xi$,并假设 v 是下面方程的解

$$\begin{cases}\mathscr{L}^* v=-v_t-(2u_xv_xa'(|u_x|^2)+a(|u_x|^2)v_x)_x+hv=0,\\ v|_{\partial\Omega}=0,\\ v(x,T)=u(x,T;h)-g(x),\end{cases}$$

这里 $\mathscr{L}^*$ 是算子 $\mathscr{L}$ 的共轭算子。

由格林公式可得

$$\begin{aligned}&\int_0^t\int_0^l(v\mathscr{L}\xi-\xi\mathscr{L}^*v)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\ =&\int_0^T\int_0^l(v\xi_t+\xi v_t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\ &+\int_0^T\int_0^l[\xi(2u_xv_xa'(|u_x|^2)+a(|u_x|^2)v_x)_x-v(2u_x\xi_xa'(|u_x|^2)+a(|u_x|^2)\xi_x)_x]\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\ =&\int_0^l\xi v|_{t=0}^{t=T}\mathrm{d}x+\int_0^T\int_0^l(2u_xv_xa'(|u_x|^2)\xi-2u_x\xi_xa'(|u_x|^2)v+a(|u_x|^2)v_x\xi-a(|u_x|^2)\xi_xv)_x\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\ =&\int_0^l\xi(x,T)[u(x,T)-g(x)]\mathrm{d}x\\ &+\int_0^T(2u_xv_xa'(|u_x|^2)\xi-2u_x\xi_xa'(|u_x|^2)v+a(|u_x|^2)v_x\xi-a(|u_x|^2)\xi_xv)|_{x=0}^{x=l}\mathrm{d}t\\ =&\int_0^l\xi(x,T)[u(x,T)-g(x)]\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

即

$$\int_0^T\int_0^l v\mathscr{L}\xi\mathrm{d}x\mathrm{d}t=\int_0^l\xi(x,T)[u(x,T)-g(x)]\mathrm{d}x。\tag{10}$$

联立式(9)、(10)可得

$$\int_0^T\int_0^l uv(h-q)\mathrm{d}x\mathrm{d}t-N\int_0^l h_x\cdot(h-q)_x\mathrm{d}x\geqslant 0。$$

证毕。

4　唯一性与稳定性

假设 $g_1(x)$ 和 $g_2(x)$ 是两个给定的函数,且满足条件 $g(x)\in C[0,l]$。令 $h_1(x)$ 和 $h_2(x)$ 是控制问题分别对应于 $g=g_i$, $(i=1,2)$ 的解,$\{u_i,v_i\}$,$(i=1,2)$ 是系统(5)、(6)分别对应于 $h=h_i$,$(i=1,2)$ 的解。

令

$$u_1-u_2=U,\quad v_1-v_2=V,\quad h_1-h_2=H,$$

则 U 和 V 满足

$$\begin{cases}U_t-(a(|u_{1x}|^2)u_{1x})_x+(a(|u_{2x}|^2)u_{2x})_x+h_1U=-Hu_2,\\ U|_{\partial\Omega}=0,\\ U|_{t=0}=0,\end{cases}\tag{11}$$

$$\begin{cases}-V_t-(2u_{1x}v_{1x}a'(|u_{1x}|^2)+a(|u_{1x}|^2)v_{1x})_x+(2u_{2x}v_{2x}a'(|u_{2x}|^2)+a(|u_{2x}|^2)v_{2x})_x+h_1V=-Hv_2,\\ V|_{\partial\Omega}=0,\\ V|_{t=T}=U(x,T)-(g_1-g_2)。\end{cases}\tag{12}$$

引理 3　对方程(11)有如下估计式成立:

$$\max_{0\leqslant t\leqslant T}\int_0^l U^2\mathrm{d}x+\int_0^T\int_0^l U_x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t\leqslant C(\max|H|^2)\int_0^T\int_0^l|u_2|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t,$$

这里常数 C 与 T 无关。

证明 记方程(11)左侧第二项与第三项 I 为

$$\begin{aligned} I &= -(a(|u_{1x}|^2)u_{1x})_x + (a(|u_{2x}|^2)u_{2x})_x \\ &= -[a(|u_{1x}|^2)u_{1x} - a(|u_{1x}|^2)u_{2x}]_x - [a(|u_{1x}|^2)u_{2x} - a(|u_{2x}|^2)u_{2x}]_x 。 \end{aligned} \tag{13}$$

记 I_1、I_2 分别对应式(13)第一、二项与三、四项,即

$$I_1 = -[a(|u_{1x}|^2)u_{1x} - a(|u_{1x}|^2)u_{2x}]_x = -[a(|u_{1x}|^2)U_x]_x,$$

$$I_2 = -[a(|u_{1x}|^2)u_{2x} - a(|u_{2x}|^2)u_{2x}]_x 。$$

由微分中值定理,则

$$I_2 = -[a'(\eta)(u_{1x}+u_{2x})U_x u_{2x}]_x,$$

其中 η 介于$|u_{1x}|^2$ 与$|u_{2x}|^2$ 之间。

对 I 两项 I_1 与 I_2 同乘 U 并积分,有

$$\int_0^t\int_0^l IU\mathrm{d}x\mathrm{d}t = \int_0^t\int_0^l \{-[a(|u_{1x}|^2)U_x]_x - [a'(\eta)(u_{1x}+u_{2x})U_x u_{2x}]_x\} U\mathrm{d}x\mathrm{d}t 。$$

考虑 I_1 对应的项为

$$\int_0^t\int_0^l I_1 U\mathrm{d}x\mathrm{d}t = \int_0^t\int_0^l a(|u_{1x}|^2)U_x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t = \int_0^t\int_0^l [a(0)+a'(\eta_1)|u_{1x}|^2]U_x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t, \tag{14}$$

其中 η_1 介于 0 与$|u_{1x}|^2$ 之间。

考虑 I_2 对应的项为

$$\begin{aligned} \int_0^t\int_0^l I_2 U\mathrm{d}x\mathrm{d}t &= \int_0^t\int_0^l a'(\eta)(u_{1x}u_{2x}+u_{2x}^2)U_x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t \\ &= \int_0^t\int_0^l a'(\eta)\left[\left(u_{2x}+\frac{1}{2}u_{1x}\right)^2 - \frac{1}{4}u_{1x}^2\right]U_x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t \\ &\geqslant \int_0^t\int_0^l -\frac{1}{4}a'(\eta)u_{1x}^2U_x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t 。 \end{aligned} \tag{15}$$

由式(14)、(15),结合条件(A_2),有

$$\begin{aligned} \int_0^t\int_0^l (I_1+I_2)U\mathrm{d}x\mathrm{d}t &\geqslant \int_0^t\int_0^l [a(0)+a'(\eta_1)|u_{1x}|^2]U_x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t - \int_0^t\int_0^l \frac{1}{4}a'(\eta)|u_{1x}|^2U_x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t \\ &\geqslant \int_0^t\int_0^l \left[a(0)+\left(\underline{a}-\frac{1}{4}\overline{a}\right)|u_{1x}|^2\right]U_x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t 。 \end{aligned}$$

由条件(A_2)知

$$\begin{aligned} \int_0^t\int_0^l IU\mathrm{d}x\mathrm{d}t &= \int_0^t\int_0^l \left[a(0)+\left(\underline{a}-\frac{1}{4}\overline{a}\right)|u_{1x}|^2\right]U_x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t \\ &\geqslant \int_0^t\int_0^l a(0)U_x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t \geqslant c_1\int_0^t\int_0^l U_x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t 。 \end{aligned} \tag{16}$$

对方程(11)两边其余项同乘 U 并积分,有

$$\int_0^t\int_0^l \left(\frac{U^2}{2}\right)_t \mathrm{d}x\mathrm{d}t + \int_0^t\int_0^l IU\mathrm{d}x\mathrm{d}t + \int_0^t\int_0^l h_1U^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t = -\int_0^t\int_0^l Hu_2U\mathrm{d}x\mathrm{d}t, \tag{17}$$

由式(16)、(17),分部积分可得

$$\begin{aligned} &\int_0^l \frac{U^2}{2}\Big|_{(x,t)}\mathrm{d}x + c_1\int_0^t\int_0^l U_x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t + \int_0^t\int_0^l h_1U^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t \\ &\leqslant \int_0^t\int_0^l |Hu_2U|\mathrm{d}x\mathrm{d}t \\ &\leqslant C(\max|H|^2)\int_0^t\int_0^l |u_2|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t + \frac{\alpha}{2}\int_0^t\int_0^l U^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t, \end{aligned}$$

注意到 $h_1 \geqslant \alpha$,由上式易得到

$$\max_{0\leqslant t\leqslant T}\int_0^l U^2\mathrm{d}x + \int_0^t\int_0^l U_x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t \leqslant C(\max|H|^2)\int_0^T\int_0^l |u_2|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t 。$$

证毕。

引理 4　对方程(12)有如下估计式成立：

$$\max_{0\leqslant t\leqslant T}\int_0^l V^2\mathrm{d}x+C\int_0^T\int_0^l V_x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t\leqslant C(\max|H|)^2\int_0^T\int_0^l(|u_2|^2+|v_2|^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}t+C\int_0^l|g_1-g_2|^2\mathrm{d}x,$$

这里常数 C 与 T 无关。

证明　记方程(12)左侧第二项与第三项 I' 为

$$\begin{aligned}I'&=-(2u_{1x}v_{1x}a'(|u_{1x}|^2)+a(|u_{1x}|^2)v_{1x})_x+(2u_{2x}v_{2x}a'(|u_{2x}|^2)+a(|u_{2x}|^2)v_{2x})_x\\&=-[a(|u_{1x}|^2)v_{1x}-a(|u_{2x}|^2)v_{2x}]_x-[2u_{1x}v_{1x}a'(|u_{1x}|^2)-2u_{2x}v_{2x}a'(|u_{2x}|^2)]_x。\end{aligned}\tag{18}$$

记 I_3、I_4 分别对应式(18)第一、二项与三、四项，I_3 对应的项为

$$\begin{aligned}I_3&=-[a(|u_{1x}|^2)v_{1x}-a(|u_{2x}|^2)v_{2x}]_x\\&=-[a(|u_{1x}|^2)v_{1x}-a(|u_{1x}|^2)v_{2x}+a(|u_{1x}|^2)v_{2x}-a(|u_{2x}|^2)v_{2x}]_x\\&=-[a(|u_{1x}|^2)V_x+a'(\eta)(u_{1x}+u_{2x})v_{2x}U_x]_x,\end{aligned}\tag{19}$$

其中 η 介于$|u_{1x}|^2$ 与$|u_{2x}|^2$ 之间。

I_4 对应的项为

$$\begin{aligned}I_4&=-[2u_{1x}v_{1x}a'(|u_{1x}|^2)-2u_{2x}v_{2x}a'(|u_{2x}|^2)]_x\\&=-[2u_{1x}v_{1x}a'(|u_{1x}|^2)-2u_{1x}v_{2x}a'(|u_{1x}|^2)+2u_{1x}v_{2x}a'(|u_{1x}|^2)-2u_{2x}v_{2x}a'(|u_{2x}|^2)]_x\\&=-[2u_{1x}V_xa'(|u_{1x}|^2)+2u_{1x}v_{2x}a'(|u_{1x}|^2)-2u_{1x}v_{2x}a'(|u_{2x}|^2)\\&\quad+2u_{1x}v_{2x}a'(|u_{2x}|^2)-2u_{2x}v_{2x}a'(|u_{2x}|^2)]_x\\&=-[2u_{1x}V_xa'(|u_{1x}|^2)+2v_{2x}a'(|u_{2x}|^2)U_x+2u_{1x}v_{2x}(a'(|u_{1x}|^2)-a'(|u_{2x}|^2))]_x\\&=-[2u_{1x}V_xa'(|u_{1x}|^2)+2v_{2x}a'(|u_{2x}|^2)U_x+2u_{1x}v_{2x}(a''(\eta_2)(u_{1x}+u_{2x}))U_x]_x,\end{aligned}\tag{20}$$

其中 η_2 介于$|u_{1x}|^2$ 与$|u_{2x}|^2$ 之间。

对 I'两项 I_3 与 I_4 同乘 V 并积分，有

$$\begin{aligned}\int_t^T\int_0^l I'V\mathrm{d}x\mathrm{d}t&=\int_t^T\int_0^l[a(|u_{1x}|^2)V_x^2+a'(\eta)(u_{1x}+u_{2x})v_{2x}U_xV_x]\\&\quad+[2u_{1x}a'(|u_{1x}|^2)V_x^2+2v_{2x}a'(|u_{2x}|^2)U_xV_x+2u_{1x}v_{2x}(a''(\eta_2)(u_{1x}+u_{2x}))U_xV_x]\mathrm{d}x\mathrm{d}t。\end{aligned}$$

记 I_{31}、I_{32}、I_{41}、I_{42}分别对应一、二、三项与四、五项，即

$$I_{31}=\int_t^T\int_0^l[a(|u_{1x}|^2)V_x^2]\mathrm{d}x\mathrm{d}t,$$

$$I_{32}=\int_t^T\int_0^l[a'(\eta)(u_{1x}+u_{2x})v_{2x}U_xV_x]\mathrm{d}x\mathrm{d}t,$$

$$I_{41}=\int_t^T\int_0^l[2u_{1x}a'(|u_{1x}|^2)V_x^2]\mathrm{d}x\mathrm{d}t,$$

$$I_{42}=\int_t^T\int_0^l[2v_{2x}a'(|u_{2x}|^2)U_xV_x+2u_{1x}v_{2x}(a''(\eta_2)(u_{1x}+u_{2x}))U_xV_x]\mathrm{d}x\mathrm{d}t。$$

考虑 I_{32}，由注 1 及嵌入定理有

$$\|u_{1x}+u_{2x}\|_\infty,\ \|v_{2x}\|_\infty\leqslant C,$$

则

$$|I_{32}|\leqslant\int_t^T\int_0^l\frac{\delta}{4}V_x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\int_t^T\int_0^l CU_x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t。\tag{21}$$

考虑 I_{31}与 I_{41}，合并可得

$$\begin{aligned}I_{31}+I_{41}&=\int_t^T\int_0^l[a(|u_{1x}|^2)V_x^2+2u_{1x}a'(|u_{1x}|^2)V_x^2]\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\&=\int_t^T\int_0^l[a(0)+a'(\eta_3)|u_{1x}|^2+2u_{1x}a'(|u_{1x}|^2)]V_x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\&\geqslant\int_t^T\int_0^l[a(0)+\underline{a}\,|u_{1x}|^2+2u_{1x}a'(|u_{1x}|^2)]V_x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t,\end{aligned}\tag{22}$$

其中 η_3 介于 0 与$|u_{1x}|^2$ 之间。

对于式(22)括号内后两项，有

$$\begin{aligned}&\int_t^T\int_0^l \underline{a}\left[|u_{1x}|^2+\frac{2}{\underline{a}}u_{1x}a'(|u_{1x}|^2)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\ \geqslant&\int_t^T\int_0^l \underline{a}\left[(u_{1x}+\frac{1}{\underline{a}}a'(|u_{1x}|^2))^2-\frac{1}{\underline{a}^2}(a'(|u_{1x}|^2))^2\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\ \geqslant&\int_t^T\int_0^l -\frac{1}{\underline{a}}(a'(|u_{1x}|^2))^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t\geqslant\int_t^T\int_0^l -\frac{1}{\underline{a}}\overline{a}^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t。\end{aligned}$$

将结果代入式(22)中,结合条件(A_3)有

$$I_{31}+I_{41}=\int_t^T\int_0^l\left(a(0)-\frac{1}{\underline{a}}\overline{a}^2\right)V_x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t\geqslant\int_t^T\int_0^l\delta V_x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t。\tag{23}$$

考虑 I_{42},其中 I_{42} 与 I_{32} 类似,结合条件(A_4)有

$$\begin{aligned}|I_{42}|=&\left|\int_t^T\int_0^l[2v_{2x}a'(|u_{2x}|^2)U_xV_x+2u_{1x}v_{2x}(a''(\eta_2)(u_{1x}+u_{2x}))U_xV_x]\mathrm{d}x\mathrm{d}t\right|\\ \leqslant&\int_t^T\int_0^l\left[CU_x^2+\frac{\delta}{4}V_x^2\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}t。\end{aligned}\tag{24}$$

由式(21)、(23)、(24),对于方程(12)的 I_3、I_4 有

$$\begin{aligned}\int_t^T\int_0^l I'V\mathrm{d}x\mathrm{d}t=&\int_t^T\int_0^l(I_3+I_4)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\ \geqslant&\int_t^T\int_0^l\delta V_x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\int_t^T\int_0^l(I_{32}+I_{42})\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\ \geqslant&\int_t^T\int_0^l\delta V_x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t-\int_t^T\int_0^l|I_{32}|+|I_{42}|\mathrm{d}x\mathrm{d}t。\end{aligned}\tag{25}$$

对方程(12)两边其余项同乘 V 并积分,有

$$\int_t^T\int_0^l-\left(\frac{V^2}{2}\right)_t\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\int_t^T\int_0^l I'V\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\int_t^T\int_0^l h_1V^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t=-\int_t^T\int_0^l Hv_2V\mathrm{d}x\mathrm{d}t。\tag{26}$$

对式(26)分部积分,可得

$$\begin{aligned}&\int_0^l\frac{V^2}{2}\bigg|_{(x,t)}\mathrm{d}x+\int_t^T\int_0^l I'V\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\int_t^T\int_0^l h_1V^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\ \leqslant&\int_0^l|U(x,T)|^2\mathrm{d}x+\int_0^l|g_1-g_2|^2\mathrm{d}x-\int_t^T\int_0^l Hv_2V\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\ \leqslant&\int_0^l|U(x,T)|^2\mathrm{d}x+\int_0^l|g_1-g_2|^2\mathrm{d}x+\int_t^T\int_0^l\frac{V^2}{2}\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\ &+\frac{1}{2}(\max|H|)^2\int_t^T\int_0^l|v_2|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t。\end{aligned}$$

由式(21)、(24)、(25)及引理 3 可得

$$\begin{aligned}\int_0^l\frac{V^2}{2}\bigg|_{(x,t)}\mathrm{d}x+\delta\int_0^T\int_0^l V_x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t\leqslant&\int_t^T\int_0^l\frac{V^2}{2}\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\int_t^T\int_0^l\frac{\delta}{2}V_x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\int_0^l|g_1-g_2|^2\mathrm{d}x\\ &+C(\max|H|)^2\int_0^T\int_0^l(|u_2|^2+|v_2|^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}t。\end{aligned}$$

由 Gronwall 不等式,可得到

$$\max_{0\leqslant t\leqslant T}\int_0^l V^2\mathrm{d}x+C\int_0^T\int_0^l V_x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t\leqslant C(\max|H|)^2\int_0^T\int_0^l(|u_2|^2+|v_2|^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}t+C\int_0^l|g_1-g_2|^2\mathrm{d}x。$$

证毕。

定理 4　设 $h_1(x)$、$h_2(x)$ 为最优控制问题对应 $g_1(x)$、$g_2(x)$ 的极小元。如果存在一点$x_0\in(0,l)$,使得

$$h_1(x_0)=h_2(x_0),$$

则当 T 比较小时,有

$$\max_{x\in[0,l]}|h_1-h_2|\leqslant\frac{Cl^{\frac{1}{3}}}{N^{\frac{1}{3}}}\|g_1-g_2\|_{L^2(0,1)},$$

其中常数 C 与 T、l、N 无关。

证明　在式(7)中，当 $h=h_1$ 时，令 $q=h_2$；当 $h=h_2$ 时，令 $q=h_1$，有

$$\int_0^T\int_0^l u_1v_1(h_1-h_2)\mathrm{d}x\mathrm{d}t-N\int_0^l (h_1)_x\cdot(h_1-h_2)_x\mathrm{d}x\geqslant 0, \tag{27}$$

$$\int_0^T\int_0^l u_2v_2(h_2-h_1)\mathrm{d}x\mathrm{d}t-N\int_0^l (h_2)_x\cdot(h_2-h_1)_x\mathrm{d}x\geqslant 0, \tag{28}$$

其中，$\{u_i,v_i\}(i=1,2)$ 分别是 $q=q_i(i=1,2)$ 时的解。

由式(27)、(28)可得

$$\begin{aligned} N\int_0^l |(h_2-h_1)_x|^2\mathrm{d}x &\leqslant \int_0^T\int_0^l (u_1v_1-u_2v_2)(h_1-h_2)\mathrm{d}x\mathrm{d}t \\ &\leqslant \int_0^T\int_0^l (u_1v_1-u_2v_1+u_2v_1-u_2v_2)(h_1-h_2)\mathrm{d}x\mathrm{d}t \\ &\leqslant \int_0^T\int_0^l Hv_1U\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\int_0^T\int_0^l Hu_2V\mathrm{d}x\mathrm{d}t。\end{aligned} \tag{29}$$

由定理的假设知，存在一点 $x_0(0,l)$ 使得

$$H(x_0)=h_1(x_0)-h_2(x_0)=0。 \tag{30}$$

由式(30)以及 Hölder 不等式，当 $0\leqslant x\leqslant l$，有

$$\begin{aligned} \max_{x\in[0,l]}|H(x)| &\leqslant |H(x_0)|+\left|\int_0^l H'\mathrm{d}x\right| \\ &\leqslant |H(x_0)|+\left(\int_0^l\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\int_0^l |H_x|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leqslant \sqrt{l}\left(\int_0^l |H_x|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}。\end{aligned} \tag{31}$$

由式(29)、(31)以及 Young 不等式，有

$$\begin{aligned} \max|H|^2 &\leqslant l\int_0^l |H_x|^2\mathrm{d}x \\ &\leqslant \frac{l}{N}\int_0^T\int_0^l H(Uv_1+Vu_2)\mathrm{d}x\mathrm{d}t \\ &\leqslant \frac{1}{2l}\int_0^l |H|^2\mathrm{d}x+\frac{Tl^2}{2N^2}\int_0^T\int_0^l |Uv_1+Vu_2|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t \\ &\leqslant \frac{1}{2}\max|H|^2+\frac{Tl^2}{N^2}\left(\max_Q|v_1|^2\int_0^T\int_0^l U^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\max_Q|u_2|^2\int_0^T\int_0^l V^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t\right) \\ &\leqslant \frac{1}{2}\max|H|^2+C\frac{T^2l^2}{N^2}\max_Q|v_1|^2\left(\int_0^T\int_0^l |u_2|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t\right)\cdot\max|H|^2 \\ &\quad +C\frac{T^2l^2}{N^2}\max_Q|u_2|^2\left(\int_0^T\int_0^l (|u_2|^2+|v_2|^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\right)\cdot\max|H|^2 \\ &\quad +C\frac{T^2l^2}{N^2}\int_0^l |g_1-g_2|^2\mathrm{d}x。\end{aligned}$$

这里用到了引理 3 和引理 4。

由引理 1、2，有

$$\max_Q|v_1|,\ \max_Q|v_2|,\ \max_Q|u_2|\leqslant C。$$

且

$$\max|H|^2\leqslant C\frac{T^3l^2}{N^2}\max|H|^2+C\frac{T^2l^2}{N^2}\int_0^l |g_1-g_2|^2\mathrm{d}x, \tag{32}$$

选取 T 充分小，使得

$$C\frac{T^3l^2}{N^2}=\frac{1}{2}, \tag{33}$$

结合式(32)、(33)，可得

$$\max_{x\in[0,l]}|h_1-h_2|\leqslant\frac{Cl^{\frac{1}{3}}}{N^{\frac{1}{3}}}\|g_1-g_2\|_{L^2(0,1)}。$$

证毕。

5 结论

本文研究了一类利用附加条件重构的带有变系数的非线性抛物型方程辐射系数的反问题。基于最优控制理论,将反问题转化为优化问题并建立代价泛函极小值的存在性;接着讨论极小值的必要条件,以及证明后续极小值的唯一性和稳定性的必要方程;最后在假设终端时刻值较小的情况下,证得极小值的唯一性和稳定性。目前的工作仅考虑一维和齐次边界条件的情况,未来将考虑高维以及可能出现的非齐次和非线性边界条件等更为复杂的情况。

参考文献:

[1] CHEN Q, LIU J J. Solving an inverse parabolic problem by optimization from final measurement data[J]. Journal of Computational & Applied Mathematics, 2006, 193(1):183-203.

[2] 杜乐,杨柳,张涛. 热传导方程的非线性传热定律识别问题[J]. 山东大学学报(理学版),2024,59(8):56-66.
DU Le, YANG Liu, ZHANG Tao. Identification of nonlinear heat transfer law of heat conduction equation[J]. Journal of Shandong University (Natural Science), 2024, 59(8):56-66.

[3] 姜礼尚,陈亚浙,刘西垣,等. 数学物理方程讲义[M]. 3版. 北京:高等教育出版社,2007:135-140.
JIANG Lishang, CHEN Yazhe, LIU Xiyuan, et al. Lecture notes on mathematical and physical equations[M]. 3rd ed. Beijing: Higher Education Press, 2007:135-140.

[4] ISAKOV V. Inverse problems for partial differential equations[M]. 3rd ed. Berlin: Springer Verlag, 2017:166-180.

[5] KIRSCH A. An introduction to the mathematical theory of inverse problems[M]. 1st ed. New York: Springer, 2011:85-93.

[6] TIKHONOV A, ARSENIN V. Solutions of ill posed problems[M]. 1st ed. Washington D.C.: Winston, 1977:49-64.

[7] BECK J V, CLAIR C R S, BLACKWELL B. Inverse heat conduction[M]. New York: Springer, 1985:85-102.

[8] DUCHATEAU P, THELWELL R, BUTTERS G. Analysis of anadjoint problem approach to the identification of an unknown diffusion coefficient[J]. Inverse Problems, 2004, 20(2):601-625.

[9] LIU Z H, LI J, LI Z W. Regularization method with two parameters for nonlinear ill-posed problems[J]. Science in China Series A: Mathematics, 2008, 51(1):70-78.

[10] LIU Z H, ZOU J Z. Strong convergence results for hemivariational inequalities[J]. Science in China, Series A, Mathematics, 2006, 49(7):893-901.

[11] HASANOGLU HASANOV A. Computational material diagnostics based on limited boundary measurements: an inversion method for identification ofelastoplastic properties from indentation tests[M] // Systems Modeling and Simulation. Tokyo: Springer, 2007:11-15.

[12] KACHANOV L M. Fundamentals of the theory of plasticity dover books on engineering[M]. 1st ed. New York: Dower Publications, 2004:53-69.

[13] YANG L, YU J N, DENG Z C. An inverse problem of identifying the coefficient of parabolic equation[J]. Applied Mathematical Modelling, 2008, 32(10):1984-1995.

[14] RUNDELL W. The determination of a parabolic equation from initial and final data[J]. Proceedings of the American Mathematical Society, 1987, 99(4):637-642.

[15] 张涛,杜乐,邓醉茶. 基于终端观测条件反演非线性抛物型方程的辐射系数[J]. 兰州交通大学学报,2024,43(2):155-162.
ZHANG Tao, DU Le, DENG Zuicha. Inversion of radiation coefficient in nonlinear parabolic equation based on terminal observation condition[J]. Journal of Lanzhou Jiaotong University, 2024, 43(2):155-162.

[16] 伍卓群. 椭圆与抛物型方程引论[M]. 北京:科学出版社,2003:51-72.
WU Zhuoqun. Introduction to elliptic and parabolic equations[M]. Beijing: Science Press, 2003:51-72.

[17] DENG Z C, YANG L. An inverse problem of identifying theradiative coefficient in a degenerate parabolic equation[J]. Chinese Annals of Mathematics, Series B, 2014, 35(3):355-382.

(编辑:胡春燕)