山东大学学报(理学版)2026 年 1 月 第 61 卷 第 1 期
*Journal of Shandong University*(*Natural Science*), Vol.61, No.1, 2026 http://lxbwk.njournal.sdu.edu.cn

**文章编号**:1671-9352(2026)01-0085-09 DOI:10.6040/j.issn.1671-9352.0.2024.035

# 基于二型模糊预序的模糊粗糙集模型

张光旭[1],姚卫[2]
(1.南京工程学院数理学院, 江苏 南京 211167; 2.南京信息工程大学数学与统计学院, 江苏 南京 210044)

**摘要**:以二型模糊预序为基本结构研究了模糊粗糙集,定义一对模糊上下近似算子,并研究它们的性质和相互关系,证明上可定义集和下可定义集是等价的,上可定义集和下可定义集构成一个满层的 Alexandrov 模糊拓扑。
**关键词**:二型模糊预序;模糊粗糙集;模糊近似算子;可定义集;Alexandrov 模糊拓扑
**中图分类号**:O181 **文献标志码**:A
**引用格式**:张光旭,姚卫. 基于二型模糊预序的模糊粗糙集模型[J]. 山东大学学报(理学版),2026,61(1):85-93.

# Fuzzy rough set model based on type-2 fuzzy preorders

ZHANG Guangxu[1], YAO Wei[2]
(1. School of Mathematics and Physics, Nanjing Institute of Technology, Nanjing 211167, Jiangsu, China; 2. School of Mathematics and Statistics, Nanjing University of Information Science and Technology, Nanjing 210044, Jiangsu, China)

**Abstract**: Based on the fundamental structure of type-2 fuzzy preorders, fuzzy rough sets are investigated, and a pair of fuzzy upper and lower approximation operators are defined. Furthermore, their properties and interrelations are explored. It is shown that upper definable sets and lower definable sets are equivalent. Definable sets form a stratified Alexandrov fuzzy topology such that the upper and lower approximation operators are the related closure and interior operators respectively.
**Key words**: type-2 fuzzy preorder; fuzzy rough set; fuzzy upper/lower approximation operator; definable set; Alexandrov fuzzy topology

## 0 引言

波兰数学家 Pawlak 于 1982 年提出粗糙集的概念[1],粗糙集理论和方法已广泛应用于过程控制、经济学、医学诊断、生物化学、环境科学、心理学等领域[2-3]。

粗糙集的一个起源为分类问题,等价关系是不可分辨关系中最简单的形式。然而,经典粗糙集理论并不能很好地解决现实世界中信息表的粒度问题,因此学者们提出基于容差关系[4-5]和相似关系[6]的粗糙集模型,统称为关系型粗糙集。除了关系型粗糙集之外,利用覆盖和邻域系统/算子获得粗糙集模型[7-8]。在集值分析环境中,邻域系统/算子总是与覆盖相关联。覆盖是划分的一般推广,其中每个成员都可以被视为等价类的抽象,在某种意义上也可以看作是一个多重关系系统。基于覆盖的粗糙集和基于邻域系统/算子的粗糙集实际上都是基于粒度的方法,该方法将论域中的离散点组合成颗粒,然后用颗粒描述粗糙性。然而,上述推广不再等价,因此产生了不同的粗糙集模型的推广。

现实世界充满了各种不确定性,包括模糊性、粗糙性和随机性等[9]。分类是对满足要求的数据集的一个划分,它与数据集的一个等价关系相联系。而等价关系的严格性会导致数据的极端离散化,使得一些有用的信息可能丢失,这时需要用程度的观点考虑元素之间的关系,由此 Dubois 等[10]引入模糊化的方法扩展经

**收稿日期**:2024-01-29; **网络出版时间**:2025-04-09
**基金项目**:国家自然科学基金资助项目(12371462,12231007); 南京工程学院引进人才科研启动基金资助项目(YKJ202351); 江苏省双创人才计划(JSSCRC2021521); 黑龙江省自然科学基金联合基金重点项目(ZL2024A001)
**第一作者**:张光旭(1995— ),女,讲师,博士,研究方向为模糊集理论及应用. E-mail:hbgxzhang@163.com

典粗糙集模型。在关系型模糊粗糙集理论框架下,研究者们提出并研究了多种近似算子的模糊推广。文献[11-12]中将单位区间[0,1]作为取值格,提出多种类型的模糊粗糙集,给出模糊粗糙近似算子的公理刻画。然而,在偏序和多维情境中,单位区间[0,1]一般不能用作取值格,文献[13-15]中使用完备剩余格 $L$ 研究 $L$-模糊粗糙近似算子。在覆盖型模糊粗糙集框架下,文献[16-18]中利用论域的模糊子集族定义模糊覆盖的概念,构造上下粗糙近似算子。正如经典情形一样,模糊邻域系统也与模糊覆盖密切相关,例如,文献[19]中引入基于给定模糊覆盖的模糊邻域系统的概念,以及模糊最小和最大描述的概念,定义并研究 16 种不同的模糊邻域算子。除上述方法外,基于半度量的模糊粗糙集[20-21]是一种新的模糊粗糙集模型,在模糊聚类分析和图像处理中具有潜在的应用前景。

半度量是一种非对称的距离函数,该函数允许 2 个不同点之间的距离为零[22];模糊预序可以看作是一种非对称的模糊相似度[23]。在文献[24]中引入二型模糊预序(二型 $L$-预序)的概念,其中 $L$ 是一个完备剩余格。二型 $L$-预序是模糊预序和半度量的共同推广,$L$-预序与二型 $L$-预序有两种相互诱导的方式。文献[24]还包含了不同类型的模糊度量作为自然的例子,其中包括 Morsi 模糊半度量、KM-模糊半度量和模半度量[25-26]。把距离函数(即度量)纳入离散数学中,它可以看作相似度的对立面:两个对象之间的距离越小,它们就越相似;相反,距离越大,它们的差别越大。也就是说,度量可提供一种定量的工具,描述意义相反的相似关系。与现有的模糊粗糙集模型的基本结构相比,度量可作为经典二元关系的一种量化扩展结构,能够更精确更合理地描述对象之间的差异和联系,而二型模糊预序将半度量和模糊预序统一在同个框架中,基于二型模糊预序的模糊粗糙集模型为复杂问题的解决提供更有效的综合数学方法。

本文构造一个基于二型模糊预序的模糊粗糙集模型,提出一种基于半度量和模糊预序的粗糙集模型的通用框架。使用二型模糊预序作为基本结构定义和研究模糊粗糙集,定义一对模糊上下近似算子,并且研究它们的性质和相互关系,然后证明上可定义集和下可定义集的等价关系以及它们可以构成一个满层的 Alexandrov模糊拓扑。

## 1 预备知识

**定义 1** 设 $T:[0,1]\times[0,1]\to[0,1]$ 是[0,1]上的二元函数,则称 $T$ 为[0,1]上的三角模,简称为三角模(以下简称 $t$ 模),若对于任意的 $x,y,z\in[0,1]$,$T$ 满足

(1) $T(x,y)=T(y,x)$;

(2) $T(x,T(y,z))=T(T(x,y),z)$;

(3) 当 $y\leqslant z$ 时,有 $T(x,y)=T(x,z)$;

(4) $T(x,1)=x$。

当 $T$ 在$[0,1]^2$ 上左连续时,称 $T$ 为左连续 $t$ 模。

运算 $*$ 为一个左连续 $t$ 模并等价地表述为,对于任意的 $x\in[0,1]$以及 $S\subseteq[0,1]$, $x*(\vee S)=\bigvee_{s\in S}(x*s)$。该运算还可以等价地表述为,存在一个蕴含算子$\to:[0,1]\times[0,1]\to[0,1]$,使得对于任意的 $x,y,z\in[0,1]$, $x*y\leqslant z$当且仅当 $x\leqslant y\to z$。

左连续 $t$ 模有很多例子,例如,

(1) 取小 $t$ 模 $\wedge:x\wedge y=\min\{x,y\}$;

(2) 乘积 $t$ 模$*_p:x*_p y=x\cdot y$;

(3) Lukasiewicz $t$ 模 $*_{\mathrm{Lu}}:x*_{\mathrm{Lu}}y=\max\{x+y-1,0\}$。

**定义 2**[24] 设 $X$ 是一个非空集合,$*$ 为一个左连续 $t$ 模,则称 $E$ 为一个二型模糊预序,称序对$(X,E)$为一个二型模糊预序集,若映射 $E:X\times X\times[0,1]\to[0,1]$满足:

(M1) 对于任意的 $x,y\in X$ 和 $t\in[0,1]$, $E(x,y,0)=E(x,x,t)=1$;

(M2) 对于任意的 $x,y,z\in X$ 和 $s,t\in[0,1]$, $E(x,y,s)*E(y,z,t)\leqslant E(x,z,s*t)$。

**例 1**[27] 设 $X$ 是一个非空集合,则称 $e$ 为一个模糊预序, 若映射 $e:X\times X\to[0,1]$满足:

(E1) 对于任意的 $x\in X$, $e(x,x)=1$;

(E2) 对于任意的 $x,y,z\in X$, $e(x,y)*e(y,z)\leqslant e(x,z)$。

对于任意的 $x,y\in X$ 和 $r\in[0,1]$,定义 $E^e:X\times X\times[0,1]\to[0,1]$ 为

$$E^e(x,y,r)=r\to e(x,y),$$

则 $E^e$ 是一个二型模糊预序。

**证明**　设 $x,y,z\in X$, $s,t\in[0,1]$,

(M1) $E^e(x,y,0)=0\to e(x,y)=1$;

$E^e(x,x,t)=t\to e(x,x)=t\to 1=1$。

(M2)

$$\begin{aligned}&E^e(x,y,s)*E^e(y,z,t)\\=&[s\to e(x,y)]*[t\to e(y,z)]\\\leqslant&(s*t)\to[e(x,y)*e(y,z)]\\\leqslant&(s*t)\to e(x,z)\\=&E^e(x,z,s*t),\end{aligned}$$

则 $E^e(x,y,s)*E^e(y,z,t)\leqslant E^e(x,z,s*t)$。综上,$E^e$ 是一个二型模糊预序。

设 $*$ 是 $t$ 模,若对于任意的 $a,b\in[0,1]$ 且 $a\leqslant b$ 时,存在 $c\in[0,1]$,使得 $a=b*c$,或等价地,$*:[0,1]\times[0,1]\to[0,1]$ 是一个连续函数,则称 $*$ 是可除的[28]。

**命题 1**　设 $(X,E)$ 是一个二型模糊预序集,若 $*$ 是一个可除的 $t$ 模,则对于任意的 $x,y\in X$, $E(x,y,-)$ 是单调递减函数。

**证明**　设 $x,y\in X$ 且 $s,t\in[0,1]$,若 $s\leqslant t$,通过 $*$ 的可除性,存在 $r\in[0,1]$,使得 $s=t*r$。那么

$$E(x,y,s)=E(x,y,t*r)\geqslant E(x,y,t)*E(y,y,r)=E(x,y,t)*1=E(x,y,t)。$$

**定义 3**[29]　论域 $X$ 上的模糊集合(或称模糊子集)$A$ 是 $X$ 到 $[0,1]$ 的一个映射(称为隶属函数)

$$\mu_A:X\to[0,1]。$$

对于 $x\in X$,称 $\mu_A(x)$ 为对于 $A$ 的隶属度。

对于 $a\in[0,1]$,记 $a_X$ 为恒取 $a$ 的常值模糊子集,并且记 $\mathscr{F}(X)$ 为 $X$ 的模糊子集族的全体。对于 $\{A_i\mid i\in I\}\subseteq\mathscr{F}(X)$,则 $(\bigvee_i A_i)(x)=\sup\{A_i(x)\mid i\in I\}$, $(\bigwedge_i A_i)(x)=\inf\{A_i(x)\mid i\in I\}$。

## 2　二型模糊预序诱导的模糊粗糙集模型

本章将根据二型模糊预序集构造一对模糊粗糙近似算子,并研究它们的性质和内在关系。

**定义 4**　设 $(X,E)$ 是一个二型模糊预序集,定义上近似算子 $\overline{\mathrm{Apr}}_E$ 与下近似算子 $\underline{\mathrm{Apr}}_E:\mathscr{F}(X)\to\mathscr{F}(X)$ 为:对于任意的 $A\in\mathscr{F}(X)$ 和 $x\in X$,

$$\overline{\mathrm{Apr}}_E(A)(x)=\bigvee_{y\in X}\bigvee_{t\in[0,1]}A(y)*E(y,x,t)*t;$$

$$\underline{\mathrm{Apr}}_E(A)(x)=\bigwedge_{y\in X}\bigwedge_{t\in[0,1]}(E(x,y,t)*t)\to A(y)。$$

分别称算子 $\overline{\mathrm{Apr}}_E$, $\underline{\mathrm{Apr}}_E:\mathscr{F}(X)\to\mathscr{F}(X)$ 为由二型模糊预序 $E$ 诱导的模糊上粗糙近似算子和模糊下粗糙近似算子。

$E(x,y,t)$ 的值可以理解为 $x$ 与 $y$ 的相似度大于等于 $t$ 的程度。由于二型模糊预序集 $E$ 不必满足对称性,我们需要注意,在模糊上下近似算子的定义中,$x,y$ 不能更改为同一顺序。接下来我们研究模糊上下粗糙近似算子的性质。

**定理 1**　设 $(X,E)$ 是一个二型模糊预序集,则对于任意的 $A\in\mathscr{F}(X)$, $a\in[0,1]$ 和 $\{A_i\mid i\in I\}\subseteq\mathscr{F}(X)$,有

(U1) $A\leqslant\overline{\mathrm{Apr}}_E(A)\leqslant 1_X$;

(U2) $\overline{\mathrm{Apr}}_E(a_X)=a_X$;

(U3) $\overline{\mathrm{Apr}}_E(\bigvee_i A_i)=\bigvee_i \overline{\mathrm{Apr}}_E(A_i)$;

(U4) $\overline{\mathrm{Apr}}_E(\overline{\mathrm{Apr}}_E(A))=\overline{\mathrm{Apr}}_E(A)$;

(U5) $\overline{\mathrm{Apr}}_E(a*A)=a*\overline{\mathrm{Apr}}_E(A)$。

**证明** (U1) 显然,$\overline{\mathrm{Apr}}_E(A)\leqslant 1_X$。对于任意的 $x\in X$,

$$\begin{aligned}&\overline{\mathrm{Apr}}_E(A)(x)\\ =&\bigvee_{y\in X}\bigvee_{t\in[0,1]}A(y)*E(y,x,t)*t\\ \geqslant&\bigvee_{t\in[0,1]}A(x)*E(x,x,t)*t\\ =&\bigvee_{t\in[0,1]}A(x)*1*t\\ =&A(x)*\bigvee_{t\in[0,1]}t\\ =&A(x),\end{aligned}$$

因此,$A\leqslant\overline{\mathrm{Apr}}_E(A)\leqslant 1_X$。

(U2) 对于任意的 $x\in X$, $\bigvee_{y\in X}\bigvee_{t\in[0,1]}E(y,x,t)*t\geqslant\bigvee_{t\in[0,1]}E(x,x,t)*t=\bigvee_{t\in[0,1]}1*t=1$,从而

$$\begin{aligned}&\overline{\mathrm{Apr}}_E(a_X)(x)\\ =&\bigvee_{y\in X}\bigvee_{t\in[0,1]}a*E(y,x,t)*t\\ =&a*\Big[\bigvee_{y\in X}\bigvee_{t\in[0,1]}E(y,x,t)*t\Big]\\ =&a*1\\ =&a,\end{aligned}$$

因此,$\overline{\mathrm{Apr}}_E(a_X)=a_X$。

(U3) 对于任意的 $x\in X$,

$$\begin{aligned}&\overline{\mathrm{Apr}}_E(\bigvee_i A_i)(x)\\ =&\bigvee_{y\in X}\bigvee_{t\in[0,1]}(\bigvee_i A_i)(y)*E(y,x,t)*t\\ =&\bigvee_i\bigvee_{y\in X}\bigvee_{t\in[0,1]}A_i(y)*E(y,x,t)*t\\ =&\bigvee_i\overline{\mathrm{Apr}}_E(A_i)(x),\end{aligned}$$

因此,$\overline{\mathrm{Apr}}_E(\bigvee_i A_i)=\bigvee_i\overline{\mathrm{Apr}}_E(A_i)$。

(U4) 由(U1)可知$\overline{\mathrm{Apr}}_E(A)\leqslant\overline{\mathrm{Apr}}_E(\overline{\mathrm{Apr}}_E(A))$。对于任意的 $x\in X$,

$$\begin{aligned}&\overline{\mathrm{Apr}}_E(\overline{\mathrm{Apr}}_E(A))(x)\\ =&\bigvee_{y\in X}\bigvee_{s\in[0,1]}\overline{\mathrm{Apr}}_E(A)*E(y,x,s)*s\\ =&\bigvee_{y\in X}\bigvee_{s\in[0,1]}\bigvee_{z\in X}\bigvee_{t\in[0,1]}A(z)*E(z,y,t)*t*E(y,x,s)*s\\ =&\bigvee_{y,z\in X}\bigvee_{s,t\in[0,1]}A(z)*E(z,y,t)*E(y,x,s)*s*t\\ \leqslant&\bigvee_{z\in X}\bigvee_{s,t\in[0,1]}A(z)*E(z,x,s*t)*(s*t)\\ \leqslant&\bigvee_{z\in X}\bigvee_{m\in[0,1]}A(z)*E(z,x,m)*m\\ =&\overline{\mathrm{Apr}}_E(A)(x),\end{aligned}$$

因此,$\overline{\mathrm{Apr}}_E(\overline{\mathrm{Apr}}_E(A))=\overline{\mathrm{Apr}}_E(A)$。

(U5) 由运算 $a*(-)$ 的保并性易得。

**定理 2** 设$(X,E)$是一个二型模糊预序集,则对于任意的 $A\in\mathscr{F}(X)$, $a\in[0,1]$和$\{A_i\mid i\in I\}\subseteq\mathscr{F}(X)$,有

(L1) $0_X \leqslant \underline{\mathrm{Apr}}_E(A) \leqslant A$;

(L2) $\underline{\mathrm{Apr}}_E(a_X) = a_X$;

(L3) $\underline{\mathrm{Apr}}_E(\wedge_i A_i) = \wedge_i \underline{\mathrm{Apr}}_E(A_i)$;

(L4) $\underline{\mathrm{Apr}}_E(\underline{\mathrm{Apr}}_E(A)) = \underline{\mathrm{Apr}}_E(A)$;

(L5) $\underline{\mathrm{Apr}}_E(a \to A) = a \to \underline{\mathrm{Apr}}_E(A)$。

**证明**　(L1) 显然,$0_X \leqslant \underline{\mathrm{Apr}}_E(A)$。对于任意的 $x \in X$,

$$\begin{aligned}
&\underline{\mathrm{Apr}}_E(A)(x)\\
&= \bigwedge_{y\in X}\bigwedge_{t\in[0,1]}(E(x,y,t)*t) \to A(y)\\
&\leqslant \bigwedge_{t\in[0,1]}(E(x,x,t)*t) \to A(x)\\
&= \bigwedge_{t\in[0,1]}(1*t) \to A(x)\\
&= (\bigvee_{t\in[0,1]} t) \to A(x)\\
&= 1 \to A(x)\\
&= A(x),
\end{aligned}$$

因此,$0_X \leqslant \underline{\mathrm{Apr}}_E(A) \leqslant A$。

(L2) 对于任意的 $x \in X$, $\bigvee_{y\in X}\bigvee_{t\in[0,1]} E(x,y,t)*t \geqslant \bigvee_{t\in[0,1]} E(x,x,t)*t = \bigvee_{t\in[0,1]} 1*t = 1$,从而,

$$\begin{aligned}
&\underline{\mathrm{Apr}}_E(a_X)(x)\\
&= \bigwedge_{y\in X}\bigwedge_{t\in[0,1]}(E(x,y,t)*t) \to a\\
&= \bigwedge_{y\in X}\bigwedge_{t\in[0,1]}[(E(x,y,t)*t) \to a]\\
&= [\bigvee_{y\in X}\bigvee_{t\in[0,1]} E(x,y,t)*t] \to a\\
&= 1 \to a\\
&= a,
\end{aligned}$$

因此,$\underline{\mathrm{Apr}}_E(a_X) = a_X$。

(L3) 对于任意的 $x \in X$,

$$\begin{aligned}
&\underline{\mathrm{Apr}}_E(\wedge_i A_i)(x)\\
&= \bigwedge_{y\in X}\bigwedge_{t\in[0,1]}(E(x,y,t)*t) \to \wedge_i A_i(y)\\
&= \bigwedge_{y\in X}\bigwedge_{t\in[0,1]} \wedge_i (E(x,y,t)*t) \to A_i(y)\\
&= \wedge_i \bigwedge_{y\in X}\bigwedge_{t\in[0,1]}(E(x,y,t)*t) \to A_i(y)\\
&= \wedge_i \underline{\mathrm{Apr}}_E(A_i)(x),
\end{aligned}$$

因此,$\underline{\mathrm{Apr}}_E(\wedge_i A_i) = \wedge_i \underline{\mathrm{Apr}}_E(A_i)$。

(L4) 由(L1)可知$\underline{\mathrm{Apr}}_E(\underline{\mathrm{Apr}}_E(A)) \leqslant \underline{\mathrm{Apr}}_E(A)$。对于任意的 $x \in X$,

$$\begin{aligned}
&\underline{\mathrm{Apr}}_E(\underline{\mathrm{Apr}}_E(A))(x)\\
&= \bigwedge_{y\in X}\bigwedge_{s\in[0,1]}(E(x,y,s)*s) \to \underline{\mathrm{Apr}}_E(A)(y)\\
&= \bigwedge_{y\in X}\bigwedge_{s\in[0,1]}(E(x,y,s)*s) \to [\bigwedge_{z\in X}\bigwedge_{t\in[0,1]}(E(y,z,t)*t) \to A(z)]\\
&= \bigwedge_{y,z\in X}\bigwedge_{s,t\in[0,1]}[(E(x,y,s)*s)*(E(y,z,t)*t)] \to A(z)\\
&\geqslant \bigwedge_{z\in X}\bigwedge_{s,t\in[0,1]}(E(x,z,s*t)*(s*t)) \to A(z)\\
&\geqslant \bigwedge_{z\in X}\bigwedge_{m\in[0,1]}(E(x,z,m)*m) \to A(z)\\
&= \underline{\mathrm{Apr}}_E(A)(x),
\end{aligned}$$

因此,$\underline{\mathrm{Apr}}_E(\underline{\mathrm{Apr}}_E(A))=\underline{\mathrm{Apr}}_E(A)$。

(L5) 由运算 $a\to(-)$ 的保交性易得。

**定理 3** 设 $(X,E)$ 是一个二型模糊预序集,则对于任意的 $A\in\mathscr{F}(X)$,

(1) $\overline{\mathrm{Apr}}_E(\underline{\mathrm{Apr}}_E(A))=\underline{\mathrm{Apr}}_E(A)$;

(2) $\underline{\mathrm{Apr}}_E(\overline{\mathrm{Apr}}_E(A))=\overline{\mathrm{Apr}}_E(A)$。

**证明** (1) 根据(U1),仅需证明 $\overline{\mathrm{Apr}}_E(\underline{\mathrm{Apr}}_E(A))\leqslant\underline{\mathrm{Apr}}_E(A)$。设 $x\in X$,则

$$\begin{aligned}&\overline{\mathrm{Apr}}_E(\underline{\mathrm{Apr}}_E(A))(x)\\&=\bigvee_{y\in X}\bigvee_{t\in[0,1]}\underline{\mathrm{Apr}}_E(A)(y)*E(y,x,t)*t\\&=\bigvee_{y\in X}\bigvee_{t\in[0,1]}\Big[\bigwedge_{p\in X}\bigwedge_{s\in[0,1]}E(y,p,s)*s\to A(p)\Big]*E(y,x,t)*t。\end{aligned}$$

需证

$$\begin{aligned}&\bigvee_{y\in X}\bigvee_{t\in[0,1]}\Big[\bigwedge_{p\in X}\bigwedge_{s\in[0,1]}E(y,p,s)*s\to A(p)\Big]*E(y,x,t)*t\\&\leqslant\bigwedge_{z\in X}\bigwedge_{r\in[0,1]}[E(x,z,r)*r]\to A(z),\end{aligned}$$

或等价地,对于任意的 $y,z\in X$ 和 $r,t\in[0,1]$,

$$\Big[\bigwedge_{p\in X}\bigwedge_{s\in[0,1]}[E(y,p,s)*s\to A(p)]*E(y,x,t)*t*[E(x,z,r)*r]\leqslant A(z)。$$

事实上,

$$\begin{aligned}&\Big[\bigwedge_{p\in X}\bigwedge_{s\in[0,1]}[E(y,p,s)*s\to A(p)]*E(y,x,t)*t*[E(x,z,r)*r]\\&\leqslant\Big[\bigwedge_{s\in[0,1]}E(y,z,s)*s\to A(z)\Big]*E(y,x,t)*t*[E(x,z,r)*r]\\&\leqslant[E(y,z,t*r)*(t*r)\to A(z)]*E(y,x,t)*t*[E(x,z,r)*r]\\&\leqslant[E(y,z,t*r)*(t*r)\to A(z)]*E(y,z,t*r)*(t*r)\\&\leqslant A(z),\end{aligned}$$

因此,$\overline{\mathrm{Apr}}_E(\underline{\mathrm{Apr}}_E(A))(x)=\underline{\mathrm{Apr}}_E(A)(x)$。

(2) 根据(L1),仅需证明 $\underline{\mathrm{Apr}}_E(\overline{\mathrm{Apr}}_E(A))\geqslant\overline{\mathrm{Apr}}_E(A)$。设 $x\in X$,则

$$\begin{aligned}&\underline{\mathrm{Apr}}_E(\overline{\mathrm{Apr}}_E(A))(x)\\&=\bigwedge_{y\in X}\bigwedge_{t\in[0,1]}(E(x,y,t)*t)\to\overline{\mathrm{Apr}}_E(A)(y)\\&=\bigwedge_{y\in X}\bigwedge_{t\in[0,1]}(E(x,y,t)*t)\to\Big[\bigvee_{p\in X}\bigvee_{s\in[0,1]}A(p)*E(p,y,s)*s\Big]。\end{aligned}$$

需要证明

$$\begin{aligned}&\bigwedge_{y\in X}\bigwedge_{t\in[0,1]}E(x,y,t)*t\to\Big[\bigvee_{p\in X}\bigvee_{s\in[0,1]}A(p)*E(p,y,s)*s\Big]\\&\geqslant\bigvee_{z\in X}\bigvee_{r\in[0,1]}A(z)*E(z,x,r)*r,\end{aligned}$$

或等价地,对于任意的 $y,z\in X$ 和 $r,t\in[0,1]$,

$$\bigvee_{p\in X}\bigvee_{s\in[0,1]}A(p)*E(p,y,s)*s\geqslant E(x,y,t)*t*A(z)*E(z,x,r)*r。$$

事实上,

$$\begin{aligned}&\bigvee_{p\in X}\bigvee_{s\in[0,1]}A(p)*E(p,y,s)*s\\&\geqslant\bigvee_{s\in[0,1]}A(z)*E(z,y,s)*s\\&\geqslant A(z)*E(z,y,t*r)*(t*r)\\&\geqslant E(x,y,t)*t*A(z)*E(z,x,r)*r,\end{aligned}$$

因此,$\underline{\mathrm{Apr}}_E(\overline{\mathrm{Apr}}_E(A))(x)=\overline{\mathrm{Apr}}_E(A)(x)$。

## 3 可定义模糊集

粗糙集理论的一个基本思想是通过特定的公式利用可定义集找到不可定义集的近似。在语义上,语言中的公式是概念的内涵,与公式相对应,将语言中的公式定义集赋给满足公式的对象集被看作是概念的外延。因此,如果一组对象是使用描述性语言的一个公式的本质含义的集合,那么它是可定义的,否则它是不可定义的;另一种解释是,一个公式的可定义集正是它的不动点,这些不动点由这个公式完全确定,它们构成近似空间的基本信息[30]。

设$(X,E)$是一个二型模糊预序集,对于$A\in\mathscr{F}(X)$,若$\overline{\mathrm{Apr}}_E(A)=A$($\underline{\mathrm{Apr}}_E(A)=A$),那么称$A$为上(下)可定义的。首先证明上可定义性和下可定义性是等价的。

**定理 4**　设$(X,E)$是一个二型模糊预序集,对于任意的$A\in\mathscr{F}(X)$,下列陈述是等价的:

(1) $A$是上可定义的;

(2) 对于任意的$x,y\in X$和$t\in[0,1]$, $E(x,y,t)*t\leqslant A(x)\to A(y)$;

(3) $A$是下可定义的。

**证明**　(1)⇔(2)。

$A$是上可定义的

$\Leftrightarrow \overline{\mathrm{Apr}}_E(A)\leqslant A$,

$\Leftrightarrow \forall y\in X,\ \bigvee\limits_{x\in X}\bigvee\limits_{t\in[0,1]} A(x)*E(x,y,t)*t\leqslant A(y)$,

$\Leftrightarrow \forall x,y\in X,\ \forall t\in[0,1],\ E(x,y,t)*t\leqslant A(x)\to A(y)$。

(2)⇔(3)。

$A$是下可定义的

$\Leftrightarrow A\leqslant \underline{\mathrm{Apr}}_E(A)$,

$\Leftrightarrow \forall x\in X,\ A(x)\leqslant \bigwedge\limits_{y\in X}\bigwedge\limits_{t\in[0,1]}[E(x,y,t)*t\to A(y)]$,

$\Leftrightarrow \forall x,y\in X,\ \forall t\in[0,1],\ E(x,y,t)*t\leqslant A(x)\to A(y)$。

若$A\in\mathscr{F}(X)$满足定理 4 的条件,则称$A$为$(X,E)$的可定义集,并使用$D\mathscr{F}(X)$来表示$(X,E)$的所有可定义集构成的集族。

注 1　(1) 设$(X,E)$是一个二型模糊预序集,$A\in\mathscr{F}(X)$,则$\overline{\mathrm{Apr}}_E(A)$是大于等于$A$的最小可定义集,$\underline{\mathrm{Apr}}_E(A)$是小于等于$A$的最大可定义集。

(2) 定理 3 可以被视为定理 4 的一个推论。由(U4)可知$\overline{\mathrm{Apr}}_E(A)$是可定义的,因此$\underline{\mathrm{Apr}}_E(\overline{\mathrm{Apr}}_E(A))=\overline{\mathrm{Apr}}_E(A)$;类似地,由(L4)可知$\underline{\mathrm{Apr}}_E(A)$是可定义的,因此$\overline{\mathrm{Apr}}_E(\underline{\mathrm{Apr}}_E(A))=\underline{\mathrm{Apr}}_E(A)$。

下面研究$D\mathscr{F}(X)$的拓扑性质。

**定理 5**　设$(X,E)$是一个二型模糊预序集,则集族$D\mathscr{F}(X)$是$X$上的一个满层的 Alexandrov 模糊拓扑,即

(DF1) $a_X\in D\mathscr{F}(X)$($\forall a\in[0,1]$);

(DF2) $\bigvee_i A_i,\ \bigwedge_i A_i\in D\mathscr{F}(X)$($\forall\{A_i\mid i\in I\}\subseteq D\mathscr{F}(X)$);

(DF3) $a*A,\ a\to A\in D\mathscr{F}(X)$($\forall a\in[0,1],\ A\in D\mathscr{F}(X)$)。

**证明**　将利用定理 4(2)进行证明。设$x,y\in X,\ t\in[0,1]$。

(DF1) 对于任意的$a\in[0,1]$,

$$a_X(x)\to a_X(y)=a\to a=1\geqslant E(x,y,t)*t。$$

因此,$a_X\in D\mathscr{F}(X)$。

(DF2) 对于任意的$\{A_i\mid i\in I\}\subseteq D\mathscr{F}(X)$,

$$(\bigvee_i A_i(x))\to(\bigvee_i A_i(y))\geqslant\bigwedge_i[A_i(x)\to A_i(y)]\geqslant E(x,y,t)*t;$$

$$(\bigwedge_i A_i(x))\to(\bigwedge_i A_i(y))\geqslant\bigwedge_i[A_i(x)\to A_i(y)]\geqslant E(x,y,t)*t。$$

因此, $\vee_i A_i$, $\wedge_i A_i \in D\mathscr{F}(X)$。

(DF3) 对于任意的 $a \in [0,1]$, $A \in D\mathscr{F}(X)$,

$$(a * A(x)) \to (a * A(y)) \geqslant A(x) \to A(y) \geqslant E(x,y,t) * t;$$

$$(a \to A(x)) \to (a \to A(y)) \geqslant A(x) \to A(y) \geqslant E(x,y,t) * t。$$

因此, $a * A$, $a \to A \in D\mathscr{F}(X)$。

注 2 集族 $D\mathscr{F}(X)$ 是一个模糊拓扑,且其内部算子和闭包算子恰好分别是模糊上粗糙近似算子和模糊下粗糙近似算子。

## 4 结论

包括模糊预序和模糊相似性在内的模糊关系是粗糙集理论的重要工具。半度量是一种非对称的距离函数,它提供一种定量的工具来描述意义相反的相似关系。作为半度量和模糊预序的一个共同推广,二型模糊预序被视为一种多值关系。本文构造了一个基于二型模糊预序的模糊粗糙集模型,提出了一种基于半度量和模糊预序的粗糙集模型通用框架。使用二型模糊预序作为基本结构来研究模糊粗糙集,定义了一对模糊上下近似算子,并且研究它们的性质和相互关系,证明了上可定义集和下可定义集的等价关系,并且上可定义集和下可定义集构成一个满层的 Alexandrov 模糊拓扑,该方法在数据挖掘和图像处理中具有潜在的应用前景[31]。

**参考文献:**


[1] PAWLAK Z. Rough sets[J]. International Journal of Computer and Information Sciences, 1982, 11(5):341-356.

[2] BELOHLAVEK R. Fuzzy relational systems: foundations and principles[M]. New York: Kluwer Academic Publishers, 2002: 1-5.

[3] 刘清,黄兆华,刘少辉,等. 带 Rough 算子的决策规则及数据挖掘中的软计算[J]. 计算机研究与发展,1999,36:800-804.
LIU Qing, HUANG Zhaohua, LIU Shaohui, et al. Decision rules with rough operator and soft computing of data mining[J]. Journal of Computer Research and Development, 1999, 36:800-804.

[4] CIUCCI D E, CATTANEO G. Algebraic structures for rough sets[J]. Transactions on Rough Sets II, 2004, 3135:208-252.

[5] SKOWRON A, STEPANIUK J. Tolerance approximation spaces[J]. Fundamenta Informaticae, 1996, 27(2/3):245-253.

[6] SLOWINSKI R, VANDERPOOTEN D. A generalized definition of rough approximations based onsimilarity[J]. IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering, 2000, 12(2):331-336.

[7] BONIKOWSKI Z, BRYNIARSKI E, WYBRANIEC-SKARDOWSKA U. Extensions and intentions in the rough settheory[J]. Information Sciences, 1998, 107(1/4):149-167.

[8] ZAKOWSKI W. Approximations in the space $(u,p)$[J]. Demonstratio Mathematica, 1983, 16(3):761-769.

[9] 米据生,吴伟志,张文修. 粗糙集的构造与公理化方法[J]. 模式识别与人工智能,2002,15(3):280-284.
MI Jusheng, WU Weizhi, ZHANG Wenxiu. Constructive and axiomatic approaches of the theory of rough sets[J]. Pattern Recognition and Artificial Intelligence, 2002, 15(3):280-284.

[10] DUBOIS D, PRADE H. Rough fuzzy sets and fuzzy roughsets[J]. International Journal of General Systems, 1990, 17(2/3): 191-209.

[11] LIU Guilong. The axiomatization of the rough set upper approximation operations[J]. Fundamenta Informaticae, 2006, 69(3):331-342.

[12] WU Weizhi, MI Jusheng, ZHANG Wenxiu. Generalized fuzzy rough sets[J]. Information Sciences, 2003, 151:263-282.

[13] RADZIKOWSKA A M. On lattice-based fuzzy rough sets[M]//CORNELIS C G, DESCHRIJVER M, NACHTEGAEL S, et al. Years of Fuzzy Set Theory. Berlin: Springer, 2010:107-126.

[14] RADZIKOWSKA A M, KERRE EE. Fuzzy rough sets based on residuated lattices[J]. Lecture Notes in Computer Science, 2005, 3135:278-296.

[15] SHE Yanhong, WANG Guojun. An axiomatic approach of fuzzy rough sets based on residuated lattices[J]. Computers and Mathematics with Applications, 2009, 58(1):189-201.

[16] DENG Tingquan, CHEN Yanmei, XU Wenli, et al. A novel approach to fuzzy rough sets based on a fuzzy covering[J]. Information Sciences, 2007, 177(11):2308-2326.

[17] FENG Tao, ZHANG Shaopu, MI Jusheng. The reduction and fusion of fuzzy covering systems based on the evidence theory

[J]. International Journal of Approximate Reasoning, 2012, 53(1):87-103.
[18] LI T J, LEUNG Y, ZHANG W X. Generalized fuzzy rough approximation operators based on fuzzy coverings[J]. International Journal of Approximate Reasoning, 2008, 48(3):836-856.
[19] D'EER L, CORNELIS C, GODO L. Fuzzy neighborhood operators based on fuzzy coverings[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2017, 312:17-35.
[20] YAO Wei, SHE Yanhong, LU Lingxia. Metric-based *L*-fuzzy rough sets: approximation operators and definable sets[J]. Knowledge-Based Systems, 2019, 163:91-102.
[21] YAO Wei, ZHANG Guangxu, ZHOU Changjie. Real-valued hemimetric-based fuzzy rough sets and an application to contour extraction of digital surfaces[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2023, 459:201-219.
[22] GOUBAULT-LARRECQ J. Non-Hausdorff topology and domain theory[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2013: 1-10.
[23] ZADEH L A. Similarity relations and fuzzy orderings[J]. Information Sciences, 1971, 3(2):177-200.
[24] YAO Wei, ZHANG Guangxu, SHI Yi. Type-2 lattice-valued preorders: a common framework of lattice-valued preorders and various kinds of metrics[J]. Iranian Journal of Fuzzy Systems, 2023, 20(3):191-203.
[25] ZHANG Guangxu, YAO Wei. Fuzzy rough sets based on modular hemimetrics[J]. Soft Computing, 2023, 27:4393-4401.
[26] ZHANG Guangxu, YAO Wei. Fuzzy rough sets based on Morsi fuzzy hemimetrics[J]. Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics, 2024, 53(1):107-120.
[27] 杨俊. 基于乘除法的模糊预序型模糊粗糙集[D]. 南京:南京信息工程大学,2023.
YANG Jun. Fuzzy preorder based fuzzy rough sets using multiplication and division[D]. Nanjing: Nanjing University of Information Science and Technology, 2023.
[28] KLEMENT E P, MESIAR R, PAP E. Triangular norms[M]. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2000.
[29] 张小红,裴道武,代建华. 模糊数学与 Rough 集理论[M]. 北京:清华大学出版社,2013:116.
ZHANG Xiaohong, PEI Daowu, DAI Jianhua. Fuzzy mathematics and rough sets theroy[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2013:116.
[30] DEER L, CORNELIS C, YAO Y Y. A semantically sound approach to Pawlak rough sets and covering-based rough sets[J]. International Journal of Approximate Reasoning, 2016, 78(11):62-72.
[31] RALEVIĆ N M, KARAKLIĆ D, PIŠTINJAT N. Fuzzy metric and its applications in removing the imagenoise[J]. Soft Computing, 2019, 23(22):12049-12061.

(编辑:陈丽萍)

(上接第 84 页)

[22] YANG Zhigang, XIA Xiangyu, LIU Yiming, et al. LPST-Det: local-perception-enhanced swin transformer for sar ship detection[J]. Remote Sensing, 2024, 16(3):18.
[23] KONG Tao, SUN Fuchun, LIU Huaping, et al. Foveabox: beyond anchor-based object detection[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2020, 29:7389-7398.
[24] QIAN Wen, YANG Xue, PENG Silong, et al. Learning modulated loss for rotated object detection[EB/OL]. (2019-11-09)[2025-08-15]. https://doi.org/10.48550/arXiv.1911.08299.
[25] HAN Jiaming, DING Jian, LI Jie, et al. Align deep features for oriented object detection[J]. IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, 2021, 10(99):1-11.
[26] 中华人民共和国海关总署. SN/T 1105-2019 大家白蚁检疫鉴定方法[S]. 北京:中华人民共和国海关总署,2019.
General Administration of Customs of the People's Republic of China. SN/T 1105-2019 Detection and identification of coptotermes curvignathus Holmgren[S]. Beijing: General Administration of Customs of the People's Republic of China, 2019.
[27] HOU Qibin, ZHOU Daquan, FENG Jiashi. Coordinate attention for efficient mobile network design[C]//Proceedings of the IEEE/CVF Conference on Computer Vision and Pattern Recognition. Los Alamitos: IEEE, 2021:13708-13717.
[28] WANG Chenyao, LIAO Hongyuan, WU Yuehua, et al. CSPNET: a new backbone that can enhance learning capability of CNN[C]//Proceedings of the IEEE/CVF Conference on Computer Vision and Pattern Recognition. Los Alamitos: IEEE, 2020:390-404.

(编辑:陈丽萍)