

# 具有任意频率的拟周期驱动阻尼振子方程响应解的存在性

舒兴奎,杨莲,王芬芬\*

(四川师范大学数学科学学院,四川 成都 610066)

摘要:致力于寻找一个具有任意频率的拟周期驱动阻尼振子方程

$$x'' + \mu x' + x - \beta x^2 = \varepsilon f(\omega t)$$

响应解的存在性(即与驱动频率相同的拟周期解)。当 $\mu \neq 0$ 且远离零时,系统是双曲的(特征值的实部非零),此时不会出现小除数问题。因此,在不对频率 $\omega$ 施加任何算术性条件,也不要求驱动项的平均是零的情况下,将原方程响应解的存在性转化为 Banach 空间中不动点问题,分别在解析、高阶可微的情形下用压缩映射原理证明方程响应解的存在性。

关键词:振子方程;响应解;压缩映射原理

中图分类号:O175 文献标志码:A

引用格式:舒兴奎,杨莲,王芬芬. 具有任意频率的拟周期驱动阻尼振子方程响应解的存在性[J]. 山东大学学报(理学版),2026,61(2):99-105.

## Existence of response solution to quasi-periodically forced damping oscillator equation with any frequency

SHU Xingkui, YANG Lian, WANG Fenfen\*

(School of Mathematical Science, Sichuan Normal University, Chengdu 610066, Sichuan, China)

**Abstract:** This paper is devoted to finding the existence of the response solution (i.e., quasi-periodic solutions with the same frequency as the forcing) for a quasi-periodically forced damping oscillator equation

$$x'' + \mu x' + x - \beta x^2 = \varepsilon f(\omega t)$$

with arbitrary frequency. When  $\mu \neq 0$  and it is far away from zero, the system is hyperbolic (the real parts of eigenvalues are not zero), there is no small divisor problem at this time. Therefore, without imposing any arithmetic conditions on the frequency  $\omega$ , nor requiring the average of the forcing to be 0, this paper formulates the existence of the response solution of the original equation into a fixed point problem in the Banach space, and proves the existence of the response solution for the equation by using the contraction mapping principle in the case of analytic and higher-order differentiability.

**Key words:** oscillator equation; response solution; contraction mapping principle

## 0 引言

近些年来,人们对具有阻尼的非线性系统响应解的存在性非常感兴趣。本文所考虑的系统是一个关于时间导数的二阶方程,阻尼对应于一阶时间导数的项,即具有拟周期驱动的阻尼振子方程<sup>[1-2]</sup>

$$x'' + \mu x' + x - \beta x^2 = \varepsilon f(\omega t), \quad x \in \mathbf{R}, \quad (1)$$

其中 $\beta \in \mathbf{R}$ ,  $\mu \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ ,  $\varepsilon$ 任意小并且 $\omega \in \mathbf{R}^d \setminus \{0\}$  ( $d \in \mathbf{N}_+ := \mathbf{N} \setminus \{0\}$ )有理无关( $k \cdot \omega \neq 0, \forall k \in \mathbf{Z}^d \setminus \{0\}$ ),  $f: T^d \rightarrow \mathbf{R}$  ( $T^d = \mathbf{R}^d / (2\pi\mathbf{Z})^d$ )是关于时间 $t$ 的拟周期函数, $\mu$ 称为阻尼系数。本文的目标是在不对频率 $\omega$ 施加

收稿日期:2024-08-17;网络出版时间:2025-06-11

基金项目:国家自然科学基金资助项目(12101434);四川省自然科学基金资助项目(24NSFSC4934)

第一作者:舒兴奎(2000—),男,硕士研究生,研究方向为微分方程与动力系统. E-mail:20220801031@stu.sicnu.edu.cn

\*通信作者:王芬芬(1990—),女,副教授,博士,研究方向为微分方程与动力系统. E-mail:ffwang@sicnu.edu.cn

任何算术的条件下,寻找方程(1)的响应解,即频率为 $\omega$ 的拟周期解,具体形式见式(3)。

对于振子方程(1),从动力系统角度来看,当 $\mu=0$ 时,方程的线形部分是椭圆的(线形部分的特征值是纯虚数)。更进一步来说,椭圆方向导致在级数展开的表示中会出现系数 $\frac{1}{k \cdot \omega}$  ( $k \in \mathbf{Z}^d \setminus \{0\}$ ,  $\omega \in \mathbf{R}^d$ ),即使频率 $\omega$ 非共振( $k \cdot \omega \neq 0$ ,  $k \in \mathbf{Z}^d \setminus \{0\}$ ),由 Kronecker 定理<sup>[3]</sup>可知, $\omega$ 的有理无关或者说 $f$ 的拟周期性使得有无穷多个 $k$ 的整系数组合 $k \cdot \omega$ 任意趋近零,此问题称为小除数问题(小分母问题)<sup>[4]</sup>,该问题由 Poincaré 在研究天体力学问题的摄动方法中首次提出。卡姆理论(Kolmogorov-Arnold-Moser, KAM)正是处理小除数问题的有效方法之一。Moser 等<sup>[5-7]</sup>使用 KAM 理论证明了当频率 $\omega$ 满足某些非共振条件(如 Diophantine 条件、Bryuno 条件)时,其响应解的存在性。然而当 $\mu$ 远离原点时,系统(1)线形部分特征值的实部非零,此时 $\frac{1}{k \cdot \omega}$ 的分母有远离零的下界,因此小除数问题不会出现。Rafael 等<sup>[8]</sup>在假设驱动项的平均为零并且阻尼系数足够大的条件下,使用了压缩映射原理证明了强阻尼( $\mu$ 足够大)系统响应解的存在性。Cheng 等<sup>[9]</sup>考虑了一个具有退化平衡点的拟周期系统,在不假设驱动项的平均为零的情形下,通过求解一个平均值方程并结合不动点理论获得系统的响应解。受论文[8-9]的启发,对于一般的阻尼振子方程(1),本文在不假设驱动 $f$ 的平均为零,也不对频率 $\omega$ 施加任何算术条件,当阻尼 $\mu$ 满足一定条件( $|\mu| \geq \mu_0 > 0$ ) ( $\mu_0$ 是任意非零正数),在系统是解析和高阶可微情形下,结合求解平均值方程与不动点理论得出方程响应解的存在性。

值得注意的,条件 $|\mu| \geq \mu_0 > 0$ 是本文压缩映射原理能够成功实施的关键(具体细节见第4章,即实特征值不等于零是保证算子压缩的关键),但是并不是强阻尼。具体来说,当 $\mu$ 取值于一个不包含原点的区域时,方程(1)在不同情况下(解析和高阶可微情况下)都能通过压缩映射原理构造出响应解。当 $\mu$ 趋于原点时,构造的算子不再是一个压缩,这将导致本文的方法不再适用。

## 1 原方程(1)的转化

本章将启发式地讨论处理方程(1)的主要思想。这里只介绍形式转化,而忽略参数的取值、空间的选择。这些细节将在后面讨论,但实际上,本节的形式转化将是后面精确定义的动机。在将振子方程转化为不动点方程之前,首先介绍一些基本概念。

### 1.1 预备知识

对于函数 $f: T^d \rightarrow \mathbf{R}$ ,记

$$\begin{aligned} \bar{f} &:= \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{T^d} f(\theta) d\theta, \\ \tilde{f}(\theta) &:= f(\theta) - \bar{f}. \end{aligned} \quad (2)$$

称 $\bar{f}$ 为 $f$ 关于 $\theta$ 的平均, $\tilde{f}$ 为 $f$ 的振荡部分。

本文感兴趣的是寻找频率为 $\omega \in \mathbf{R}^d$ 的拟周期解<sup>[10-12]</sup>,也就是关于时间 $t$ 的解具有以下形式

$$x(t) = a + V(\omega t), \quad (3)$$

其中 $a \in \mathbf{R}$ ,  $V: T^d \rightarrow \mathbf{R}$ 被称为 $x$ 的壳函数。壳函数 $V$ 将成为本篇论文接下来的核心处理对象。值得注意的是,函数 $x(t)$ 的表示并不是唯一的。由 $a_1 + V^1(\omega t) = a_2 + V^2(\omega t)$ ,只能得出 $\widetilde{V}^1 = \widetilde{V}^2$ ,  $a_1 - a_2 = \overline{V^2 - V^1}$ 。

频率 $\omega$ 的有理无关性保证了集合 $\{\omega t\}_{t \in \mathbf{R}}$ 在环面 $T^d$ 上的稠密性。因此,将式(3)代入方程(1),结合 $\{\omega t\}_{t \in \mathbf{R}}$ 在环面 $T^d$ 上的稠密性得到方程(1)对于连续函数 $x(t)$ 成立,当且仅当壳函数 $V$ 满足

$$(\omega \cdot \partial_\theta)^2 V(\theta) + \mu(\omega \cdot \partial_\theta) V(\theta) + a + V(\theta) - \beta(a + V(\theta))^2 = \varepsilon \bar{f} + \varepsilon \tilde{f}(\theta), \quad (4)$$

因此,求解方程(1)将转化为求解方程(4),接下来试图将方程(4)转化成不动点方程。然后,选取合适的 Banach 空间使得不动点定理成立。

### 1.2 不动点方程

将方程(4)重写为

$$(\omega \cdot \partial_\theta)^2 V(\theta) + \mu(\omega \cdot \partial_\theta) V(\theta) + V(\theta) - 2a\beta V(\theta) = \varepsilon \bar{f} + \varepsilon \bar{f}(\theta) - a + \beta a^2 + \beta V^2(\theta)。 \tag{5}$$

第一步,选择  $a$  满足以下平均值方程

$$\beta a^2 - a + \varepsilon \bar{f} = 0。 \tag{6}$$

由于  $\varepsilon$  足够小,则恒有  $\Delta = 1 - 4\beta\varepsilon\bar{f} > 0$ 。因此,以上平均值方程总是有解的。第二步,定义如下线性算子  $\mathcal{L}_\mu$ :

$$\mathcal{L}_\mu := (\omega \cdot \partial_\theta)^2 + \mu(\omega \cdot \partial_\theta) + 1 - 2a\beta。 \tag{7}$$

结合式(6)、(7),方程(5)可以表示成

$$\mathcal{L}_\mu(V(\theta)) = \varepsilon \bar{f}(\theta) + \beta V^2(\theta)。 \tag{8}$$

若线性算子  $\mathcal{L}_\mu$  可逆(证明参见第 3 节),这意味着式(8)可以转化为以下不动点方程:

$$V(\theta) = \mathcal{L}_\mu^{-1}[\varepsilon \bar{f}(\theta) + \beta V^2(\theta)] \equiv \mathcal{T}_\mu(V)(\theta), \tag{9}$$

这里引进算子  $\mathcal{T}_\mu$ 。接下来的目标是在选取的 Banach 空间中选取一个开球,使得算子  $\mathcal{T}_\mu$  将此开球映射到自身且该算子是压缩。

注记 1 注意,方程(9)成立的关键点在于线性算子  $\mathcal{L}_\mu$  的可逆性。事实上,空间范数由 Fourier 系数所刻画,在此情况下,只需估计线性算子在 Fourier 基下的系数即可得到算子的有界性。具体细节见第 1 节。

## 2 Banach 空间的选择及主要结果

这一章将选择合适的 Banach 空间使得压缩映射原理成立。与此同时,选择的空間需要满足以下性质:

(1) 空间中函数的范数可以从 Fourier 系数的大小中读出。这使得式(7)中定义的线性算子  $\mathcal{L}_\mu$  在 Fourier 基下是对角的,从而该算子的范数可以比较简单且精确地估计出来。

(2) 所选空间必须具有 Banach 代数性质,以便进行乘法算子的范数估计。

对于空间的选择、范数的定义及空间的性质,主要参考文章[9,13-15]中定义的 Banach 空间。

### 2.1 Banach 空间的选择

对于  $\rho \geq 0$ , 记

$$T_\rho^d = \{ \theta \in \mathbf{C}^d / (2\pi\mathbf{Z})^d : \operatorname{Re}(\theta_j) \in T, |\operatorname{Im}(\theta_j)| \leq \rho, j = 1, 2, 3, \dots, d \}。$$

将环  $T_\rho^d$  上的周期函数  $f(\theta)$  进行 Fourier 展开为

$$f(\theta) = \sum_{k \in \mathbf{Z}^d} \hat{f}_k e^{ik \cdot \theta},$$

其中  $k \cdot \theta = \sum_{j=1}^d k_j \theta_j$  是  $\mathbf{C}^d$  上的欧式乘积,  $\hat{f}_k$  是  $f$  的 Fourier 系数。如果函数  $f$  在  $T_\rho^d$  上是解析并且有界的,则 Fourier 系数满足以下 Cauchy 界:

$$|\hat{f}_k| \leq \max_{\theta \in T_\rho^d} |f(\theta)| \cdot e^{-\rho|k|},$$

其中  $|k| = \sum_{j=1}^d |k_j|$ 。

定义 1 对于  $m \in \mathbf{N}_+, \rho \geq 0$ , 用  $H^{\rho,m}$  表示在  $T_\rho^d$  上满足有界范数的函数  $V$  构成的空间:

$$\begin{aligned} H^{\rho,m} &:= H^{\rho,m}(T^d) \\ &= \{ V: T_\rho^d \rightarrow \mathbf{C} \mid \|V\|_{\rho,m}^2 = \sum_{k \in \mathbf{Z}^d} |\hat{V}_k|^2 e^{2\rho|k|} (|k|^2 + 1)^m < +\infty \}。 \end{aligned}$$

显然,空间  $(H^{\rho,m}, \|\cdot\|_{H^{\rho,m}})$  是一个 Banach 空间,事实上是一个 Hilbert 空间。特别地,当  $\rho = 0$  时,  $H^m := H^{0,m}$  是一个标准的 Sobolev 空间(具体细节见参考文献[16-17])。为了简化符号,使用缩写  $\|\cdot\|_m := \|\cdot\|_{0,m}$ 。当  $\rho > 0$  时,从实解析的角度来看,考虑的 Banach 空间  $H^{\rho,m}$  中的函数对于实变量取实值,本文的压缩映射原则将在 Banach 空间  $H^{\rho,m}$  中成立。

接下来给出 Banach 空间的代数性质。

引理 1 (Banach 代数性质) 对于 Banach 代数有以下两种性质:

(1) Sobolev 情形<sup>[16-17]</sup>: 设  $\rho = 0, m > \frac{d}{2}$ , 存在一个只依赖于  $m, d$  的常数  $C_{m,d} > 0$  满足对于  $u_1, u_2 \in H^m$  有

$u_1 \cdot u_2 \in H^m$  并且

$$\|u_1 u_2\|_{H^m} \leq C_{m,d} \|u_1\|_{H^m} \|u_2\|_{H^m}.$$

(2) 解析情形<sup>[9]</sup>: 设  $\rho > 0$ ,  $m > d$ , 存在一个只依赖于  $\rho, m, d$  的常数  $C_{\rho,m,d} > 0$  满足对于  $u_1, u_2 \in H^{\rho,m}$  有  $u_1 \cdot u_2 \in H^{\rho,m}$  并且

$$\|u_1 u_2\|_{H^{\rho,m}} \leq C_{\rho,m,d} \|u_1\|_{H^{\rho,m}} \|u_2\|_{H^{\rho,m}}.$$

特别地, 对于上述  $\rho, m, d$ ,  $H^{\rho,m}$  是一个 Banach 代数。

## 2.2 主要结果

本节根据驱动  $f$  的可微性不同获得相对应的解。更精确地说, 当  $f$  解析时, 得到  $H^{\rho,m}$  空间中的解, 当  $f$  是高阶可微时, 得到  $H^m$  空间中的解。

**定理 1** 对于方程(1), 若  $f \in H^{\rho,m}$ ,  $\rho > 0$ ,  $m > d$ , 对于  $\mu \in \Gamma$ , 其中

$$\Gamma := \{\mu \in \mathbf{R} : |\mu| \geq \mu_0 > 0\}, \quad (10)$$

$\mu_0$  是任意常数, 则在空间  $H^{\rho,m}$  中, 方程(1) 存在一个形如式(3) 的解。

**定理 2** 对于方程(1), 若  $f \in H^m$ ,  $m > \frac{d}{2}$ , 对于  $\mu \in \Gamma$ , 则在空间  $H^m$  中, 方程(1) 存在一个形如式(3) 的解。

的解。

**注记 2** 在定理 1 和定理 2 中没有对驱动频率  $\omega \in \mathbf{R}^d$  添加任何算术条件。对于解的存在性, 将用压缩映射原理证明(具体见第 3 章), 本文不仅得出解析的结果还得出高阶光滑的结果。事实上, 压缩映射原理能够成功实施完全得益于选取的  $|\mu| \geq \mu_0 > 0$ 。在剔除掉一个以原点  $\mu = 0$  为中心的小区域时, 系统(1) 只有双曲方向, 此时不会产生小除数  $\frac{1}{|\langle k, \omega \rangle|}$ , 因此, 不需要  $\omega$  满足任何非退化条件如 Diophantine 或者 Bruno 条件。

## 3 解析和高阶可微情形: 定理 1 和定理 2 的证明

对于  $\mu \in \Gamma$ , 方程(1) 解的存在性等价于不动点方程

$$V(\theta) = \mathcal{L}_\mu^{-1}[\varepsilon \tilde{f}(\theta) + \beta V^2(\theta)] \equiv \mathcal{T}_\mu(V)(\theta) \quad (11)$$

不动点的存在性。由第 1.2 节知, 首先需要通过平均值方程选取  $a$ ; 其次, 方程(11) 的成立基于算子  $\mathcal{L}_\mu$  可逆以及逆算子  $\mathcal{L}_\mu^{-1}$  有界。

由式(6) 知, 选取  $a$  满足平均值方程:

$$\beta a^2 - a + \varepsilon \bar{f} = 0. \quad (12)$$

当  $\beta = 0$  时, 平均值方程存在根  $a = \varepsilon \bar{f}$ ; 而当  $\beta \neq 0$  时, 由于  $\varepsilon$  的极小性, 平均值方程的判别式  $\Delta = 1 - 4\beta \varepsilon \bar{f} > 0$ , 由此, 平均值方程必然存在两根  $a_1, a_2$  且  $a_1 \approx 0$ ,  $a_2 \approx \frac{1}{\beta}$ 。

### 3.1 逆算子 $\mathcal{L}_\mu^{-1}$ 的估计

这一部分将给出逆算子的定量估计, 一个关键因素就是函数的范数需要由 Fourier 系数所刻画。对于线性算子

$$\mathcal{L}_\mu = (\omega \cdot \partial_\theta)^2 + \mu(\omega \cdot \partial_\theta) + 1 - 2a\beta. \quad (13)$$

当把函数  $V \in H^{\rho,m}$  Fourier 展开为

$$V(\theta) = \sum_{k \in \mathbf{Z}^d} \hat{V}_k e^{ik \cdot \theta},$$

其中  $\hat{V}_k \in \mathbf{C}$ , 则算子  $\mathcal{L}_\mu$  作用在 Fourier 基上为

$$\mathcal{L}_\mu(e^{ik \cdot \theta}) = (-(k \cdot \omega)^2 + i\mu(k \cdot \omega) + 1 - 2a\beta) e^{ik \cdot \theta}. \quad (14)$$

由此, 只需估计算子在 Fourier 基下系数的大小即可获得算子的定量估计。

**命题 1** 对于任意的  $\mu \in \Gamma$ , 线性算子  $\mathcal{L}_\mu^{-1}: H^{\rho,m} \rightarrow H^{\rho,m}$  有界。

**证明** 考虑  $H^{\rho,m}$  中的函数

$$V(\theta) = \sum_{k \in \mathbf{Z}^d} \hat{V}_k e^{ik \cdot \theta}.$$

根据式(13)中定义的算子  $\mathcal{L}_\mu$  及式(14),有以下 Fourier 展开:

$$\mathcal{L}_\mu^{-1}(V)(\theta) = \sum_{k \in \mathbf{Z}^d} \frac{1}{-(k \cdot \omega)^2 + i\mu(k \cdot \omega) + 1 - 2a\beta} \hat{V}_k e^{ik \cdot \theta}. \tag{15}$$

由于

$$\begin{aligned} \|\mathcal{L}_\mu^{-1}(V)\|_{\rho,m}^2 &= \sum_{k \in \mathbf{Z}^d} \frac{1}{|-(k \cdot \omega)^2 + i\mu(k \cdot \omega) + 1 - 2a\beta|^2} |\hat{V}_k|^2 \cdot e^{2\rho|k|} (|k|^2 + 1)^m \\ &\leq \sup_{k \in \mathbf{Z}^d} \frac{1}{|-(k \cdot \omega)^2 + i\mu(k \cdot \omega) + 1 - 2a\beta|^2} \|\hat{V}_k\|_{\rho,m}^2, \end{aligned}$$

因此,只需估计  $L_\mu(k \cdot \omega)$  的上确界,其中

$$L_\mu(k \cdot \omega) := \frac{1}{-(k \cdot \omega)^2 + i\mu(k \cdot \omega) + 1 - 2a\beta}. \tag{16}$$

记  $q = k \cdot \omega \in \mathbf{R}$ ,等价地看,估计式(16)也就是需要估计  $l_\mu(q)$  的下确界,其中

$$l_\mu(q) = -q^2 + i\mu q + 1 - 2a\beta. \tag{17}$$

事实上,对于  $\mu \in \Gamma$ ,有

$$\begin{aligned} |l_\mu(q)|^2 &= (-q^2 + 1 - 2a\beta)^2 + (\mu q)^2 \\ &= q^4 + (\mu^2 + 4a\beta - 2)q^2 + (2a\beta - 1)^2. \end{aligned}$$

接下来根据  $a$  和  $\beta$  的不同取值来确定  $l_\mu(q)$  的下确界。

(1) 当  $\beta = 0$  时,有

$$|l_\mu(q)|^2 = q^4 + (\mu^2 - 2)q^2 + 1. \tag{18}$$

(a) 当  $|\mu| \geq \sqrt{2}$  时,  $|l_\mu(q)|^2 \geq 1$ 。

(b) 当  $\sqrt{2} > |\mu| \geq \mu_0 > 0$  时(注意,此时选取的  $0 < \mu_0 < \sqrt{2}$ ),则

$$\begin{aligned} |l_\mu(q)|^2 &= \left(q^2 + \frac{\mu^2 - 2}{2}\right)^2 + \frac{(4 - \mu^2)\mu^2}{4} \\ &\geq \frac{(4 - \mu^2)\mu^2}{4} \geq \frac{(4 - \mu_0^2)\mu_0^2}{4} =: C_{\mu_0} > 0, \end{aligned} \tag{19}$$

其中  $C_{\mu_0}$  是与  $\mu_0$  有关的常数(为了简化符号,从这里开始将使用  $C_{\mu_0}$  表示与  $\mu_0$  有关的任意常数,不再加以区分)。

(2) 当  $\beta \neq 0$  时,此时平均值方程(12)有两不同实数根

$$a_1 = \frac{1 + \sqrt{1 - 4\beta\varepsilon\bar{f}}}{2\beta}, \quad a_2 = \frac{1 - \sqrt{1 - 4\beta\varepsilon\bar{f}}}{2\beta}. \tag{20}$$

记  $c := \sqrt{1 - 4\beta\varepsilon\bar{f}}$ ,根据  $\varepsilon$  得极小性,不妨设  $\varepsilon$  满足  $4\beta\varepsilon\bar{f} < \frac{15}{16}$ ,即  $1 > c > \frac{1}{4}$ 。

(a) 当  $a = a_1$  时,

$$|l_\mu(q)|^2 = q^4 + (\mu^2 + 2c)q^2 + c^2 \geq \frac{1}{16}. \tag{21}$$

(b) 当  $a = a_2$  时,

$$|l_\mu(q)|^2 = q^4 + (\mu^2 - 2c)q^2 + c^2. \tag{22}$$

显然当  $\mu^2 \geq 2c$  时,有  $|l_\mu(q)|^2 \geq c^2 \geq \frac{1}{16}$ ,而当  $0 < \mu_0^2 \leq \mu^2 < 2c$ (注意,此时选取的  $0 < \mu_0^2 < 2c$ ),有

$$\begin{aligned} |l_\mu(q)|^2 &= q^4 + (\mu^2 - 2c)q^2 + c^2 \\ &= \left(q^2 + \frac{\mu^2 - 2c}{2}\right)^2 + \frac{\mu^2(4c - \mu^2)}{4} \\ &\geq \frac{\mu_0^2(4c - \mu_0^2)}{4} \geq C_{\mu_0} > 0. \end{aligned}$$

综上所述,对任意  $a \in \mathbf{R}$ ,  $\mu \in \Gamma$ , 有

$$\inf_{q \in \mathbf{R}} |l_\mu(q)| \geq C_{\mu_0} > 0. \quad (23)$$

由于空间  $H^{\rho,m}$  的范数由 Fourier 系数所刻画,则可以定义

$$\|\mathcal{L}_\mu^{-1}\|_{H^{\rho,m} \rightarrow H^{\rho,m}} := \sup_{k \in \mathbf{Z}^d} |L_\mu(k \cdot \omega)| \leq \sup_{q \in \mathbf{R}} |l_\mu(q)|^{-1} \leq C_{\mu_0}. \quad (24)$$

即算子  $\mathcal{L}_\mu$  具有有界逆。

注记 3 当  $\mu \rightarrow 0$  时,  $l_\mu(q)$  的下确界趋于零,因此算子  $\mathcal{L}_\mu^{-1}$  无界,这也是选择  $|\mu| \geq \mu_0 > 0$  的原因。当  $\mu \rightarrow 0$  时,本文的方法将不再成立。但值得强调的是,在剔除掉一个以原点  $\mu=0$  为中心的小区域时,振子方程的解总是可以通过压缩映射原理构造。

### 3.2 不动点的存在性

回忆不动点方程

$$V(\theta) = \mathcal{L}_\mu^{-1} [\varepsilon \tilde{f}(\theta) + \beta V^2(\theta)] \equiv \mathcal{T}_\mu(V)(\theta).$$

注意到压缩映射原理的使用有两个必要条件:算子是自映射且该算子是压缩。本文将根据  $f$  处于不同空间获得相应的响应解。

(1) 若  $f \in H^{\rho,m}$ , 本文将在空间  $H^{\rho,m}$  中使用压缩映射原理,根据命题 1 知道算子  $\mathcal{L}_\mu^{-1}$  是有界的。因此,选择空间  $H^{\rho,m}$  中以原点为圆心,半径为  $r > 0$  的球  $B_r(0)$  满足  $C_{\mu_0} \cdot |\beta| \cdot r < \frac{1}{2}$ , 对任意  $V_1, V_2 \in B_r(0)$ , 结合式(24)和  $H^{\rho,m}$  的 Banach 代数性质,有

$$\begin{aligned} \|\mathcal{T}_\mu(V_1) - \mathcal{T}_\mu(V_2)\|_{\rho,m} &= \|\beta \mathcal{L}_\mu^{-1} V_1^2 - \beta \mathcal{L}_\mu^{-1} V_2^2\|_{\rho,m} \\ &\leq \|\mathcal{L}_\mu^{-1}\|_{H^{\rho,m} \rightarrow H^{\rho,m}} \cdot |\beta| \cdot \|V_1 + V_2\|_{\rho,m} \|V_1 - V_2\|_{\rho,m} \\ &\leq C_{\mu_0} \cdot |\beta| \cdot r \|V_1 - V_2\|_{\rho,m} \\ &< \frac{1}{2} \|V_1 - V_2\|_{\rho,m}, \end{aligned} \quad (25)$$

由此可得  $\mathcal{T}_\mu$  是在球  $B_r(0)$  中的是一个压缩映射。

对于任意  $V \in B_r(0)$ , 有

$$\begin{aligned} \|\mathcal{T}_\mu(V)\|_{\rho,m} &\leq \|\mathcal{T}_\mu(0)\|_{\rho,m} + \|\mathcal{T}_\mu(V) - \mathcal{T}_\mu(0)\|_{\rho,m} \\ &\leq C_{\mu_0} |\varepsilon| \|\tilde{f}\|_{\rho,m} + \frac{1}{2} r \\ &\leq r, \end{aligned}$$

这是由于  $\varepsilon$  的极小性得到

$$C_{\mu_0} |\varepsilon| \|\tilde{f}\|_{\rho,m} < \frac{1}{2} r,$$

因此  $\mathcal{T}_\mu(B_r(0)) \subset B_r(0)$ 。综上所述,根据 Banach 空间  $H^{\rho,m}$  中的不动点定理,在空间  $H^{\rho,m}$  中不动点方程(9)存在唯一的解  $V$ 。定理 1 得证。

(2) 若  $f \in H^m$ , 类似于解析情况,在空间  $H^m$  中选择一个半径为  $r$  足够小的球  $\mathcal{B}_r(0)$  满足  $C_{\mu_0} \cdot |\beta| \cdot r < 1/2$ 。则对任意  $V_1, V_2 \in \mathcal{B}_r(0)$ , 有

$$\begin{aligned} \|\mathcal{T}_\mu(V_1) - \mathcal{T}_\mu(V_2)\|_m &= \|\beta \mathcal{L}_\mu^{-1} V_1^2 - \beta \mathcal{L}_\mu^{-1} V_2^2\|_m \\ &\leq C_{\mu_0} \cdot |\beta| \cdot r \|V_1 - V_2\|_m \\ &< \frac{1}{2} \|V_1 - V_2\|_m, \end{aligned}$$

因此,  $\mathcal{T}_\mu$  是球  $\mathcal{B}_r(0)$  中的一个压缩。对于任意  $V \in \mathcal{B}_r(0)$ , 有

$$\begin{aligned} \|\mathcal{T}_\mu(V)\|_m &\leq \|\mathcal{T}_\mu(0)\|_m + \|\mathcal{T}_\mu(V) - \mathcal{T}_\mu(0)\|_m \\ &\leq C_{\mu_0} |\varepsilon| \|\tilde{f}\|_m + \frac{1}{2} r \leq r, \end{aligned}$$

因此,  $\mathcal{T}_\mu(\mathcal{B}_r(0)) \subset \mathcal{B}_r(0)$ 。由 Banach 空间不动点定理可以获得方程(9)在空间  $H^m$  中的解  $V$ 。定理 2 得证。

## 参考文献:

- [1] STOKER J J. Nonlinear vibrations in mechanical and electrical systems[M]. New York: Interscience Publishers, 1950:107-114.
- [2] NI S, MA Z C, XU J X, et al. Response solutions of quasi-periodically forced degenerate oscillator equations with small parameters[J]. Journal of Dynamics and Differential Equations, 2024, 36(4):3811-3833.
- [3] KRONECKER L. Näherungsweise ganzzahlige auflösung linearer gleichungen[J]. Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 1884.
- [4] POINCARÉ H. Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste[M]. Paris: Gauthier-Villars, 1899.
- [5] MOSER J. Convergent series expansions for quasi-periodic motions[J]. Mathematische Annalen, 1967, 169(1):136-176.
- [6] MOSER J. Combination tones for duffing's equation[J]. Communications on Pure and Applied Mathematics, 1965, 18(1/2):167-181.
- [7] BROER H W, HUITEMA G B, SEVRYUK M B. Quasi-periodic motions in families of dynamical systems[M]. Berlin: Springer-Verlag, 1996:1-165.
- [8] WANG F F, DE LA LLAVE R. Response solutions to quasi-periodically forced systems, even to possibly ill-posed PDEs, with strong dissipation and any frequency vectors[J]. SIAM Journal on Mathematical Analysis, 2020, 52(4):3149-3191.
- [9] CHENG H Y, DE LA LLAVE R, WANG F F. Response solutions to the quasi-periodically forced systems with degenerate equilibrium; a simple proof of a result of w si and j si and extensions[J]. Nonlinearity, 2021, 34(1):372.
- [10] KUKSIN S, PÖSCHEL J. Invariant Cantor manifolds of quasi-periodic oscillations for a nonlinear Schrödinger equation[J]. Annals of Mathematics, 1996, 143(1):149-179.
- [11] PÖSCHEL J. A lecture on the classical KAM theorem[J]. Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, 2001, 69:707-732.
- [12] KAPPELER T, PÖSCHEL J. KdV & KAM[M]. Berlin: Springer, 2003:51-210.
- [13] DE LA LLAVE R. A smooth center manifold theorem which applies to some ill-posed partial differential equations with unbounded nonlinearities[J]. Journal of Dynamics and Differential Equations, 2009, 21(3):371-415.
- [14] WANG F F, DE LA LLAVE R. Response solutions to quasi-periodically forced systems, even to possibly ill-posed PDEs, with strong dissipation and any frequency vectors[J]. SIAM Journal on Mathematical Analysis, 2020, 52:3149.
- [15] XU X D, DE LA LLAVE R, WANG F F. The existence of solutions for nonlinear elliptic equations: simple proofs and extensions of apaper by Y.Shi[J]. Journal of Differential Equations, 2022, 318:20-57.
- [16] TAYLOR M E. Partial differential equations III; nonlinear equations[M]. 2nd ed. New York: Springer, 2011:14-132.
- [17] ADAMS R A, FOURNIER J J. Sobolev spaces[M]. Boston: Academic Press, 2003:30-140.

(编辑:胡春燕)