文章编号:1671-9352(2026)02-0075-13　　DOI:10.6040/j.issn.1671-9352.0.2024.255

具有时间依赖系数的波方程拉回吸引子的存在性

翟昭,张平,马巧珍*
(西北师范大学数学与统计学院, 甘肃 兰州 730070)

摘要:研究具有时间依赖系数的非线性波方程。首先,根据一致扇形算子理论证明解的适定性。其次,通过构造恰当的泛函获得过程的有界耗散性。最后,利用压缩函数的方法证明过程的渐近紧性,从而得到其拉回吸引子的存在性。在问题的研究中,由于将时间依赖系数分解为正部与负部,因此在证明过程的渐近紧性时,无法应用算子分解技巧,从而选择了压缩函数的方法。

关键词:波方程;适定性;拉回吸引子;时间依赖系数;耗散性;紧性
中图分类号:O175　　**文献标志码**:A
引用格式:翟昭,张平,马巧珍. 具有时间依赖系数的波方程拉回吸引子的存在性[J]. 山东大学学报(理学版),2026,61(2):75-87.

Existence of pullback attractors for wave equations with time dependent coefficients

ZHAI Zhao, ZHANG Ping, MA Qiaozhen*
(College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou 730070, Gansu, China)

Abstract: This paper is concerned with the nonlinear wave equations with time-dependent coefficients. Firstly, the well-posedness of the solution is proved based on the theory of the uniform sector operator. Secondly, the bounded dissipation of the process is obtained by constructing appropriate functionals. Finally, the asymptotic compactness of the process is proved by using the method of the compression function. In the research of the problem, since the time-dependent coefficients α_1 are decomposed into positive and negative parts, the operator decomposition technique cannot be applied when proving the asymptotic compactness of the process. Therefore, the method of compressing the function is chosen.

Key words: contractive function; well-posedness; pullback attractors; time-dependent coefficients; dissipation; compactness

0　引言

在偏微分方程的研究中,波动方程作为一种典型的双曲方程,在电动力学、量子力学和非线性弹性力学等多个数学物理领域中具有重要应用[1-6]。近年来,波方程的阻尼特性,尤其是弱阻尼波方程,因其独特性质而受到广泛关注,相关研究可参考文献[7-20]。在解的行为分析方面,文献[3,9,19,21-22]讨论了系统解的长期行为,特别地,文献[19]探讨在三维有界光滑域中具有非局部弱阻尼和超三次非线性的非自主波动方程的长期动力学。文献[21]研究非局部弱阻尼和临界非线性的非自治波方程的长期行为。文献[22]考虑了非局部结构能量阻尼的波动方程的适定性和长时间动力学。文献[10,12-13,20]讨论了系统解的渐近行为。吕鹏辉等[20]研究了具有变系数和弱阻尼的非局部高阶波方程解的渐近特性。孙春友等[10]利用压缩函数的方法,证明在非线性项满足临界增长条件下,具有时间依赖阻尼的临界退化波方程的拉回吸引子的存在性。在非线性项增长次数的研究中,文献[3]证明弱阻尼波方程 $u_{tt}+\beta u_t-\Delta u+f(u)=0$ 的全局吸引子存在性,其中 f 满足增长条件:$|f(u)|\leqslant c_0(|u|^{n/(n-2)}+1)$,由于 Sobolev 嵌入定理和先验估计技巧的限制,这里的 $n/(n-2)$ 是非线性项 f 的临界增长指数。李丹丹等[9]证明在非线性项为次临界增长条件下,退化波方程的

收稿日期:2024-07-16; **网络出版时间**:2025-09-29
第一作者:翟昭(1999—),女,硕士研究生,研究方向为无穷维动力系统. E-mail:896894121@qq.com
***通信作者**:马巧珍(1972—),女,教授,博士,研究方向为无穷维动力系统. E-mail:maqzh@nwnu.edu.cn

全局吸引子存在性。Arrieta 等[2]研究具有临界指数的阻尼双曲方程的吸引子的存在性。Pata 等[8]在 3D 有界域中,研究半线性弱阻尼波方程 $u_{tt}+u_t-\Delta u+\phi(u)=f$,其中 ϕ 满足临界增长条件。

同文献[10],本文的非线性项在临界增长条件下是局部 Lipschitz 连续的,但本文给出一种更具体的关于时间依赖系数的波方程,其阻尼项与扩散项的分离,为方程的分析和求解提供便利。文献[22]未涉及系统的渐近行为和弱阻尼情况,因此本文在证明解的适定性时方法也有所不同。同时,在证明过程的渐近紧性时,由于将时间依赖系数 α_1 分解成了正部与负部,因此使用了压缩函数的方法,这一方法的创新性在于它能够更精确地处理阻尼效应,从而为理解和预测波动方程的动态行为提供了新的工具。

本文考虑如下非线性波方程:

$$\begin{cases} u_{tt}+\alpha_1(t)u_t-\beta_1(t)\Delta u=f(u), & x\in\Omega,\ t>\tau, \\ u|_{\partial\Omega}=0, & t\geqslant\tau, \\ u(x,\tau)=u_\tau^0(x),\ u_t(x,\tau)=u_\tau^1(x), & x\in\Omega, \end{cases} \tag{1}$$

其中 $\Omega\subset\mathbf{R}^N$ 是具有光滑边界 $\partial\Omega$ 的有界区域,$\tau\in\mathbf{R}$, $u=u(x,t):\Omega\times[\tau,\infty)\to\mathbf{R}$, $u_\tau^0,u_\tau^1:\Omega\to\mathbf{R}$ 是给定的初值,$f\in C^2(\mathbf{R})$是非线性项。

下面给出非线性项以及时间依赖系数的假设条件:

(H_1) 假设 $f\in C^2(\mathbf{R})$,并且满足:对一些常数 $c>0$, $0<\gamma\leqslant 2/(N-2)$,

$$|f(u)-f(v)|\leqslant c|u-v|(1+|u|^\gamma+|v|^\gamma),\quad u,v\in\mathbf{R}, \tag{2}$$

$$\limsup_{|u|\to\infty}\frac{f(u)}{u}<\lambda_1 \tag{3}$$

成立,其中 λ_1 表示 Ω 上的负拉普拉斯算子$-\Delta$ 满足 Dirichlet 边界条件的第一特征值。注意到,由式(3),存在常数 $0<c_0\leqslant\lambda_1$ 和 $c_1\in\mathbf{R}$,使得对所有的 $u\in\mathbf{R}$,

$$uf(u)\leqslant c_1|u|+c_0|u|^2。 \tag{4}$$

(H_2) 同文献[10],假设弱阻尼系数$\alpha_1\in L_{\mathrm{loc}}^\infty(\mathbf{R})$且满足

$$1\leqslant\int_t^{t+1}\alpha_1(s)\mathrm{d}s=\int_t^{t+1}\alpha_1^0(s)\mathrm{d}s-\int_t^{t+1}\alpha_1^1(s)\mathrm{d}s\leqslant C_{\alpha_1},\quad\forall t\in\mathbf{R}, \tag{5}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\alpha_1^1(s)\mathrm{d}s<\infty, \tag{6}$$

其中,常数 $C_{\alpha_1}\geqslant 1$,函数 $\alpha_1^0(t)=\max\{\alpha_1(t),0\}$, $\alpha_1^1(t)=\max\{-\alpha_1(t),0\}$。

$\beta_1\in C^1(\mathbf{R})$是一个单调递减函数,并且满足对任意的正实数 β_1^0、β_1^1,有

$$0<\beta_1^0\leqslant\beta_1(t)\leqslant\beta_1^1。 \tag{7}$$

对本文中用到的一些抽象符号给出说明。记 $X=L^2(\Omega)$,赋予标准范数 $\|\cdot\|$ 和内积$(\cdot,\cdot)$, $A=-\Delta$ 是作用于 X 上正的、自伴的且具有紧逆的算子,$D(A)=H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$, $(u|_{\partial\Omega}=0,\ -\Delta u\in L^2(\Omega))$, $\lambda_1>0$ 是 A 的第一特征值。对 $\alpha\geqslant 0$, X^α是关于算子 A 的分数幂空间,其内积和范数定义如下:

$$(u,v)_{X^\alpha}=(A^\alpha u,A^\alpha v),\quad\|u\|_{X^\alpha}=\|A^\alpha u\|,$$

对 $\alpha>0$,定义 $X^{-\alpha}$是 X 的对偶空间, $\|A^{-\alpha}\cdot\|$ 是它的范数。特别地,$X=X^0=L^2(\Omega)$, $X^{1/2}=H_0^1(\Omega)$。

定义空间 $V:=X^{1/2}\times X$,赋予范数

$$\|w\|_V=(\|u\|_{X^{1/2}}^2+\|\partial_t u\|_X^2)^{1/2},\quad w=(u,\partial_t u)\in V。$$

本文通常使用 Poincare 不等式、Young 不等式以及 Hölder 不等式,Sobolev 嵌入定理, 即

$$H_0^1(\Omega)\hookrightarrow L^q(\Omega),\quad\forall q\in\left[1,\frac{2N}{N-2}\right],$$

若这个嵌入是紧的,当且仅当 $q\in\left[1,\dfrac{2N}{N-2}\right]$。

1 预备知识

令 $v=u_t$,将方程(1)转化为

$$z_t+\boldsymbol{Y}(t)z=\hat{F}(z),\quad t>\tau,\quad z(\tau)=z_0,$$

其中 $z=(u,v)^{\mathrm{T}}$。$\boldsymbol{Y}(t):\mathscr{D}(\boldsymbol{Y}(t))\subset V\to V$ 是一个无界线性算子,

$$\boldsymbol{Y}(t)z=\boldsymbol{Y}(t)\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-\boldsymbol{I}\\\beta_1(t)A&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-v\\\beta_1(t)Au\end{pmatrix}。$$

非线性项 $\hat{F}:\mathbf{R}\times V\to V$,

$$\hat{F}(z)=\hat{F}\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\f(u)-\alpha_1(t)v\end{pmatrix}。$$

定义 1[24]　设 Z 是 Banach 空间,$Y(t):D\subset Z\to Z$(D 固定)是一个闭的、稠定的时间依赖算子。

(1) 算子族 $\boldsymbol{Y}(t)$ 是一致扇形的,如果存在常数 $C>0$(不依赖于 $t\in\mathbf{R}$),使得

$$\|(\lambda\boldsymbol{I}+\boldsymbol{Y}(t))^{-1}\|_{\mathscr{L}(Z)}\leqslant\frac{C}{|\lambda|+1},\quad\forall\lambda\in\mathbf{C},\quad\mathrm{Re}\,\lambda\geqslant 0$$

成立。

(2) 称 $\boldsymbol{Y}(t)$ 是一致 Hölder 连续的,如果存在常数 $C>0$ 与 $\varepsilon>0$,使得对任意的 $t,\tau_0,s\in\mathbf{R}$,

$$\|[\boldsymbol{Y}(t)-\boldsymbol{Y}(\tau_0)]\boldsymbol{Y}^{-1}(s)\|_{\mathscr{L}(Z)}\leqslant C(t-\tau_0)^{\varepsilon},\quad\varepsilon\in(0,1]$$

成立。

定义 2[24]　对于连续函数 $\hat{F}:\mathbf{R}\times Z^{\alpha}\to Z$, $\alpha\in[0,1)$,称 $z(\cdot,\tau,z_0):[\tau,\tau+\tau_0)\to Z^{\alpha}$ 是式(8)的一个解,如果 z 是连续的,在 $(0,\tau_0)$ 上连续可微,对 $t\in(\tau,\tau+\tau_0)$, $z(t,\tau,z_0)\in\mathscr{D}(A(t))$,且对所有的 $t\in(0,\tau_0)$,z 都满足式(8)。

定理 1[24]　如果算子 $\boldsymbol{Y}(t)$ 是一致扇形算子且一致 Hölder 连续的,$\hat{F}:\mathbf{R}\times Z^{\alpha}\to Z$ 在 Z^{α} 的有界子集上 Lipschitz连续则对给定的 $r>0$,存在 $\tau_0>0$,对每个 $z_0\in Z^{\alpha}$, $\|z_0\|_{Z^{\alpha}}\leqslant r$,函数 $z(\cdot,\tau,z_0)\in C([\tau,\tau+\tau_0],Z^{\alpha})\cap C^1((\tau,\tau+\tau_0],Z^{\alpha})$ 是连续的,即

$$z_0\in\{z_0\in Z^{\alpha}:\|z_0\|_{Z^{\alpha}}\leqslant r\}\mapsto z(\cdot,\tau,z_0)\in C([\tau,\tau+\tau_0],Z^{\alpha}),$$

那么 $z(\cdot,\tau,z_0)$ 是式(8)的唯一解。

引理 1[25]　设 $\varphi(t)$ 是区间 $[a,b]$ 的连续函数,使得几乎对所有的 $t\in(a,b)$,有

$$\lim_{\delta\to 0}\inf_{\delta<0}\frac{1}{|\delta|}[\varphi(t+\delta)-\varphi(t)]\geqslant -m(t),$$

其中 $m(\cdot)\in L^1(a,b)$,则对所有的

$$a\leqslant t_1<t_2\leqslant b,\quad\varphi(t_1)-\varphi(t_2)\leqslant\int_{t_1}^{t_2}m(\zeta)\mathrm{d}\zeta。$$

引理 2[10]　设 $\phi(t)$ 和 $g(t)$ 是 $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R})$ 上定义的标量函数,假设定义在 $\mathbf{R}$ 上的连续函数 $h(t)$ 对所有的 $t\geqslant s$,满足下列不等式:

$$h(t)+\int_s^t\phi(\zeta)h(\zeta)\mathrm{d}\zeta\leqslant h(s)+\int_s^t g(\zeta)\mathrm{d}\zeta,$$

则对所有的 $t\geqslant s$,有

$$h(t)\leqslant h(s)\mathrm{e}^{-\int_s^t\phi(\sigma)\mathrm{d}\sigma}+\int_s^t g(\zeta)\mathrm{e}^{-\int_\zeta^t\phi(\sigma)\mathrm{d}\sigma}\mathrm{d}\zeta。$$

定义 3[7]　设 X 为度量空间,$\mathscr{C}(X)$ 是 X 到 X 的所有连续变换的集合。称算子族 $\{S(t,s):t\geqslant s\}\subset\mathscr{C}(X)$ 是一个连续过程,如果

(1) 对所有的 $t\in\mathbf{R}$, $S(t,t)=I$;

(2) 对所有的 $t\geqslant\tau\geqslant s$, $S(t,s)=S(t,\tau)S(\tau,s)$;

(3) 对所有的 $t\geqslant s$, $x\in X$, $(t,s,x)\to S(t,s)x$ 是连续的。

定义 4[7](强有界耗散)　称过程 $S(\cdot,\cdot)$ 是强有界耗散的,如果对每一个 $t\in\mathbf{R}$,存在 X 的有界子集 $B(t)$,在时间 τ 时拉回吸引 X 上的有界子集。即给定 X 上的有界子集 D 且 $\tau\leqslant t$,

$$\lim_{s\to-\infty}\mathrm{dist}(S(\tau,s)D,\ B(t))=0,$$

其中 $\operatorname{dist}(A,B)=\sup\limits_{a\in A}\inf\limits_{b\in B}d(a,b)$,表示 A 和 B 的 Hausdorff 半距离。

定义 5[7] X 的子集 B 在 t 时刻的拉回 ω-极限集定义为

$$\omega(B,t)=\bigcap_{\sigma\leqslant t}\overline{\bigcup_{s\leqslant\sigma}S(t,s)B},$$

或者等价于

$$\omega(B,t)=\{y\in X:\text{当 }k\to\infty\text{ 时 }s_k\to-\infty,\text{存在序列}\{x_k\}\subset B,\text{使得 }y=\lim_{k\to\infty}S(t,s_k)x_k\}。$$

定理 2[7] 如果过程 $S(\cdot,\cdot)$ 是强拉回有界耗散且拉回渐紧的,$B(\cdot)$ 是 X 的有界子集族,并且对每个 $t\in\mathbf{R}$, $\tau\leqslant t$, $B(\cdot)$ 在 τ 时刻拉回吸引 X 的有界子集,那么 $S(\cdot,\cdot)$ 有一个紧拉回吸引子 $\mathscr{A}(\cdot)$,使得

$$\mathscr{A}(t)=\omega(\bar{B}(t),t),$$

且对每个 $t\in\mathbf{R}$, $\bigcup\limits_{s\leqslant t}\mathscr{A}$ 有界。

定义 6[23] 设 X 是一个 Banach 空间,B 是 X 的一个有界子集。称定义在 $X\times X$ 上的函数 $\psi(\cdot,\cdot)$ 是 $B\times B$ 上的压缩函数,如果对任何序列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset B$,存在一个子序列 $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}\subset\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$,使得

$$\lim_{k\to\infty}\lim_{l\to\infty}\psi(x_{n_k},x_{n_l})=0。$$

定理 3[10] 设 X 是一个 Banach 空间且 $S(t,s):X\to X$ 是一个有拉回吸收族 $\hat{B}_0=\{B_0(s)\}_{s\in\mathbf{R}}$ 的演化过程。假设对任何的 $t\in\mathbf{R}$ 和 $\varepsilon>0$,存在时间 $s_\varepsilon<t$ 和压缩函数 $\psi_\varepsilon:B_0(s_\varepsilon)\times B_0(s_\varepsilon)\to\mathbf{R}$,使得

$$\|S(t,s_\varepsilon)x-S(t,s_\varepsilon)y\|_X\leqslant\varepsilon+\psi_\varepsilon(x,y),$$

则此过程是拉回渐近紧的。

2 解的适定性与有界耗散性

定理 4 如果算子 $\boldsymbol{Y}(t)$ 是一致扇形和一致 Hölder 连续的,$\hat{F}:\mathbf{R}\times V\to V$ 在 V 的有界子集上是 Lipschitz 连续的,则给定 $r>0$,存在 $\tau_0>0$,对每个初值 $u_0=(u_\tau^0,u_\tau^1)\in V$,函数 $u(\cdot,\tau,u_0)\in C([\tau,\tau+\tau_0],V)\cap C^1((\tau,\tau+\tau_0],V)$ 是连续的,即

$$u_0\in\{u_0\in V:\|u_0\|_V\leqslant r\}\mapsto u(\cdot,\tau,u_0)\in C([\tau,\tau+\tau_0],V),$$

那么 $u(\cdot,\tau,u_0)$ 是问题(1)的唯一解。

证明 首先由算子 $\boldsymbol{Y}(t)$,易得

$$(\lambda\boldsymbol{I}+\boldsymbol{Y}(t))^{-1}=\begin{pmatrix}\lambda[\lambda^2\boldsymbol{I}+\beta_1(t)A]^{-1} & [\lambda^2\boldsymbol{I}+\beta_1(t)A]^{-1}\\ -\beta_1(t)A[\lambda^2\boldsymbol{I}+\beta_1(t)A]^{-1} & \lambda[\lambda^2\boldsymbol{I}+\beta_1(t)A]^{-1}\end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned}&\|(\lambda\boldsymbol{I}+\boldsymbol{Y}(t))^{-1}\|_{\mathscr{L}(V)}\\ &\leqslant\max(\|\lambda[\lambda^2\boldsymbol{I}+\beta_1(t)A]^{-1}\|,\|[\lambda^2\boldsymbol{I}+\beta_1(t)A]^{-1}\|,\|-\beta_1(t)A[\lambda^2\boldsymbol{I}+\beta_1(t)A]^{-1}\|)。\end{aligned}\tag{8}$$

由 $\beta_1(t)$ 是一个时间依赖系数来估计式(8)中的每一项。对于 $\lambda[\lambda^2\boldsymbol{I}+\beta_1(t)A]^{-1}$,有

$$\|\lambda[\lambda^2\boldsymbol{I}+\beta_1(t)A]^{-1}\|\leqslant|\lambda|\cdot\|[\lambda^2\boldsymbol{I}+\beta_1(t)A]^{-1}\|。$$

对于 $[\lambda^2\boldsymbol{I}+\beta_1(t)A]^{-1}$,假设存在常数 C_1,使得

$$\|[\lambda^2\boldsymbol{I}+\beta_1(t)A]^{-1}\|\leqslant\frac{C_1}{|\lambda|^2+\beta_1(t)}。$$

对于 $-\beta_1(t)A[\lambda^2\boldsymbol{I}+\beta_1(t)A]^{-1}$,有

$$\|-\beta_1(t)A[\lambda^2\boldsymbol{I}+\beta_1(t)A]^{-1}\|\leqslant|\beta_1(t)|\cdot\|A\|\cdot\|[\lambda^2\boldsymbol{I}+\beta_1(t)A]^{-1}\|。$$

因此

$$\|(\lambda\boldsymbol{I}+\boldsymbol{Y}(t))^{-1}\|_{\mathscr{L}(V)}\leqslant\max\left(|\lambda|\cdot\frac{C_1}{|\lambda|^2+\beta_1(t)},\ \frac{C_1}{|\lambda|^2+\beta_1(t)},\ |\beta_1(t)|\cdot\|A\|\cdot\frac{C_1}{|\lambda|^2+\beta_1(t)}\right)。\tag{9}$$

由于 $|\lambda|^2+\beta_1(t)\geqslant|\lambda|^2$,因此式(9)进一步简化为

$$\|(\lambda+\boldsymbol{Y}(t))^{-1}\|_{\mathscr{L}(V)}\leqslant\frac{C}{|\lambda|+1},$$

其中,C 是一个足够大的常数,依赖于 C_1、$\|A\|$ 以及 $\beta_1(t)$ 的最大值。那么,由定义 1 的(1)可知,$\boldsymbol{Y}(t)$ 是一致扇形的。

此外,

$$[\boldsymbol{Y}(t)-\boldsymbol{Y}(s)]\boldsymbol{Y}^{-1}(t_0)=\beta_1(t_0)(\beta_1(t)-\beta_1(s))\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & \boldsymbol{I}\end{pmatrix},$$

由于 $\beta_1\in C^1(\mathbf{R})$,因此

$$\|[\boldsymbol{Y}(t)-\boldsymbol{Y}(s)]\boldsymbol{Y}^{-1}(t_0)\|_{\mathscr{L}(V)}\leqslant M|t-s|,$$

其中 M 是不依赖于 t 和 s 的常数。则由定义 1 的(2)可知,$\boldsymbol{Y}(t)$ 是一致 Hölder 连续的,此时,定义中的 $\varepsilon=1$。

下证 $\hat{F}(u)$ 是 Lipschitz 连续的。此证明过程与文献[10]一样,故省略。

综上可知, 问题(1)存在唯一解 $(u,u_t)\in C([\tau,\tau+\tau_0];V)$。

下面为了得到解的全局存在性,对方程(1)与 u_t 作内积,得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u_t\|_{L^2(\Omega)}^2+\alpha_1(t)\|u_t\|_{L^2(\Omega)}^2+\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\beta_1(t)\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega F(u)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\beta_1'(t)\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2,\tag{10}$$

其中 $F(u)=\int_0^u f(s)\mathrm{d}s$ 表示 f 的原函数。利用定理 4,若 u 是问题(1)的一个唯一解,则

$$(u,u_t)\in C([s,T);V)。$$

将式(10)从$[s,t]$积分,有

$$\frac{1}{2}\|u_t\|_{L^2(\Omega)}^2+\int_s^t\alpha_1(\zeta)\|u_t\|_{L^2(\Omega)}^2\mathrm{d}\zeta+\frac{1}{2}\beta_1(t)\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2-\int_\Omega F(u)\mathrm{d}x$$
$$\leqslant\frac{1}{2}\|u_t(s)\|_{L^2(\Omega)}^2+\frac{1}{2}\beta_1(s)\|\nabla u(s)\|_{L^2(\Omega)}^2-\int_\Omega F(u_\tau^0)\mathrm{d}x,\tag{11}$$

由式(2)可知

$$\int_\Omega|F(u_\tau^0)|\mathrm{d}x\leqslant C(\|u_\tau^0\|_{L^2(\Omega)}^2+\|u_\tau^0\|_{L^{\gamma+2}(\Omega)}^{\gamma+2})\leqslant C。$$

由式(4)、(7)、Young 不等式以及 Poincare 不等式,对足够小的 $\varepsilon>0$,存在 $C_\varepsilon\geqslant0$,使得

$$\begin{aligned}&\int_\Omega F(u)\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\beta_1(t)\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2\\ \leqslant&\frac{1}{2}c_0\|u\|_{L^2(\Omega)}^2+\int_\Omega c_1|u|\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\beta_1(t)\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2\\ \leqslant&\frac{1}{2}(c_0+\varepsilon)\|u\|_{L^2(\Omega)}^2+C_\varepsilon-\frac{1}{2}\beta_1(t)\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2\\ \leqslant&\frac{1}{2}\left(\frac{c_0+\varepsilon}{\lambda_1}-\beta_1^0\right)\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2+C_\varepsilon。\end{aligned}\tag{12}$$

设

$$M=C(\|u_t\|_{L^2(\Omega)}^2+\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2)+C_\varepsilon。\tag{13}$$

将式(12)、(13)代入式(11),可得

$$\frac{1}{2}\|u_t\|_{L^2(\Omega)}^2\leqslant M+\int_s^t\alpha_1^1(\zeta)\|u_t\|_{L^2(\Omega)}^2\mathrm{d}\zeta,$$

由 Gronwall 引理和式(6)得

$$\|u_t\|_{L^2(\Omega)}^2\leqslant 2M\mathrm{e}^{2\int_s^t\alpha_1^1(\zeta)\mathrm{d}\zeta}\leqslant 2M\mathrm{e}^{2r},\tag{14}$$

其中 $r:=\int_0^t\alpha_1^1(s)\mathrm{d}s$。

结合式(12)、(14),可以得到不等式:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\beta_1^1-c_0+\varepsilon}{\lambda_1}\right)\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2\leqslant M+\int_s^t\alpha_1^1(\zeta)\|u_t\|_{L^2(\Omega)}^2\mathrm{d}\zeta\leqslant M+2M\mathrm{e}^{2r}。$$

根据以上的估计可以得到,解(u,u_t)在空间 $V=X^{1/2}\times X$ 上关于时间 $t\in[s,T)$ 是一致有界的,并且全局存在。

注 1 根据式(5),有

$$\int_t^{t+1}\alpha_1^0(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta>\int_t^{t+1}\alpha_1^1(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta+1,$$

$$\int_s^{t}\alpha_1^0(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta>\int_s^{t}\alpha_1^1(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta+|T-s|,\tag{15}$$

其中,$|T-s|\in[T-s,T-s+1]$是一个整数。令式(15)中的 $T\to+\infty$,易得

$$\int_s^{+\infty}\alpha_1^0(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta=+\infty\text{。}$$

根据上面的论述,可以定义问题(1)在 $V=X^{1/2}\times X$ 上的过程$\{S(t,s):t\geqslant s\}$,即对于任何初值,有

$$w_0=(u_\tau^0,u_\tau^1)\in V:S(t,s)w_0=w(t,w_0),\quad t\geqslant 0,$$

其中,$w(t)=(u(t),u_t(t))\in C([s,T):V)$表示问题(1)对应初值 $w_0=(u_\tau^0,u_\tau^1)\in V$ 的唯一全局解。

接下来验证$\{S(t,s):t\geqslant s\}$是强拉回有界耗散的。首先估计 $u_t(t)$这一项。

引理 3 假设函数 f 满足式(2)、(3),$\alpha_1(t)$满足式(5)、(6),$\beta_1(t)$是单调递减函数且满足式(7),$(u(t),u_t(t))$是具有初值(u_τ^0,u_τ^1)的问题(1)的解,则存在 $T_0>0$,使得对所有的

$$t-s>T_0,\quad \|u_t(t)\|_{L^2(\Omega)}^2\leqslant R\tag{16}$$

成立, 其中 R 是依赖于初值的界的范数。

证明 令 $B\subset V$ 是一个有界集,$(u_\tau^0,u_\tau^1)=(u(s),v(s))\in B$。由前面的计算注意到

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\|u_t\|_{L^2(\Omega)}^2+\int_s^t\alpha_1(\zeta)\|u_t\|_{L^2(\Omega)}^2\mathrm{d}\zeta\\ \leqslant&\frac{1}{2}\|u_t(s)\|_{L^2(\Omega)}^2+\frac{1}{2}\beta_1(s)\|\nabla u(s)\|_{L^2(\Omega)}^2-\int_\Omega F(u_\tau^0)\,\mathrm{d}x\\ \leqslant&\frac{1}{2}\|u_t(s)\|_{L^2(\Omega)}^2+\frac{1}{2}\beta_1^1\|\nabla u(s)\|_{L^2(\Omega)}^2-\int_\Omega F(u_\tau^0)\,\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

令

$$g(\zeta)=\frac{1}{t-s}\left(\beta_1^1\|\nabla u(s)\|_{L^2(\Omega)}^2-\int_\Omega F(u_\tau^0)\,\mathrm{d}x\right),$$

运用引理 2,有

$$\begin{aligned}&\|u_t(s)\|_{L^2(\Omega)}^2\leqslant\|u_t(s)\|_{L^2(\Omega)}^2\mathrm{e}^{-\int_s^t\alpha_1(\sigma)\mathrm{d}\sigma}+\frac{1}{t-s}\left(\beta_1^1\|\nabla u(s)\|_{L^2(\Omega)}^2-2\int_\Omega F(u_\tau^0)\,\mathrm{d}x\right)\int_s^t\mathrm{e}^{-\int_\zeta^t\alpha_1(\sigma)\mathrm{d}\sigma}\mathrm{d}\zeta\\ \leqslant&\|u_t(s)\|_{L^2(\Omega)}^2\mathrm{e}^{-(t-s)}+\frac{1}{t-s}\left(\beta_1^1\|\nabla u(s)\|_{L^2(\Omega)}^2-2\int_\Omega F(u_\tau^0)\,\mathrm{d}x\right)\int_s^t\mathrm{e}^{-(t-\zeta)}\mathrm{d}\zeta\\ \leqslant&C_0\mathrm{e}^{-(t-s)}+\frac{C_0}{t-s}(1-\mathrm{e}^{-(t-s)}),\end{aligned}$$

其中,$C_0:=\max\left\{\|u_t(s)\|_{L^2(\Omega)}^2,\ \beta_1^1\|\nabla u(s)\|_{L^2(\Omega)}^2-2\int_\Omega F(u_\tau^0)\,\mathrm{d}x\right\}$。

注意到

$$\lim_{t-s\to\infty}\left\{C_0\mathrm{e}^{-(t-s)}+\frac{C_0}{t-s}(1-\mathrm{e}^{-(t-s)})\right\}=0,$$

则存在 $R>0$ 和 $T_0>0$,使得 $t-s>T_0$ 时,式(16)成立。

定理 5 设 Ω 是 $\mathbf{R}^N$ 中具有光滑边界的有界域,式(2)—(7)成立,则问题(1)生成的过程$\{S(t,s):t\geqslant s\}$是强有界耗散的。

证明 令 $B\subset V$ 是一个有界集,对每个 $w_0=(u_\tau^0,u_\tau^1)\in B$, $w(t)=(u(t),u_t(t))$是问题(1)对应的解。考虑连续泛函 $V_\delta:X\to\mathbf{R}$,定义如下:

$$V_\delta=\frac{\beta_1(t)}{2}\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2+\frac{1}{2}\|u_t\|_{L^2(\Omega)}^2+\delta(u,u_t)-\int_\Omega F(u)\,\mathrm{d}x,$$

其中常数 $\delta>0$。

根据式(4),对任意的 $\varepsilon\in\mathbf{R}^+$ 和一些常数 $C_\varepsilon>0$,

$$\frac{\beta_1(t)}{2}\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)}+\frac{1}{2}\|u_t\|^2_{L^2(\Omega)}=V_\delta-\delta(u,u_t)+\int_\Omega F(u)\mathrm{d}x$$

$$\leqslant V_\delta+\frac{\delta}{\sqrt{\lambda_1}}\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}\|u_t\|_{L^2(\Omega)}+\frac{1}{2}c_0\|u\|^2_{L^2(\Omega)}+c_1\int_\Omega|u|\mathrm{d}x$$

$$\leqslant V_\delta+\frac{\delta}{2\lambda_1}\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)}+\frac{\delta}{2}\|u_t\|^2_{L^2(\Omega)}+\frac{c_0+\varepsilon}{2\lambda_1}\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)}+C_\varepsilon$$

成立。以上计算过程使用了 Poincare 不等式和 Young 不等式。因此,由式(7)可知,

$$\left(\frac{\beta_1^1}{2}-\frac{\delta}{2\lambda_1}-\frac{c_0+\varepsilon}{2\lambda_1}\right)\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)}+\left(\frac{1}{2}-\frac{\delta}{2}\right)\|u_t\|^2_{L^2(\Omega)}\leqslant V_\delta+C_\varepsilon,$$

这里选取 $\delta\leqslant\min\{1,\beta_1^1\lambda_1\}$,并且 ε 充分小来确保存在常数 $\hat{c}_0>0$ 和 $\hat{c}_1>0$,使得

$$\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)}+\|u_t\|^2_{L^2(\Omega)}\leqslant\hat{c}_0V_\delta(w)+\hat{c}_1。\tag{17}$$

由于 $\alpha_1^1(t)$ 是连续可积函数,因此存在 $0<M_\alpha<\infty$,使得几乎对每个 $s\in(-\infty,\infty)$,有

$$0\leqslant\alpha_1^1(s)\leqslant M_\alpha。$$

现在选取一些正的常数 $C_\alpha+C_\beta<M_\gamma<\infty$,定义

$$A:=\{t\in\mathbf{R}\mid -M_\alpha\leqslant\alpha_1(t)\leqslant M_\gamma\}$$

和

$$B:=\{t\in\mathbf{R}\mid\alpha_1(t)>M_\gamma\}。$$

根据式(5),易得 $m(A)=\infty$。

根据式(1)、(7),对任意的 $0<\varepsilon<\beta_1^0\lambda_1$,有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}V_\delta(w)\leqslant-\beta_1(t)(\Delta u,u_t)+(u_{tt},u_t)+\delta\|u_t\|^2_{L^2(\Omega)}+\delta(u,u_{tt})-(f(u),u_t)$$

$$=-(\alpha_1(t)-\delta)\|u_t\|^2_{L^2(\Omega)}-\delta\alpha_1(t)(u,u_t)-\delta\beta_1(t)\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)}+\delta(u,f(u))$$

$$\leqslant-(\alpha_1(t)-\delta)\|u_t\|^2_{L^2(\Omega)}+\delta\alpha_1(t)(u,u_t)-\delta\beta_1^0\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)}+\delta(u,f(u))$$

$$\leqslant-(\alpha_1(t)-\delta)\|u_t\|^2_{L^2(\Omega)}+\delta\alpha_1(t)(u,u_t)-\left(\delta\beta_1^0-\frac{\delta(c_0+\varepsilon)}{\lambda_1}\right)\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)}+C_\varepsilon,\tag{18}$$

上面的估计使用了 Cauchy-Schwarz 不等式、Poincare 不等式以及 Young 不等式。当式(4)中的 $c_0<\beta_1^0\lambda_1/2$ 且 $\varepsilon<\beta_1^0\lambda_1/2$ 时,式(18)中的 $\delta\beta_1^0-\delta(c_0+\varepsilon)/\lambda_1>0$。

对式(18)从 $[s,t]$ 积分,得

$$V_\delta(w(t))\leqslant\int_s^t\Big(-(\alpha_1(\zeta)-\delta)\|u_t\|^2_{L^2(\Omega)}+\delta\alpha_1(\zeta)(u,u_t)$$

$$-\left(\delta\beta_1^0-\frac{\delta(c_0+\varepsilon)}{\lambda_1}\right)\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)}+C_\varepsilon\Big)\mathrm{d}\zeta+V_\delta(w_0)$$

$$\leqslant\int_s^t\Big((\alpha_1^1+\delta)\|u_t\|^2_{L^2(\Omega)}+\delta\alpha_1(\zeta)(u,u_t)$$

$$-\left(\delta\beta_1^0-\frac{\delta(c_0+\varepsilon)}{\lambda_1}\right)\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)}+C_\varepsilon\Big)\mathrm{d}\zeta+V_\delta(w_0),\tag{19}$$

式(19)两边再同乘以 χ_A,可得

$$\chi_AV_\delta(w(t))\leqslant\int_{A\cap[s,t]}\Big((\alpha_1^1+\delta)\|u_t\|^2_{L^2(\Omega)}+\delta\alpha_1(\zeta)(u,u_t)$$

$$-\left(\delta\beta_1^0-\frac{\delta(c_0+\varepsilon)}{\lambda_1}\right)\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)}+C_\varepsilon\Big)\mathrm{d}\zeta+V_\delta(w_0)$$

$$\leqslant\int_{A\cap[s,t]}\Big((\alpha_1^1+\delta)\|u_t\|^2_{L^2(\Omega)}+\delta(M_\alpha+M_\gamma)(u,u_t)$$

$$-\left(\delta\beta_1^0-\frac{\delta(c_0+\varepsilon)}{\lambda_1}\right)\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)}+C_\varepsilon\Big)\mathrm{d}\zeta+V_\delta(w_0)$$

$$\leqslant \int_{A\cap[s,t]} \Big((\alpha_1^1+\delta+\delta C_{\varepsilon_1}(M_\alpha+M_\gamma)) \| u_t \|_{L^2(\Omega)}^2 - \Big(\delta\beta_1^0-\frac{\delta(c_0+\varepsilon)}{\lambda_1}-\frac{\delta\varepsilon_1(M_\alpha+M_\gamma)}{\lambda_1}\Big) \| \nabla u \|_{L^2(\Omega)}^2 + C_\varepsilon \Big) \mathrm{d}\zeta + V_\delta(w_0),$$

其中 $\varepsilon>0$,为了让 $\delta\beta_1^0-\frac{\delta(c_0+\varepsilon)}{\lambda_1}-\frac{\delta\varepsilon_1(M_\alpha+M_\gamma)}{\lambda_1}>0$,选取 $0<\varepsilon_1<\frac{\beta_1^0\lambda_1}{M_\alpha+M_\gamma}$。

对任何 $t-s>T_0$,根据引理 3 有

$$\begin{aligned}\chi_A V_\delta(w(t)) &\leqslant \int_{A\cap[s,t]} \Big((\alpha_1^1+\delta+\delta C_{\varepsilon_1}(M_\alpha+M_\gamma))R \\ &\quad - \Big(\delta\beta_1^0-\frac{\delta(c_0+\varepsilon)}{\lambda_1}-\frac{\delta\varepsilon_1(M_\alpha+M_\gamma)}{\lambda_1}\Big) \| \nabla u \|_{L^2(\Omega)}^2 + C_\varepsilon \Big) \mathrm{d}\zeta + V_\delta(w_0) \\ &\leqslant rR + \int_{A\cap[s,t]} \Big((\delta+\delta C_{\varepsilon_1}(M_\alpha+M_\gamma))R \\ &\quad - \Big(\delta\beta_1^0-\frac{\delta(c_0+\varepsilon)}{\lambda_1}-\frac{\delta\varepsilon_1(M_\alpha+M_\gamma)}{\lambda_1}\Big) \| \nabla u \|_{L^2(\Omega)}^2 + C_\varepsilon \Big) \mathrm{d}\zeta + V_\delta(w_0),\end{aligned}$$

其中 $r:=\int_{-\infty}^{\infty}\alpha_1^1(s)\mathrm{d}s$。

一方面,结合式(17)可知,对于

$$\| \nabla u \|_{L^2(\Omega)}^2 \geqslant R_1 > \frac{\lambda_1\delta R+\lambda_1\delta C_{\varepsilon_1}R(M_\alpha+M_\gamma)+\lambda_1 C_\varepsilon}{\delta\beta_1^0\lambda_1-\delta(c_0+\varepsilon)-\varepsilon_1\delta(M_\alpha+M_\gamma)},$$

有

$$\chi_A(\| \nabla u \|_{L^2(\Omega)}^2 + \| u_t \|_{L^2(\Omega)}^2) \leqslant \hat{c}_0(-C_\delta m(A\cap[s,t])+rR+V_\delta(w_0))+\hat{c}_1, \tag{20}$$

其中 $C_\delta>0$。

另一方面,对于 $\delta=0$,有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}V_0(w(t)) = -\alpha_1(t) \| u_t \|_{L^2(\Omega)}^2, \tag{21}$$

对式(21)从$[s,t]$积分,可得

$$V_0(w(t)) = -\int_s^t \alpha_1(\zeta) \| u_t \|_{L^2(\Omega)}^2 \mathrm{d}\zeta + V_0(w_0), \tag{22}$$

然后对式(22)两边乘以χ_B,得到

$$\chi_B V_0(w(t)) = -\int_{B\cap[s,t]} \alpha_1(\zeta) \| u_t \|_{L^2(\Omega)}^2 \mathrm{d}\zeta + V_0(w_0) \leqslant -\int_{B\cap[s,t]} M_\gamma \| u_t \|_{L^2(\Omega)}^2 \mathrm{d}\zeta + V_0(w_0)。$$

若 $\| u_t \|_{L^2(\Omega)}^2 \geqslant \frac{1}{2}R$,则

$$2\chi_B V_0(w(t)) \leqslant -M_\gamma R m(B\cap[s,t]) + 2V_0(w_0), \tag{23}$$

结合式(17),得

$$\chi_B(\| \nabla u \|_{L^2(\Omega)}^2 + \| u_t \|_{L^2(\Omega)}^2) \leqslant \tilde{c}_0 V_0(w) + \tilde{c}_1。 \tag{24}$$

根据式(20)、(23)、(24),有

$$\begin{aligned}\| \nabla u \|_{L^2(\Omega)}^2 + \| u_t \|_{L^2(\Omega)}^2 &\leqslant \hat{c}_0(-C_\delta m(A\cap[s,t])+rR+V_\delta(w_0))+\hat{c}_1 \\ &\quad +\tilde{c}_0(-M_\gamma R m(B\cap[s,t])+2V_0(w_0))+\tilde{c}_1。\end{aligned}$$

因此,对 $m(A)=\infty$,存在 $T_1>0$,对所有 $t-s>\max\{T_0,T_1\}$,使得

$$\| \nabla u \|_{L^2(\Omega)}^2 + \| u_t \|_{L^2(\Omega)}^2 \leqslant R+\min\{R_1,\hat{c}_1+\tilde{c}_1\}。$$

这就证明了$\{S(t,s):t\geqslant s\}$是强有界耗散的,即对任意的有界集 $B\subset V$,存在一个 $R_0>0$ 和时间 $T(B)$,使得

$$S(t+s,s)B\subset B_V(0,R_0), \quad \forall t\geqslant T(B),$$

对所有 $s\in\mathbf{R}$ 一致。

3　拉回吸引子的存在性

定理 6　设非线性函数 f 满足式(2)、(3),阻尼项系数 $\alpha_1(t)$ 满足式(5)、(6),扩散项系数 $\beta_1(t)$ 是单调递减的且满足式(7),则问题(1)在空间 V 中有一个拉回吸引子 $\{A(t):t\in\mathbf{R}\}$。

定理 7　在定理 5 的假设下,问题(1)生成的过程是拉回渐近紧的。

为了证明由问题(1)生成的过程 $S(t,s)$ 是拉回渐近紧的,先证明下面的能量不等式。

设 B 是 V 中的有界子集,$u_1(t)$ 和 $u_2(t)$ 是问题(1)的解,分别具有初值 (u_0^1,u_1^1),$(u_0^2,u_1^2)\in B$,则 $w=u_1-u_2$ 也是问题(1)的解,满足

$$w_{tt}+\alpha_1(t)w_t-\beta_1(t)\Delta w=f(u_1)-f(u_2),\quad x\in\Omega,\quad t\geqslant s,\tag{25}$$

且具有 Dirichlet 边界条件和初值条件:

$$w(\tau)=u_0^1-u_0^2,\quad w_t(\tau)=u_1^1-u_1^2。$$

用 w_t 与式(25)在 $L^2(\Omega)$ 中做内积,得

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|w_t\|_{L^2(\Omega)}^2+\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\beta_1(t)\|\nabla w\|_{L^2(\Omega)}^2+\alpha_1(t)\|w_t\|_{L^2(\Omega)}^2\\&=(f(u_1)-f(u_2),w_t)+\frac{1}{2}\beta_1{}'(t)\|\nabla w\|_{L^2(\Omega)}^2,\end{aligned}\tag{26}$$

再将式(26)在 $[s,t]$ $(s<t)$ 上积分,由式(7)与 $\beta_1(t)$ 的单调递减性有

$$\begin{aligned}&\|w_t\|_{L^2(\Omega)}^2+2\int_s^t\alpha_1(\zeta)\|w_t\|_{L^2(\Omega)}^2\mathrm{d}\zeta\\&\leqslant 2\int_s^t(f(u_1-f(u_2)),w_t)\mathrm{d}\zeta+\beta_1^1\|\nabla w(s)\|_{L^2(\Omega)}^2+\|w_t(s)\|_{L^2(\Omega)}^2。\end{aligned}$$

应用引理 2,令

$$g(\zeta)=2(f(u_1)-f(u_2),w_t)+\frac{\beta_1^1}{t-s}\|\nabla w\|_{L^2(\Omega)}^2,$$

从而下面的估计式成立:

$$\begin{aligned}&\|w_t\|_{L^2(\Omega)}^2\leqslant\|w_t(s)\|_{L^2(\Omega)}^2\mathrm{e}^{-2\int_s^t\alpha_1(\delta)\mathrm{d}\delta}\\&+2\int_s^t(f(u_1)-f(u_2),w_t)\mathrm{e}^{-2\int_\zeta^t\alpha_1(\delta)\mathrm{d}\delta}\mathrm{d}\zeta+\int_s^t\frac{\beta_1^1}{t-s}\|\nabla w\|_{L^2(\Omega)}^2\mathrm{e}^{-2\int_\zeta^t\alpha_1(\delta)\mathrm{d}\delta}\mathrm{d}\zeta。\end{aligned}$$

由注 1 可知

$$\|w_t\|_{L^2(\Omega)}^2\leqslant\|w_t(s)\|_{L^2(\Omega)}^2\mathrm{e}^{-2(t-s)}+2\int_s^t(f(u_1)-f(u_2),w_t)\mathrm{e}^{-2(t-\zeta)}\mathrm{d}\zeta+\frac{\beta_1^1}{t-s}\|\nabla w\|_{L^2(\Omega)}^2\int_s^t\mathrm{e}^{-2(t-\zeta)}\mathrm{d}\zeta。\tag{27}$$

定义能量泛函:

$$E_w(t)=\frac{1}{2}\|w_t\|_{L^2(\Omega)}^2+\frac{1}{2}\beta_1(t)\|\nabla w\|_{L^2(\Omega)}^2,$$

对式(26)在 $[t,T]$ $(t\leqslant T)$ 上积分,得

$$E_w(T)+\int_t^t\alpha_1(\zeta)\|w_t\|_{L^2(\Omega)}^2\mathrm{d}\zeta\leqslant\int_t^t(f(u_1)-f(u_2),w_t)\mathrm{d}\zeta+E_w(t),\tag{28}$$

将式(28)在 $[s,T]$ 上关于 t 积分,得

$$\begin{aligned}&(T-s)E_w(T)+\int_s^t\int_t^t\alpha_1(\zeta)\|w_t\|_{L^2(\Omega)}^2\mathrm{d}\zeta\mathrm{d}t\\&\leqslant\int_s^t\int_t^t(f(u_1-f(u_2)),w_t)\mathrm{d}\zeta\mathrm{d}t+\int_s^t E_w(t)\mathrm{d}t。\end{aligned}\tag{29}$$

用 w 与式(25)在 $L^2(\Omega)$ 中做内积,得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(w_t,w)-\|w_t\|^2_{L^2(\Omega)}+\alpha_1(t)(w_t,w)+\beta_1(t)\|\nabla w\|^2_{L^2(\Omega)}=(f(u_1)-f(u_2),w),\tag{30}$$

然后对式(30)从$[s,T]$区间积分，有

$$\int_s^t\alpha_1(t)(w_t,w)\mathrm{d}t+(w_t(T),w(T))+\int_s^t\beta_1(t)\|\nabla w\|^2_{L^2(\Omega)}\mathrm{d}t$$

$$=\int_s^t\|w_t\|^2_{L^2(\Omega)}\mathrm{d}t+(w_t(s),w(s))+\int_s^t(f(u_1)-f(u_2),w)\mathrm{d}t,$$

因此可以推出

$$\int_s^t\beta_1(t)\|\nabla w\|^2_{L^2(\Omega)}\mathrm{d}t=\int_s^t\|w_t\|^2_{L^2(\Omega)}\mathrm{d}t-\int_s^t\alpha_1(t)(w_t,w)\mathrm{d}t$$

$$-(w_t(T),w(T))+(w_t(s),w(s))+\int_s^t(f(u_1)-f(u_2),w)\mathrm{d}t。\tag{31}$$

结合式(29)、(31)，得

$$(T-s)E_w(T)+\int_s^t\int_t^t\alpha_1(\zeta)\|w_t\|^2_{L^2(\Omega)}\mathrm{d}\zeta\mathrm{d}t$$

$$\leqslant\int_s^t\int_t^t(f(u_1)-f(u_2),w_t)\mathrm{d}\zeta\mathrm{d}t+\int_s^t\|w_t\|^2_{L^2(\Omega)}\mathrm{d}t-\frac{1}{2}\int_s^t\alpha_1(t)(w_t,w)\mathrm{d}t$$

$$-\frac{1}{2}(w_t(T),w(T))+\frac{1}{2}(w_t(s),w(s))+\frac{1}{2}\int_s^t(f(u_1)-f(u_2),w)\mathrm{d}t,$$

进而

$$(T-s)E_w(T)\leqslant\int_s^t\int_t^t\alpha_1^1(\zeta)\|w_t\|^2_{L^2(\Omega)}\mathrm{d}\zeta\mathrm{d}t+\int_s^t\int_t^t(f(u_1)-f(u_2),w_t)\mathrm{d}\zeta\mathrm{d}t$$

$$+\int_s^t\|w_t\|^2_{L^2(\Omega)}\mathrm{d}t-\frac{1}{2}\int_s^t\alpha_1(t)(w_t,w)\mathrm{d}t-\frac{1}{2}(w_t(T),w(T))$$

$$+\frac{1}{2}(w_t(s),w(s))+\frac{1}{2}\int_s^t(f(u_1)-f(u_2),w)\mathrm{d}t。\tag{32}$$

由式(27)可知

$$\int_s^t\|w_t\|^2_{L^2(\Omega)}\mathrm{d}t\leqslant\|w_t(s)\|^2_{L^2(\Omega)}\int_s^t\mathrm{e}^{-2(t-s)}\mathrm{d}t$$

$$+2\int_s^t\int_s^t(f(u_1)-f(u_2),w_t(\zeta))\mathrm{e}^{-2(t-\zeta)}\mathrm{d}\zeta\mathrm{d}t+\beta_1^1\|\nabla w\|^2_{L^2(\Omega)}\int_s^t\int_s^t\frac{1}{t-s}\mathrm{e}^{-2(t-\zeta)}\mathrm{d}\zeta\mathrm{d}t\tag{33}$$

和

$$\int_s^t\int_t^t\alpha_1^1(\zeta)\|w_t\|^2_{L^2(\Omega)}\mathrm{d}\zeta\mathrm{d}t\leqslant\|w_t(s)\|^2_{L^2(\Omega)}\int_s^t\int_t^t\alpha_1^1(\zeta)\mathrm{e}^{-2(\zeta-s)}\mathrm{d}\zeta\mathrm{d}t$$

$$+\beta_1^1\|\nabla w\|^2_{L^2(\Omega)}\int_s^t\int_t^t\alpha_1^1(\zeta)\frac{1}{\zeta-s}\int_s^\zeta\mathrm{e}^{-2(\zeta-\sigma)}\mathrm{d}\sigma\mathrm{d}\zeta\mathrm{d}t$$

$$+2\int_s^t\int_t^t\alpha_1^1(\zeta)\int_s^\zeta(f(u_1)-f(u_2),w_t(\sigma))\mathrm{e}^{-2(\zeta-\sigma)}\mathrm{d}\sigma\mathrm{d}\zeta\mathrm{d}t$$

$$\leqslant C_{\alpha_1^1,B}\int_s^t\mathrm{e}^{-2(t-s)}\mathrm{d}t+\beta_1^1\|\nabla w\|^2_{L^2(\Omega)}\int_s^t\int_t^t\alpha_1^1(\zeta)\frac{1}{\zeta-s}\int_s^\zeta\mathrm{e}^{-2(\zeta-\sigma)}\mathrm{d}\sigma\mathrm{d}\zeta\mathrm{d}t$$

$$+2\int_s^t\int_t^t\alpha_1^1(\zeta)\int_s^\zeta(f(u_1)-f(u_2),w_t(\sigma))\mathrm{e}^{-2(\zeta-\sigma)}\mathrm{d}\sigma\mathrm{d}\zeta\mathrm{d}t,\tag{34}$$

其中$C_{\alpha_1^1,B}$是常数且依赖于$\int_{-\infty}^{\infty}\alpha_1^1(s)\mathrm{d}s$的值与有界域$B$的半径。

结合式(32)—(34)，可以得到

$$(T-s)E_w(T)\leqslant C_{\alpha_1^1,B}\int_s^t\mathrm{e}^{-2(t-s)}\mathrm{d}t$$

$$+2\int_s^t\int_t^t\alpha_1^1(\zeta)\int_s^\zeta(f(u_1)-f(u_2),w_t(\sigma))\mathrm{e}^{-2(\zeta-\sigma)}\mathrm{d}\sigma\mathrm{d}\zeta\mathrm{d}t$$

$$+\beta_1^1\|\nabla w\|_{L^2(\Omega)}^2\int_s^t\int_t^t\alpha_1^1(\zeta)\frac{1}{\zeta-s}\int_s^\zeta \mathrm{e}^{-2(\zeta-\sigma)}\mathrm{d}\sigma\mathrm{d}\zeta\mathrm{d}t$$

$$+\int_s^t\int_t^t(f(u_1)-f(u_2),w_t)\mathrm{d}\zeta\mathrm{d}t+\|w_t(s)\|_{L^2(\Omega)}^2\int_s^t\mathrm{e}^{-2(t-s)}\mathrm{d}t$$

$$+2\int_s^t\int_s^t(f(u_1)-f(u_2),w_t(\zeta))\mathrm{e}^{-2(t-\zeta)}\mathrm{d}\zeta\mathrm{d}t$$

$$+\beta_1^1\|\nabla w\|_{L^2(\Omega)}^2\int_s^t\int_s^t\frac{1}{t-s}\mathrm{e}^{-2(t-\zeta)}\mathrm{d}\zeta\mathrm{d}t-\frac{1}{2}\int_s^t\alpha_1(t)(w_t,w)\mathrm{d}t$$

$$-\frac{1}{2}(w_t(T),w(T))+\frac{1}{2}(w_t(s),w(s))+\frac{1}{2}\int_s^t(f(u_1)-f(u_2),w)\mathrm{d}t。$$

定义

$$\psi_{T,s}(u_1,u_2)=\frac{1}{T-s}\Big[\int_s^t\int_t^t(f(u_1)-f(u_2),w_t)\mathrm{d}\zeta\mathrm{d}t$$

$$+2\int_s^t\int_t^t\alpha_1^1(\zeta)\int_s^\zeta(f(u_1)-f(u_2),w_t(\sigma))\mathrm{e}^{-2(\zeta-\sigma)}\mathrm{d}\sigma\mathrm{d}\zeta\mathrm{d}t$$

$$+\frac{1}{2}\int_s^t(f(u_1)-f(u_2),w)\mathrm{d}t-\frac{1}{2}\int_s^t\alpha_1(t)(w_t,w)\mathrm{d}t$$

$$+2\int_s^t\int_s^t(f(u_1)-f(u_2),w_t(\zeta))\mathrm{e}^{-2(t-\zeta)}\mathrm{d}\zeta\mathrm{d}t\Big],\tag{35}$$

于是

$$E_w(T)\leqslant\frac{1}{T-s}\Big[C_{\alpha_1^1,B}\int_s^t\mathrm{e}^{-2(t-s)}\mathrm{d}t$$

$$+\beta_1^1\|\nabla w\|_{L^2(\Omega)}^2\int_s^t\int_t^t\alpha_1^1(\zeta)\frac{1}{\zeta-s}\int_s^\zeta\mathrm{e}^{-2(\zeta-\sigma)}\mathrm{d}\sigma\mathrm{d}\zeta\mathrm{d}t$$

$$+\|w_t(s)\|_{L^2(\Omega)}^2\int_s^t\mathrm{e}^{-2(t-s)}\mathrm{d}t+\beta_1^1\|\nabla w\|_{L^2(\Omega)}^2\int_s^t\int_s^t\frac{1}{t-s}\mathrm{e}^{-2(t-\zeta)}\mathrm{d}\zeta\mathrm{d}t$$

$$-\frac{1}{2}(w_t(T),w(T))+\frac{1}{2}(w_t(s),w(s))\Big]+\psi_{T,s}(u_1,u_2)。$$

现在开始证明过程的拉回渐近紧性。

证明　对 $\forall\varepsilon>0$，令 $-s$ 足够大，则由 Lebesgue 控制收敛定理，有

$$E_w(T)\leqslant\varepsilon+\psi_{T,s}(u_1,u_2),$$

其中 $u_1,u_2\in V$。

下证 $\psi_{T,s}(u_1,u_2)$ 是压缩函数。记 $\partial_t u_n=u_{t_n}$，令 $B\subset V$ 是一个有界集且 (u_n,u_{t_n}) 是初值为 $(u_0^n,u_1^n)\in B$ 的问题(1)的对应解，$n=1,2,3,\cdots$，下证 $\lim\limits_{n\to\infty}\lim\limits_{m\to\infty}\psi_{T,s}(u_n,u_m)=0$，证明与文献[25]类似。

由前面的证明可知，(u_n,u_{t_n}) 在 $H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)$ 上有界。注意到紧嵌入 $H_0^1(\Omega)\hookrightarrow L^q(\Omega)$，$\forall q\in[1,2N/(N-2)]$ 成立，不失一般性，假定对任何 $s\leqslant t$，

$$\text{在 } L^\infty(s,t;H_0^1(\Omega)) \text{ 中 } u_n\xrightarrow{*}u,\tag{36}$$

$$\text{在 } L^{p+1}(s,t;L^{p+1}(\Omega)) \text{ 中 } u_n\to u,\tag{37}$$

$$\text{在 } L^\infty(s,t;L^2(\Omega)) \text{ 中 } u_{t_n}\xrightarrow{*}u_t,\tag{38}$$

$$\text{在 } L^2(\Omega) \text{ 中 } u_{t_n}\rightharpoonup u_t,\tag{39}$$

$$\text{在 } L^2(s,t;L^2(\Omega)) \text{ 中 } u_n\to u。\tag{40}$$

现在处理式(35)中右边的每一项。

首先，应用式(2)、(37)，可得

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\int_s^t(f(u_n)-f(u_m),u_n-u_m)\mathrm{d}t=0。$$

其次，从前面的证明可以知道 $f\in C^2(\Omega)$，则

$$
\begin{aligned}
&\int_t^t\int_\Omega (u_{t_n}(\zeta)-u_{t_m}(\zeta))(f(u_n)-f(u_m))\mathrm{d}x\mathrm{d}\zeta \\
=&\int_t^t\int_\Omega u_{t_n}(\zeta)f(u_n)\mathrm{d}x\mathrm{d}\zeta+\int_t^t\int_\Omega u_{t_m}(\zeta)f(u_m)\mathrm{d}x\mathrm{d}\zeta \\
&-\int_t^t\int_\Omega u_{t_n}(\zeta)f(u_m)\mathrm{d}x\mathrm{d}\zeta-\int_t^t\int_\Omega u_{t_m}(\zeta)f(u_n)\mathrm{d}x\mathrm{d}\zeta \\
=&\int_\Omega F(u_n(T))\mathrm{d}x-\int_\Omega F(u_n(t))\mathrm{d}x+\int_\Omega F(u_m(T))\mathrm{d}x-\int_\Omega F(u_m(t))\mathrm{d}x \\
&-\int_t^t\int_\Omega u_{t_n}(\zeta)f(u_m)\mathrm{d}x\mathrm{d}\zeta-\int_t^t\int_\Omega u_{t_m}(\zeta)f(u_n)\mathrm{d}x\mathrm{d}\zeta,
\end{aligned}
$$

结合式(36)、(37)，令 $m,n\to\infty$，可以得到

$$\int_t^t\int_\Omega (u_{t_n}(\zeta)-u_{t_m}(\zeta))(f(u_n)-f(u_m))\mathrm{d}x\mathrm{d}\zeta=0。\tag{41}$$

再次，由于 $\alpha_1(t)$ 是连续函数，结合式(39)、(40)，有

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\int_t^t \alpha_1(\zeta)(u_{t_n}-u_{t_m},u_n-u_m)\mathrm{d}\zeta=0。$$

最后，根据式(41)，当 $m,n\to\infty$ 时，

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\int_t^t\int_s^\zeta \alpha_1^1(\zeta)(f(u_n)-f(u_m),w_t(\sigma))\mathrm{e}^{-2(\zeta-\sigma)}\mathrm{d}\sigma\mathrm{d}\zeta=0$$

和

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\int_s^t (f(u_n)-f(u_m),w_t(\zeta))\mathrm{e}^{-2(t-\zeta)}\mathrm{d}\zeta=0$$

成立，因此，$\psi_{T,s}(\cdot,\cdot)$ 是一个压缩函数。

下面给出定理6的证明。

证明 由定理5与定理7，则定理2的条件得以满足。因此问题(1)生成的过程 $\{S(t,s)\}$ 在 V 中存在拉回吸引子。

参考文献：

[1] BABIN A V, VISHIK M I. Attractors of evolution equations[M]//Springer Monographs in Mathematics. New York: Springer, 1992:389-401.

[2] ARRIETA J, CARVALHO A N, HALE J K. A damped hyerbolic equation with critical exponent[J]. Communications in Partial Differential Equations, 1992, 17(5/6):841-866.

[3] BALL J. Global attractors for damped semilinear wave equations[J]. Discrete and Continuous Dynamical Systems, 2004, 10(1/2):31-52.

[4] TEMAM R. Infinite-dimensional dynamical systems in mechanics and physics[M]. New York: Springer, 1997:68

[5] CARABALLO T, CARVALHO A N, LANGA J A, et al. A non-autonomous strongly damped wave equation: existence and continuity of the pullback attractor[J]. Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, 2011, 74(6):2272-2283.

[6] 吴晓霞，马巧珍. 带有线性记忆的波方程在 $\mathbf{R}^n$ 上的时间依赖吸引子[J]. 应用数学，2021，34(1):73-85.
WU Xiaoxia, MA Qiaozhen. Time-dependent attractors of wave equations with linear memory on $\mathbf{R}^n$[J]. Mathematica Applicata, 2021, 34(1):73-85.

[7] CARVALHO A N, LANGA J A, ROBINSON J C. Attractors for infinite-dimensional non-autonomous dynamical systems[M]. New York: Springer, 2013.

[8] PATA V, ZELIK S. A remark on the damped wave equation[J]. Communications on Pure & Applied Analysis, 2006, 5(3): 611-616.

[9] LI D D, SUN C Y, CHANG Q Q. Global attractor for degenerate damped hyperbolic equations[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2017, 453(1):1-19.

[10] LI D D, CHANG Q Q, SUN C Y. Pullback attractors for a critical degenerate wave equation with time-dependent damping[J].

Nonlinear Analysis: Real World Applications, 2022, 63:103421.
[11] ARAGÃO G S, BEZERRA F D M, FIGUEROA-LÓPEZ R N, et al. Continuity of pullback attractors for evolution processes associated with semilinear damped wave equations with time-dependent coefficients[J]. Journal of Differential Equations, 2021, 298:30-67.
[12] UESAKA H. A pointwise oscillation property of semilinear wave equations with time-dependent coefficients II[J]. Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, 2001, 47(4):2563-2571.
[13] ISHIDA H, YUZAWA Y. Oscillatory properties for semilinear degenerate hyperbolic equations of second order[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2009, 356(2):624-632.
[14] GRASSELLI M, PATA V. On the damped semilinear wave equation with critical exponent[J]. Conference Publications, 2003:351-358.
[15] EBERT M R, GIRARDI G, REISSIG M. Critical regularity of nonlinearities in semilinear classical damped wave equations [J]. Mathematische Annalen, 2020, 378(3):1311-1326.
[16] CARABALLO T, LANGA J A, RIVERO F, et al. A gradient-like nonautonomous evolution process[J]. International Journal of Bifurcation and Chaos, 2010, 20(9):2751-2760.
[17] MA T F, MARÍN-RUBIO P, SURCO CHUÑO C M. Dynamics of wave equations with moving boundary[J]. Journal of Differential Equations, 2017, 262(5):3317-3342.
[18] HAN J B, WANG K Y, XU R Z, et al. Global quantitative stability of wave equations with strong and weak dampings[J]. Journal of Differential Equations, 2024, 390:228-344.
[19] YAN S L, ZHU X M, ZHONG C K, et al. Long-time dynamics of the wave equation with nonlocal weak damping and super-cubic nonlinearity in 3D domains, part II: nonautonomous case[J]. Applied Mathematics & Optimization, 2023, 88(3):69.
[20] 吕鹏辉,余莎莎,林国广. 具变系数和弱阻尼的非局部高阶波方程的长时间动力学行为[J]. 集美大学学报(自然科学版),2023,28(5):407-414.
LÜ Penghui, YU Shasha, LIN Guoguang. Long-time dynamic behavior of nonlocal higher-order wave equations with variable coefficients and weak damping[J]. Journal of Jimei University (Natural Science), 2023, 28(5):407-414.
[21] ZHOU F, ZHU K X, XIE Y Q. Dynamics of the non-autonomous wave equations with nonlocal weak damping and critical nonlinearity[J]. Discrete and Continuous Dynamical Systems-B, 2025, 30(1):1-25.
[22] BEZERRA F D M, LIU L F, NARCISO V. Attractors for a class of wave equations with nonlocal structural energy damping [J]. Nonlinear Differential Equations and Applications NoDEA, 2024, 31(6):114.
[23] NOLASCO DE CARVALHO A, NASCIMENTO M J D. Singularly non-autonomous semilinear parabolic problems withcritical exponents[J]. Discrete & Continuous Dynamical Systems-S, 2009, 2(3):449-471.
[24] CHUESHOV I. Dynamics of quasi-stable dissipative systems[M]. New York: Springer, 2015.
[25] SUN C Y, CAO D M, DUAN J Q. Non-autonomous dynamics of wave equations with nonlinear damping and critical nonlinearity[J]. Nonlinearity, 2006, 19(11):2645-2665.

(编辑:胡春燕)