

非 Lipschitz 条件下 G -Brown 运动驱动的随机微分方程的数值解

梁飞,张丽洁*

(西安科技大学理学院,陕西西安710600)

摘要:针对满足非 Lipschitz 条件的由 G -Brown 运动驱动的随机微分方程,运用 Euler 方法构造出方程的数值解,并证明 Euler 数值解在均方意义下收敛于解析解。最后通过一个例子验证方法的有效性。

关键词:随机微分方程; G -布朗运动;非 Lipschitz 条件;Euler 方法

中图分类号:O241 **文献标志码:**A

引用格式:梁飞,张丽洁.非 Lipschitz 条件下 G -Brown 运动驱动的随机微分方程的数值解[J].山东大学学报(理学版),2026,61(2):10-19,25.

Numerical solution of stochastic differential equations driven by G -Brownian motion under non-Lipschitz conditions

LIANG Fei, ZHANG Lijie*

(College of Science, Xi'an University of Science and Technology, Xi'an 710600, Shaanxi, China)

Abstract: This paper investigates a stochastic differential equation driven by G -Brownian motion that satisfies non-Lipschitz conditions. Initially, the Euler method is employed to construct a numerical solution for the equation. Subsequently, the convergence of the Euler numerical solution to the analytical solution is proven in the mean-square sense. Finally, an example is provided to validate the theoretical results.

Key words: stochastic differential equations; G -Brownian motion; non-Lipschitz conditions; Euler method

0 引言

随机微分方程(stochastic differential equations, SDEs)广泛应用于金融工程、控制理论和物理学等领域^[1]。经典的模型通常是由 Brown 运动驱动的随机微分方程描述,许多学者对经典 SDEs 的数值解进行了深入研究^[2-3]。在 Lipschitz 条件下,Platen^[4]证明 SDEs 的 Euler 方法的强收敛阶为 $1/2$,弱收敛阶为 1 。在非 Lipschitz 条件下,Mao 等^[5]证明经典 SDEs 的 Euler 数值解能够收敛于其精确解。范振成和宋明辉^[6]也证明了一类经典 SDEs 的 Euler 数值解收敛,收敛阶为 $1/2$ 。但经典的模型依赖于完整市场信息的风险度量,难以应对实际问题。在不完全信息、不对称信息和复杂噪声的情况下,基于 G -Brown 运动的随机微分方程及其 G -风险度量能够更有效地处理这些问题,尤其在金融市场建模极端风险和尾部风险方面,具有重要的理论与实践意义^[7]。

已有很多学者对由 G -Brown 运动驱动的 SDEs 解的性质进行了研究^[8-10]。在标准 Lipschitz 条件下,Gao^[11]研究了由 G -Brown 运动驱动的随机微分方程解的存在性和唯一性;2014年,Bai 等^[12]把上述存在唯一性结果推广到了带积分 Lipschitz 系数的情形;李光洁等^[13]通过构造一个 G -Lyapunov-Krasovskii 泛函得

收稿日期:2024-12-18; 网络出版时间:2025-10-23

基金项目:国家自然科学基金资助项目(42271309); 陕西省自然科学基金项目(2025JC-YBMS-083)

第一作者:梁飞(1980—),男,副教授,硕士生导师,博士,研究方向为非线性偏微分方程及其应用等. E-mail:xue7174527@163.com

*通信作者:张丽洁(1999—),女,硕士研究生,研究方向为微分方程数值解. E-mail:1919758921@qq.com

到了 G -Brown 运动驱动的中立型随机时滞微分方程平凡解的 p -阶矩指数的稳定性的充分条件;Zheng^[14]和 Gu 等^[15]对由 G -Brown 运动驱动的随机微分方程解的适定性进行了研究。进一步,当系数满足局部 Lipschitz 和广义 Lyapunov 条件时,Hu 等^[16]证明该方程解的存在性和唯一性。在非 Lipschitz 条件下,韩敏等^[17]建立了 G -Brown 运动驱动的随机微分方程的随机平均原理,证明了平均后方程的解在均方意义下收敛于原始方程的解。在弱线性增长条件和非 Lipschitz 条件下,Faizullah 等^[18]研究了由 G -Brown 运动驱动的随机微分方程的解的存在性和唯一性。

对由 G -Brown 运动驱动的 SDEs 数值解的研究,在 Lipschitz 条件下,Deng 等^[19]研究了 Euler 数值方法的指数稳定性;Yuan^[20]证明了指数 Euler 方法是收敛的,收敛阶为 $1/2$ 。关于该方程在非 Lipschitz 条件下数值解的相关文献较少,由于此类方程的解析解很难得到,因此对其数值解的研究非常有意义。本文研究如下由 G -Brown 运动驱动的 SDEs:

$$\begin{cases} dx(t) = a(x(t))dt + b(x(t))d\langle B, B \rangle(t) + c(x(t))dB(t), & t \in [0, T], \\ x(0) = x_0, \end{cases} \quad (1)$$

其中, $x(0) \in \mathbf{R}^n$ 为初值, 满足 $E|x(0)|^2 < \infty$; $\langle B, B \rangle_t$ 是 G -布朗运动 $(B_t)_{t \geq 0}$ 的二次变差过程; $a, b, c \in M_G^2([0, T]; \mathbf{R}^n)$, 是 Borel 可测的。

1 预备知识

对文中涉及的符号、基本定义及相关定理进行说明和阐释,并给出系数项须满足的假设条件。

$|\cdot|$ 是 \mathbf{R}^n 上的 Euclidean 范数。

$M_G^p([0, T]; \mathbf{R}^n)$ 表示 $M_G^0([0, T]; \mathbf{R}^n)$ 在范数 $\|\cdot\|_{M_G^p} := \left[\hat{E} \left(\int_0^T |\cdot|^p dt \right) \right]^{1/p}$ 下的完备化空间。

定义 1^[21] (次线性期望空间) 设 Ω 为一给定的集合, H 为 Ω 上的线性空间, 对所有的常数 $m \in H$, 如果 $X \in H$, 则 $|X| \in H$; 对所有的随机变量 $X, Y \in H$, 若 $\hat{E}: H \rightarrow \mathbf{R}$ 满足

- (a) 保常性: $\hat{E}[m] = m$, 对任意 $m \in \mathbf{R}$;
- (b) 单调性: 如果 $X \geq Y$, 那么 $\hat{E}[X] \geq \hat{E}[Y]$;
- (c) 正齐性: $\hat{E}[\lambda X] = \lambda \hat{E}[X]$, 任意的 $\lambda \geq 0$;
- (d) 次可加性: $\hat{E}[X+Y] \leq \hat{E}[X] + \hat{E}[Y]$ 。

则称 \hat{E} 为 (Ω, H) 上的次线性期望, 三元组 (Ω, H, \hat{E}) 为次线性期望空间。

定义 2^[21-23] (G -布朗运动) 设 $G: S_d \mapsto \mathbf{R}$ 为一单调次线性函数。定义在次线性期望空间 (Ω, H, \hat{E}) 上的随机过程 $(B_t \in H)_{t \geq 0}$ 被称为 G -布朗运动, 满足

- (a) $B_0 = 0$;
- (b) 对任意 $t, s \geq 0$ 增量过程 $B_{t+s} - B_t = \sqrt{s} X$ 且独立于 $(B_{t_1}, B_{t_2}, \dots, B_{t_n})$, 其中 $n \in \mathbf{N}$, $0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n \leq t$, 这里 X 为 G -正态分布。

注 1 考虑 (Ω, \mathcal{F}, P) 上的 1 维布朗运动 B_t , 给出表示次线性期望 \hat{E} 弱紧的概率测度族 \bar{P}_M 为

$$\bar{P}_M := \{p_\theta: p_\theta = p \circ X^{-1}, X_t = \int_0^t \theta_s dB_s, \theta \in L_F^2([0, T]; [\underline{\sigma}^2, \bar{\sigma}^2])\},$$

其中, $L_F^2([0, T]; [\underline{\sigma}^2, \bar{\sigma}^2])$ 为所有满足 $\underline{\sigma}^2 \leq |\theta_s|^2 \leq \bar{\sigma}^2$ 的 F -适应随机过程构成的集合。

接下来, 定义与弱紧概率测度族 \bar{P} 相关的容量 $c(\cdot)$ ^[14]:

$$c(D) = \sup_{P \in \bar{P}} P(D), \quad D \in \mathcal{B}(\Omega),$$

其中 $\mathcal{B}(\Omega)$ 为 Ω 上的 Borel 代数。关于上述定义的更多细节, 可参考文献[22]。

本文中由 G -Brown 运动驱动的随机微分方程(1)的 G -Itô 积分形式为

$$x(t) = x(0) + \int_0^t a(x(s)) ds + \int_0^t b(x(s)) d\langle B, B \rangle(s) + \int_0^t c(x(s)) dB(s). \quad (2)$$

引理 1^[24] 对 $x \in M_G^p([0, T]; \mathbf{R}^n)$, 有

$$\underline{\sigma}^2 E \int_0^T |x(s)|^2 ds \leq E \left(\int_0^T x^2(s) d\langle B, B \rangle(s) \right) \leq \bar{\sigma}^2 E \int_0^T |x(s)|^2 ds.$$

引理 2^[11] (G -随机积分的 B-D-G 不等式) 对 $x \in M_G^p([0, T]; \mathbf{R}^n)$, $p \geq 1$, 有

$$E \sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^t x(s) d\langle B, B \rangle(s) \right|^p \leq \bar{\sigma}^{2p} T^{p-1} \int_0^t E |x(s)|^p ds.$$

为了本文证明的需要, 给出以下非 Lipschitz 条件假设:

(H1) 存在常数 K_0 , 使得 $|a(0)|^2 + |b(0)|^2 + |c(0)|^2 \leq K_0$ 成立。

(H2) 对任意的 $x, y \in \mathbf{R}^n$, 不等式 $|a(x) - a(y)|^2 + |b(x) - b(y)|^2 + |c(x) - c(y)|^2 \leq k(|x - y|^2)$ 成立。其

中 $k(q)$ 为一个连续非降的凹函数, $k(0) = 0$; 当 $q > 0$ 时, $k(q) > 0$; 且满足积分条件 $\int_{0+} \frac{dq}{k(q)} = +\infty$ 。特别地, 如

果取 $k(q) = K'q$, 那么非 Lipschitz 条件将退化为 Lipschitz 条件。

定理 1^[18] 如果条件 (H1)、(H2) 成立, 则方程 (1) 的解存在且唯一。

2 Euler 方法

对时间区间 $[0, T]$ 进行等距划分 $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_{N-1} < t_N = T$, $\Delta t = T/N$ 为等距划分的步长, $\Delta t \in (0, 1)$, 记划分时间点为 $t_n = n\Delta t$, $n = 0, 1, \dots$ 。对方程 (1) 构造 Euler 数值方法, 得到以下迭代格式:

$$X_{n+1} = X_n + a(X_n)\Delta t + b(X_n)\Delta\langle B, B \rangle_n + c(X_n)\Delta B_n, \quad (3)$$

其中, $X_n \approx x(t_n)$, $\Delta B_n = B_{t_{n+1}} - B_{t_n}$ 为 G -布朗运动的增量, $\Delta\langle B, B \rangle_n = \langle B, B \rangle_{t_{n+1}} - \langle B, B \rangle_{t_n}$ 为平方变差的增量。

接下来, 定义方程 (3) 的一个连续扩张:

$$\bar{X}(t) = X_0 + \int_0^t a(Z(s)) ds + \int_0^t b(Z(s)) d\langle B, B \rangle(s) + \int_0^t c(Z(s)) dB(s), \quad (4)$$

其中, 阶梯函数 $Z(t) = X_n = \bar{X}(t_n)$, $t \in [t_n, t_{n+1}]$, $n = 0, 1, \dots$ 。

引理 3 在条件 (H1)、(H2) 下, 存在常数 C_1 , 使得对任意的 $t \in [0, T]$, 有

$$E \left(\sup_{0 \leq t \leq T} |\bar{X}(t)|^2 \right) \leq C_1.$$

证明 对 $|\bar{X}(t)|^2$ 利用 Itô 公式^[11], 并利用柯西不等式, 可得

$$\begin{aligned} |\bar{X}(t)|^2 &= |X_0|^2 + 2 \int_0^t \langle \bar{X}(s), a(Z(s)) \rangle ds + \int_0^t |c(Z(s))|^2 d\langle B, B \rangle(s) \\ &\quad + 2 \int_0^t \langle \bar{X}(s), c(Z(s)) \rangle dB(s) + 2 \int_0^t \langle \bar{X}(s), b(Z(s)) \rangle d\langle B, B \rangle(s) \\ &\leq |X_0|^2 + \int_0^t |\bar{X}(s)|^2 ds + \int_0^t |a(Z(s))|^2 ds + \int_0^t |c(Z(s))|^2 d\langle B, B \rangle(s) \\ &\quad + 2 \int_0^t \langle \bar{X}(s), c(Z(s)) \rangle dB(s) + 2 \int_0^t \langle \bar{X}(s), b(Z(s)) \rangle d\langle B, B \rangle(s). \end{aligned} \quad (5)$$

对任意的 $t \in [0, T]$, 对式 (5) 两边取期望, 由引理 1 可得

$$\begin{aligned} E \left(\sup_{0 \leq s \leq t} |\bar{X}(s)|^2 \right) &\leq E |X_0|^2 + E \int_0^t |\bar{X}(s)|^2 ds + E \int_0^t |a(Z(s))|^2 ds + \alpha_1 E \int_0^t |c(Z(s))|^2 ds \\ &\quad + 2E \sup_{0 \leq s \leq t} \int_0^s \langle \bar{X}(u), c(Z(u)) \rangle dB(u) \\ &\quad + 2E \sup_{0 \leq s \leq t} \int_0^s \langle \bar{X}(u), b(Z(u)) \rangle d\langle B, B \rangle(u), \end{aligned} \quad (6)$$

其中 α_1 为正常数。针对式 (6) 右侧第 4 项, 对 $\forall \beta_1 > 0$, 根据 B-D-G 不等式和 Young 不等式, 有

$$\begin{aligned} 2E \sup_{0 \leq s \leq t} \int_0^s \langle \bar{X}(u), c(Z(u)) \rangle dB(u) &\leq 3E \sup_{0 \leq s \leq t} |\bar{X}(s)| \cdot \left(\int_0^t |c(Z(s))|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq 3 \left[\beta_1 E \sup_{0 \leq s \leq t} |\bar{X}(s)|^2 \right]^{\frac{1}{2}} \times \left(\frac{1}{\beta_1} E \int_0^t |c(Z(s))|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

$$\leq 6\beta_1 E(\sup_{0 \leq s \leq t} |\bar{X}(s)|^2) + \frac{6}{\beta_1} E \int_0^t |c(Z(s))|^2 ds. \tag{7}$$

针对式(6)右侧第 6 项,对 $\forall \beta_2 > 0$,根据引理 2、Young 不等式以及 Hölder 不等式,有

$$\begin{aligned} & 2E \sup_{0 \leq s \leq t} \int_0^s \langle \bar{X}(u), b(Z(u)) \rangle d\langle B, B \rangle(u) \\ & \leq 2\alpha_2 E \sup_{0 \leq s \leq t} |\bar{X}(s)| \cdot \left(\int_0^t |b(Z(s))|^2 ds \right) \\ & \leq 2\alpha_2 E \sup_{0 \leq s \leq t} |\bar{X}(s)| \cdot \left(T \int_0^t |b(Z(s))|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \\ & \leq 2\alpha_2 [\beta_2 E \sup_{0 \leq s \leq t} |\bar{X}(s)|^2]^{\frac{1}{2}} \times \left(\frac{T}{\beta_2} E \int_0^t |b(Z(s))|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \\ & \leq 4\alpha_2 \beta_2 E(\sup_{0 \leq s \leq t} |\bar{X}(s)|^2) + \frac{4\alpha_2 T}{\beta_2} E \int_0^t |b(Z(s))|^2 ds, \end{aligned} \tag{8}$$

其中 α_2 为正常数。将式(7)、(8)代入式(6),可得

$$\begin{aligned} E(\sup_{0 \leq s \leq t} |\bar{X}(s)|^2) & \leq E \int_0^t |a(Z(s))|^2 ds + E \int_0^t |a(Z(s)) - a(0)|^2 ds + (6\beta_1 + 4\alpha_2 \beta_2) E(\sup_{0 \leq s \leq t} |\bar{X}(s)|^2) \\ & \quad + (\alpha_1 + \frac{6}{\beta_1}) E \int_0^t |c(Z(s)) - c(0)|^2 ds + \frac{4\alpha_2 T}{\beta_2} E \int_0^t |b(Z(s))|^2 ds + E|X_0|^2. \end{aligned} \tag{9}$$

选取充分小的正数 β_1, β_2 ,使得 $6\beta_1 + 4\alpha_2 \beta_2 = 1/2$,并根据柯西不等式,由式(9)可推出

$$\begin{aligned} E(\sup_{0 \leq s \leq t} |\bar{X}(s)|^2) & \leq 2E|X_0|^2 + 2 \int_0^t E(\sup_{0 \leq u \leq s} |\bar{X}(u)|^2) ds + 4E \int_0^t |a(Z(s)) - a(0)|^2 ds + 4E \int_0^t |a(0)|^2 ds \\ & \quad + 4(\alpha_1 + \frac{6}{\beta_1}) E \int_0^t |c(Z(s)) - c(0)|^2 ds + 4(\alpha_1 + \frac{6}{\beta_1}) E \int_0^t |c(0)|^2 ds \\ & \quad + \frac{16\alpha_2 T}{\beta_2} E \int_0^t |b(Z(s)) - b(0)|^2 ds + \frac{16\alpha_2 T}{\beta_2} E \int_0^t |b(0)|^2 ds. \end{aligned}$$

根据条件(H1)、(H2),上式进一步可化为

$$\begin{aligned} E(\sup_{0 \leq s \leq t} |\bar{X}(s)|^2) & \leq 2E|X_0|^2 + 2 \int_0^t E(\sup_{0 \leq u \leq s} |\bar{X}(u)|^2) ds + 4TK_0(1 + \alpha_1 + \frac{6}{\beta_1} + \frac{4\alpha_2 T}{\beta_2}) \\ & \quad + (4 + 4(\alpha_1 + \frac{6}{\beta_1}) + \frac{16\alpha_2 T}{\beta_2}) E \int_0^t k(|Z(s)|^2) ds. \end{aligned}$$

由于 $k(q)$ 是一个连续非降的凹函数,且 $k(0) = 0$,对任意的 $q > 0$,存在常数 m 和 n ,使得 $k(q) = mq + n$ 。因此

$$\begin{aligned} E(\sup_{0 \leq s \leq t} |\bar{X}(s)|^2) & \leq 2 \int_0^t E(\sup_{0 \leq u \leq s} |\bar{X}(u)|^2) ds + 4TK_0(1 + \alpha_1 + \frac{6}{\beta_1} + \frac{4\alpha_2 T}{\beta_2}) \\ & \quad + (4 + 4(\alpha_1 + \frac{6}{\beta_1}) + \frac{16\alpha_2 T}{\beta_2}) E \int_0^t (m|Z(s)|^2 + n) ds + 2E|X_0|^2 \\ & \leq 2E|X_0|^2 + 4T(1 + \alpha_1 + \frac{6}{\beta_1} + \frac{4\alpha_2 T}{\beta_2})(K_0 + n) \\ & \quad + [2 + 4m(1 + \alpha_1 + \frac{6}{\beta_1} + \frac{4\alpha_2 T}{\beta_2})] \int_0^t E(\sup_{0 \leq u \leq s} |\bar{X}(u)|^2) ds. \end{aligned} \tag{10}$$

对式(10)用 Gronwall 不等式,可得

$$E(\sup_{0 \leq s \leq t} |\bar{X}(s)|^2) \leq C_1,$$

其中 $C_1 = [2E|X_0|^2 + 4T(1 + \alpha_1 + \frac{6}{\beta_1} + \frac{4\alpha_2 T}{\beta_2})(K_0 + n)] \exp\left(\left[2 + 4m(1 + \alpha_1 + \frac{6}{\beta_1} + \frac{4\alpha_2 T}{\beta_2})\right]T\right)$ 。引理 3 证毕。

3 Euler 数值解的收敛性

引理 4 在条件(H1)、(H2)下,存在常数 C_2 ,使得对任意的 $t \in [0, T]$,有

$$E(\sup_{0 \leq t \leq T} |\bar{X}(t) - Z(t)|^2) \leq C_2 \Delta t.$$

证明 对任意的 $t \in [0, T]$,存在整数 n ,使得 $t \in [n\Delta t, (n+1)\Delta t]$ 时,根据柯西不等式,有

$$\begin{aligned} |\bar{X}(t) - Z(t)|^2 &= \left| \int_{n\Delta t}^t a(Z(s)) ds + \int_{n\Delta t}^t b(Z(s)) d\langle B, B \rangle(s) + \int_{n\Delta t}^t c(Z(s)) dB(s) \right|^2 \\ &\leq 3 \left| \int_{n\Delta t}^t a(Z(s)) ds \right|^2 + 3 \left| \int_{n\Delta t}^t b(Z(s)) d\langle B, B \rangle(s) \right|^2 + 3 \left| \int_{n\Delta t}^t c(Z(s)) dB(s) \right|^2. \end{aligned} \quad (11)$$

对式(11)两边取期望,由 Cauchy-Schwarz 不等式、Hölder 不等式、B-D-G 不等式、引理 2 及 $dB(t)$ 鞅的性质,可得

$$\begin{aligned} E(\sup_{0 \leq t \leq T} |\bar{X}(t) - Z(t)|^2) &\leq 3\Delta t E \int_0^T |a(Z(s))|^2 ds + 3E \sup_{0 \leq t \leq T} \max_{n=0,1,2,\dots,N-1} \left| \int_{n\Delta t}^t c(Z(s)) dB(s) \right|^2 \\ &\quad + 3E \sup_{0 \leq t \leq T} \max_{n=0,1,2,\dots,N-1} \left| \int_{n\Delta t}^t b(Z(s)) d\langle B, B \rangle(s) \right|^2 \\ &\leq 3\Delta t E \int_0^T |a(Z(s))|^2 ds + 3 \max_{n=0,1,2,\dots,N-1} E \int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} |c(Z(s))|^2 ds \\ &\quad + 3\alpha_3 \max_{n=0,1,2,\dots,N-1} E \int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} |b(Z(s))|^2 ds. \end{aligned} \quad (12)$$

由柯西不等式,式(12)可化为

$$\begin{aligned} E(\sup_{0 \leq t \leq T} |\bar{X}(t) - Z(t)|^2) &\leq 4\Delta t E \int_0^T |a(Z(s)) - a(0)|^2 ds + 6\alpha_3 \max_{n=0,1,2,\dots,N-1} E \int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} |b(0)|^2 ds \\ &\quad + 6\alpha_3 \max_{n=0,1,2,\dots,N-1} E \int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} |b(Z(s)) - b(0)|^2 ds + 4\Delta t E \int_0^T |a(0)|^2 ds \\ &\quad + 6 \max_{n=0,1,2,\dots,N-1} E \int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} |c(Z(s)) - c(0)|^2 ds \\ &\quad + 6 \max_{n=0,1,2,\dots,N-1} E \int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} |c(0)|^2 ds. \end{aligned}$$

由条件(H1)、(H2)和引理 3,可推出

$$\begin{aligned} E(\sup_{0 \leq t \leq T} |\bar{X}(t) - Z(t)|^2) &\leq 4\Delta t E \int_0^T k(|Z(s)|^2) ds + 6\alpha_3 \max_{n=0,1,2,\dots,N-1} E \int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} k(|Z(s)|^2) ds \\ &\quad + 6 \max_{n=0,1,2,\dots,N-1} E \int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} k(|Z(s)|^2) ds + 4TK_0\Delta t + 6\alpha_3 K_0\Delta t + 6K_0\Delta t \\ &\leq 4Tk(C_1)\Delta t + 6\alpha_3 k(C_1)\Delta t + 6k(C_1)\Delta t + 2K_0(2T + 3\alpha_3 + 3)\Delta t, \end{aligned}$$

即

$$E(\sup_{0 \leq t \leq T} |\bar{X}(t) - Z(t)|^2) \leq C_2 \Delta t,$$

其中 $C_2 = 2(2T + 3\alpha_3 + 3)(K_0 + k(C_1))$ 。引理 4 证毕。

定理 2 若条件(H1)、(H2)成立,则 Euler 数值解收敛于方程(2)的解析解,即对任意的 $T > 0$,有

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} E(\sup_{0 \leq t \leq T} |x(t) - \bar{X}(t)|^2) = 0.$$

证明 由公式(2)、(4)可知

$$\begin{aligned} x(t) - \bar{X}(t) &= \int_0^t [a(x(s)) - a(Z(s))] ds + \int_0^t [b(x(s)) - b(Z(s))] d\langle B, B \rangle(s) \\ &\quad + \int_0^t [c(x(s)) - c(Z(s))] dB(s). \end{aligned}$$

根据 Itô 公式^[11]和柯西不等式,可得

$$|x(t) - \bar{X}(t)|^2 = 2 \int_0^t \langle x(s) - \bar{X}(s), a(x(s)) - a(Z(s)) \rangle ds$$

$$\begin{aligned}
 &+ 2 \int_0^t \langle x(s) - \bar{X}(s), c(x(s)) - c(Z(s)) \rangle dB(s) \\
 &+ 2 \int_0^t \langle x(s) - \bar{X}(s), b(x(s)) - b(Z(s)) \rangle d\langle B, B \rangle(s) \\
 &+ \int_0^t |c(x(s)) - c(Z(s))|^2 d\langle B, B \rangle(s) \\
 \leq &\int_0^t |x(s) - \bar{X}(s)|^2 ds + \int_0^t |a(x(s)) - a(Z(s))|^2 ds \\
 &+ 2 \int_0^t \langle x(s) - \bar{X}(s), b(x(s)) - b(Z(s)) \rangle d\langle B, B \rangle(s) \\
 &+ 2 \int_0^t \langle x(s) - \bar{X}(s), c(x(s)) - c(Z(s)) \rangle dB(s) \\
 &+ \int_0^t |c(x(s)) - c(Z(s))|^2 d\langle B, B \rangle(s). \tag{13}
 \end{aligned}$$

对任意的 $t \in [0, T]$, 对式(13)两边取期望, 由引理 1 可得

$$\begin{aligned}
 E(\sup_{0 \leq s \leq t} |x(s) - \bar{X}(s)|^2) &\leq E \int_0^t |x(s) - \bar{X}(s)|^2 ds + E \int_0^t |a(x(s)) - a(Z(s))|^2 ds \\
 &\quad + 2E \sup_{0 \leq s \leq t} \int_0^s \langle x(u) - \bar{X}(u), c(x(u)) - c(Z(u)) \rangle dB(u) \\
 &\quad + 2E \sup_{0 \leq s \leq t} \int_0^s \langle x(u) - \bar{X}(u), b(x(u)) - b(Z(u)) \rangle d\langle B, B \rangle(u) \\
 &\quad + \alpha_1 E \int_0^t |c(x(s)) - c(Z(s))|^2 ds \\
 &= A_1 + A_2 + A_3 + \alpha_1 E \int_0^t |c(x(s)) - c(Z(s))|^2 ds. \tag{14}
 \end{aligned}$$

其中 α_1 为正常数。先证 A_1 。由条件(H1)、(H2)以及引理 4, 可推出

$$\begin{aligned}
 A_1 &\leq E \int_0^t |x(s) - \bar{X}(s)|^2 ds + E \int_0^t k(|x(s) - Z(s)|^2) ds \\
 &\leq E \int_0^t |x(s) - \bar{X}(s)|^2 ds + \int_0^t E(2k|x(s) - \bar{X}(s)|^2 + 2k|\bar{X}(s) - Z(s)|^2) ds \\
 &\leq E \int_0^t |x(s) - \bar{X}(s)|^2 ds + \int_0^t (2kE|x(s) - \bar{X}(s)|^2 + 2k(C_2 \Delta t)) ds. \tag{15}
 \end{aligned}$$

再证 A_2 。对任意的 $\beta_1 > 0$, 利用 B-D-G 不等式、Young 不等式和 Hölder 不等式, 有

$$\begin{aligned}
 A_2 &\leq 3E \sup_{0 \leq s \leq t} |x(s) - \bar{X}(s)| \cdot \left(\int_0^t |c(x(s)) - c(Z(s))|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &\leq 3[\beta_1 E \sup_{0 \leq s \leq t} |x(s) - \bar{X}(s)|^2]^{\frac{1}{2}} \times \left(\frac{1}{\beta_1} E \int_0^t |c(x(s)) - c(Z(s))|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &\leq 6\beta_1 E \left(\sup_{0 \leq s \leq t} |x(s) - \bar{X}(s)|^2 \right) + \frac{6}{\beta_1} E \int_0^t |c(x(s)) - c(Z(s))|^2 ds. \tag{16}
 \end{aligned}$$

接下来证 A_3 。对任意的 $\beta_2 > 0$, 由引理 2 和 Young 不等式, 有

$$\begin{aligned}
 A_3 &\leq 2\alpha_2 E \left[\sup_{0 \leq s \leq t} |x(s) - \bar{X}(s)| \cdot \left(\int_0^t |b(x(s)) - b(Z(s))| ds \right) \right] \\
 &\leq 2\alpha_2 E \sup_{0 \leq s \leq t} |x(s) - \bar{X}(s)| \cdot \left(T \int_0^t |b(x(s)) - b(Z(s))|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &\leq 2\alpha_2 [\beta_2 E \sup_{0 \leq s \leq t} |x(s) - \bar{X}(s)|^2]^{\frac{1}{2}} \times \left(\frac{T}{\beta_2} E \int_0^t |b(x(s)) - b(Z(s))|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &\leq 4\alpha_2 \beta_2 E \left(\sup_{0 \leq s \leq t} |x(s) - \bar{X}(s)|^2 \right) + \frac{4\alpha_2 T}{\beta_2} E \int_0^t |b(x(s)) - b(Z(s))|^2 ds. \tag{17}
 \end{aligned}$$

其中 α_2 为正常数。将式(15)–(17)代入式(14), 由条件(H2), 可得

$$E(\sup_{0 \leq s \leq t} |x(s) - \bar{X}(s)|^2) \leq \int_0^t (2k(E|x(s) - \bar{X}(s)|^2) + 2k(C_2 \Delta t)) ds$$

$$\begin{aligned}
& +\left(\alpha_1+\frac{6}{\beta_1}+\frac{4\alpha_2 T}{\beta_2}\right) E \int_0^t k(|x(s)-Z(s)|^2) ds \\
& +\left(1+6\beta_1+4\alpha_2\beta_2\right) \int_0^t E\left(\sup_{0 \leq u \leq s}|x(u)-\bar{X}(u)|^2\right) ds. \quad (18)
\end{aligned}$$

根据引理 4,由式(18)可推出

$$\begin{aligned}
& E\left(\sup_{0 \leq s \leq t}|x(s)-\bar{X}(s)|^2\right) \\
& \leq\left(1+6\beta_1+4\alpha_2\beta_2\right) \int_0^t E\left(\sup_{0 \leq u \leq s}|x(u)-\bar{X}(u)|^2\right) ds \\
& +\int_0^t\left[2k\left(E|x(s)-\bar{X}(s)|^2\right)+2k\left(C_2\Delta t\right)\right] ds \\
& +\left(\frac{6}{\beta_1}+\frac{4\alpha_2 T}{\beta_2}+\alpha_1\right) \int_0^t E\left(2k|x(s)-\bar{X}(s)|^2+2k|\bar{X}(s)-Z(s)|^2\right) ds \\
& \leq\left(1+6\beta_1+4\alpha_2\beta_2\right) \int_0^t E\left(\sup_{0 \leq u \leq s}|x(u)-\bar{X}(u)|^2\right) ds+2\left(1+\frac{6}{\beta_1}+\frac{4\alpha_2 T}{\beta_2}+\alpha_1\right) T k\left(C_2\Delta t\right) \\
& +2\left(1+\frac{6}{\beta_1}+\frac{4\alpha_2 T}{\beta_2}+\alpha_1\right) \int_0^t k\left(E \sup_{0 \leq u \leq s}|x(u)-\bar{X}(u)|^2\right) ds \\
& \leq I_1 \int_0^t E\left(\sup_{0 \leq u \leq s}|x(u)-\bar{X}(u)|^2\right) ds+\int_0^t k\left(E \sup_{0 \leq u \leq s}|x(u)-\bar{X}(u)|^2\right) ds+I_2 k(\Delta t), \quad (19)
\end{aligned}$$

其中

$$I_1=\max\left\{\left(1+6\beta_1+4\alpha_2\beta_2\right), 2\left(1+\frac{6}{\beta_1}+\frac{4\alpha_2 T}{\beta_2}+\alpha_1\right)\right\}; \quad I_2=2\left(1+\frac{6}{\beta_1}+\frac{4\alpha_2 T}{\beta_2}+\alpha_1\right) T C_2.$$

再令 $\tilde{k}(q)=[q+k(q)]$,则有

$$E\left(\sup_{0 \leq s \leq t}|x(s)-\bar{X}(s)|^2\right) \leq I_1 \int_0^t \tilde{k}\left(E \sup_{0 \leq u \leq s}|x(u)-\bar{X}(u)|^2\right) ds+I_2 k(\Delta t). \quad (20)$$

因为 $k(q)$ 是一个连续非降的凹函数,且 $k(0)=0$,所以当 $0 \leq q \leq 1$ 时,有 $qk(1) \leq k(q)$ 。故

$$\int_0^1 \frac{dq}{\tilde{k}(q)} = \int_0^1 \frac{dq}{k(q)+q} \geq \frac{k(1)}{1+k(1)} \int_0^1 \frac{dq}{k(q)} = \infty.$$

令

$$y(t)=E\left(\sup_{0 \leq s \leq t}|x(s)-\bar{X}(s)|^2\right),$$

则式(20)可以重写为

$$y(t) \leq I_1 \int_0^t \tilde{k}(y(s)) ds + I_2 k(\Delta t),$$

由 Bihari 引理,可推出

$$y(t) \leq G^{-1}\left(G\left(I_2 k(\Delta t)\right)+I_1 t\right).$$

易知,当 $\Delta t \rightarrow 0$ 时, $I_2 k(\Delta t) \rightarrow 0$ 。又因为

$$\int_0^1 \frac{dq}{\tilde{k}(q)} = \infty,$$

所以

$$G\left(I_2 k(\Delta t)\right) \rightarrow -\infty, \quad G\left(I_2 k(\Delta t)\right)+I_1 t \rightarrow -\infty,$$

因此

$$G^{-1}\left(G\left(I_2 k(\Delta t)\right)+I_1 t\right) \rightarrow 0,$$

即

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} E\left(\sup_{0 \leq s \leq t}|x(s)-\bar{X}(s)|^2\right) \leq \lim_{\Delta t \rightarrow 0} G^{-1}\left(G\left(I_2 k(\Delta t)\right)+I_1 t\right) = 0.$$

也即得在非 Lipschitz 条件下,方程(1)的 Euler 数值解在均方意义下收敛于解析解。定理 2 得证。

4 数值试验

考虑以下由 G -Brown 运动驱动的随机微分方程:

$$dx(t) = a(x(t))dt + b(x(t))d\langle B, B \rangle(t) + c(x(t))dB(t), \quad t \in [0, T], \tag{21}$$

其中

$$a(x) = \frac{x}{1+|x|}; \quad b(x) = \frac{1}{1+\sqrt{|x|}}; \quad c(x) = \frac{x^2}{1+x^2}.$$

显然, $a, b, c \in M_G^2([0, T]; \mathbf{R}^n)$ 是 Borel 可测的。首先, 计算在 $x=0$ 处的值:

$$|a(0)|^2 + |b(0)|^2 + |c(0)|^2 = 0^2 + 1^2 + 0^2 = 1 \leq K_0.$$

因此, $K_0=1$ 是合理的, 满足条件(H1)。其次, 计算如下增量:

$$|a(x) - a(y)|^2 = \left| \frac{x}{1+|x|} - \frac{y}{1+|y|} \right|^2; \quad |b(x) - b(y)|^2 = \left| \frac{1}{1+\sqrt{|x|}} - \frac{1}{1+\sqrt{|y|}} \right|^2; \\ |c(x) - c(y)|^2 = \left| \frac{x^2}{1+x^2} - \frac{y^2}{1+y^2} \right|^2.$$

当 $x, y \rightarrow 0$ 时, 这些增量均不会发散, 满足条件(H2)的形式, 即存在 $k(q) = q^{1/2}$ 使其成立。此外,

$$\int_0^{+\infty} \frac{dq}{q^{1/2}} = \int_0^{+\infty} q^{-1/2} dq = 2\sqrt{q} \Big|_0^{+\infty} = +\infty,$$

因此, 该函数满足条件(H2)。综上, 方程的系数 $a(x)$ 、 $b(x)$ 和 $c(x)$ 都不满足全局 Lipschitz 条件, 但满足条件(H2)的非 Lipschitz 条件。由式(4)可知, 方程(21)的 Euler 数值解为

$$\bar{X}(t) = X_0 + \int_0^t a(Z(s)) ds + \int_0^t b(Z(s)) d\langle B, B \rangle(s) + \int_0^t c(Z(s)) dB(s), \tag{22}$$

其中 $X_0=1$ 。由定理 2 可知, 对任意的 $t \in [0, T]$ 方程的 Euler 数值解(22)在均方意义下收敛于解析解。

最后, 通过数值试验来验证所推导的理论结果。由于方程(21)的解析解很难得到, 因此在数值模拟时采用步长 $\Delta t = 2 \times 10^{-11}$ 的 Euler 数值解来近似代替解析解。选取 10 000 条样本路径, 并以样本均值来近似期望, 即在终点时间 t_N 处的均方误差为

$$\varepsilon = \left(\frac{1}{10\,000} \sum_{j=1}^{10\,000} |X^j(t_N) - \bar{X}^j(t_N)|^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

其中, $X^j(t_N)$ 和 $\bar{X}^j(t_N)$ 分别表示第 j 条路径上的解析解和 Euler 数值解。

在每条路径上选取 3 种不同的步长 $\Delta t_1 = 2 \times 10^{-7}$ 、 $\Delta t_2 = 2 \times 10^{-9}$ 和 $\Delta t_3 = 2 \times 10^{-10}$, 利用 python 绘制均方误差 ε 与步长 Δt 之间的关系图, 结果如图 1 所示, 其中实线表示数值试验所得的收敛阶, 虚线斜率为 1/2, 用来做参考线。

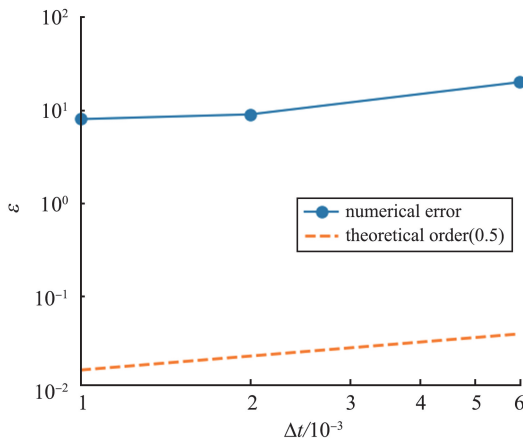


图 1 Euler 方法的收敛性误差
Fig.1 Convergence error plot of Euler method

由图 1 可知,数值试验的收敛阶与给定的参考线 $1/2$ 基本平行,随着步长的减小均方误差 ε 也减小,即方程(21)的 Euler 数值解(22)在均方意义下收敛于解析解,与定理 2 结论一致。

接下来,绘制当步长 $\Delta t=2\times 10^{-9}$ 时 Euler 方法得到的数值解与解析解的拟合图,并计算平均绝对误差 (mean absolute error, MAE),结果如图 2 所示。

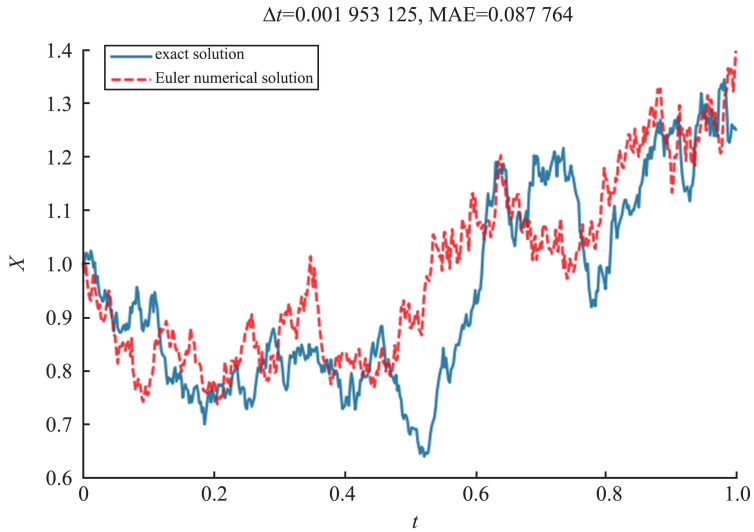


图 2 数值解和解析解的拟合
Fig.2 Fitting plot of numerical and exact solutions

由图 2 可知,数值解虽略有波动,但趋势吻合度较高。数值解和解析解的平均绝对误差为 0.087 764,误差较小,说明数值方法较好地拟合了解析解。

最后,绘制当步长 $\Delta t=2\times 10^{-9}$ 时的数值解和解析解的迭代误差曲面图,迭代路径为 50 000 条,结果如图 3 所示,可以看出,最大绝对误差为 0.25,误差相对较小,说明 Euler 数值方法的效果较好。

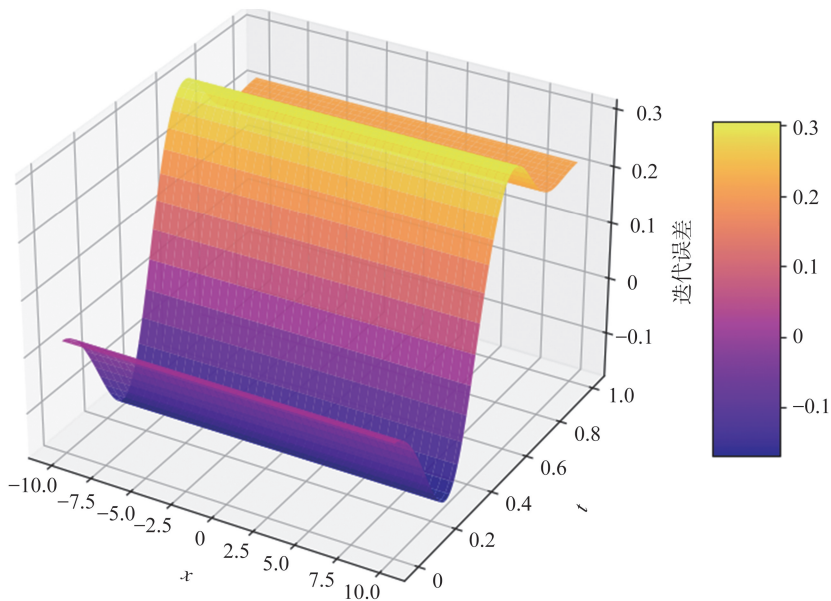


图 3 迭代误差
Fig.3 Iteration error plot

5 结论

本文针对满足非 Lipschitz 条件的由 G -Brown 运动驱动随机微分方程,首先利用 Euler 方法构造出方

程的数值解;其次证明该 Euler 数值解的有界性,进一步证明在均方意义下数值解收敛于解析解;最后通过数值算例进行数值模拟,以理论阶为 $1/2$ 作为参考线,利用 python 绘制了 Euler 数值解的收敛性误差图,得到数值解在均方意义下收敛于解析解;并绘制了解析解和数值解的拟合图,通过误差分析可知最大绝对误差为 0.25,误差相对较小,即 Euler 数值方法的效果较好。

参考文献:

- [1] KHAN I, ALI F, ALI SHAH N. Interaction of magnetic field with heat and mass transfer in free convection flow of a Walters'-B fluid[J]. The European Physical Journal Plus, 2016, 131(4):77.
- [2] 沈庆庆,胡良剑. 随机微分方程的截断 Caratheodory 数值方法[J]. 应用数学与计算数学学报,2018,32(4):786-796.
SHEN Qingqing, HU Liangjian. Truncated Caratheodory numerical method for stochastic differential equations[J]. Communication on Applied Mathematics and Computation, 2018, 32(4):786-796.
- [3] 康红喜,张引娣,蒋茜. 随机微分方程平衡 θ -Heun 法的收敛性[J]. 郑州大学学报(理学版),2020,52(4):89-95.
KANG Hongxi, ZHANG Yindi, JIANG Qian. Convergence of balanced θ -Heun method for stochastic differential equations [J]. Journal of Zhengzhou University (Natural Science Edition), 2020, 52(4):89-95.
- [4] PLATEN E. An introduction to numerical methods for stochastic differential equations[J]. Acta Numerica, 1999, 8:197-246.
- [5] MAO X R, SABANIS S. Numerical solutions of stochastic differential delay equations under local Lipschitz condition[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2003, 151(1):215-227.
- [6] 范振成,宋明辉. 非全局 Lipschitz 条件下随机延迟微分方程 Euler 方法的收敛性[J]. 计算数学,2011,33(4):337-344.
FAN Zhencheng, SONG Minghui. Convergence of Euler methods for stochastic delay differential equations under non-global Lipschitz conditions[J]. Mathematica Numerica Sinica, 2011, 33(4):337-344.
- [7] LI Y Y, FEI W Y, DENG S N. Delay feedback stabilization of stochastic differential equations driven by G -Brownian motion [J]. International Journal of Control, 2022, 95(9):2499-2509.
- [8] LI H W, SONG Y S. Backward stochastic differential equations driven by G -Brownian motion with double reflections[J]. Journal of Theoretical Probability, 2021, 34(4):2285-2314.
- [9] YIN W S, CAO J D. Nonlocal stochastic differential equations with time-varying delay driven by G -Brownian motion[J]. Mathematical Methods in the Applied Sciences, 2020, 43(2):600-612.
- [10] LI H W, LIU G M. Multi-dimensional reflected backward stochastic differential equations driven by G -Brownian motion with diagonal generators[J]. Journal of Theoretical Probability, 2024, 37(3):2615-2645.
- [11] GAO F Q. Pathwise properties and homeomorphic flows for stochastic differential equations driven by G -Brownian motion[J]. Stochastic Processes and Their Applications, 2009, 119(10):3356-3382.
- [12] BAI X P, LIN Y Q. On the existence and uniqueness of solutions to stochastic differential equations driven by G -Brownian motion with integral-Lipschitz coefficients[J]. Acta Mathematicae Applicatae Sinica, English Series, 2014, 30(3):589-610.
- [13] 李光洁,杨启贵. G -Brown 运动驱动的中立型随机时滞微分方程的指数稳定性[J]. 高校应用数学学报 A 辑,2021,36(1):45-52.
LI Guangjie, YANG Qigui. Exponential stability of neutral stochastic delay differential equations driven by G -Brownian motion[J]. Applied Mathematics A Journal of Chinese Universities, 2021, 36(1):45-52.
- [14] ZHENG G Q. Local well-posedness of coupled backward stochastic differential equations driven by G -Brownian motions[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2022, 506(1):125540.
- [15] GU Z H, LIN Y Q, XU K. Quadratic BSDEs with mean reflection driven by G -Brownian motion[J]. Stochastics and Dynamics, 2023, 23(5):2350044.
- [16] HU L Y, REN Y, HE Q. Pantograph stochastic differential equations driven by G -Brownian motion [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2019, 480(1):123381.
- [17] 韩敏,刘亚相. 非李普希兹条件下 G -布朗运动驱动的随机微分方程的随机平均原理研究(英文)[J]. 应用概率统计, 2017,33(3):297-309.
HAN Min, LIU Yaxiang. Stochastic averaging for non-Lipschitz stochastic differential equations with G -Brownian motion[J]. Chinese Journal of Applied Probability and Statistics, 2017, 33(3):297-309.
- [18] FAIZULLAH F, BU X M, MA R A, et al. Existence and stability of solutions to non-linear neutral stochastic functional differential equations in the framework of G -Brownian motion[J]. Advances in Difference Equations, 2017(1):350.