

度量空间中一致域的一个等价刻画

严沙沙,刘红军*,颜芳,夏令

(贵州师范大学数学科学学院,贵州 贵阳 550025)

摘要:研究度量空间中一致域的相关性质,并证明度量空间中一致域的一个等价性结果。

关键词:一致域;John域;条件 $A(\delta)$; (α, β) 类;度量空间

中图分类号:O174.55 **文献标志码:**A

引用格式:严沙沙,刘红军,颜芳,等.度量空间中一致域的一个等价刻画[J].山东大学学报(理学版),2026,61(4):109-116.

An equivalence characterization of uniform domains in metric spaces

YAN Shasha, LIU Hongjun*, YAN Fang, XIA Ling

(School of Mathematical Sciences, Guizhou Normal University, Guiyang 550025, Guizhou, China)

Abstract: Some related properties of uniform domains in metric spaces are investigated, and an equivalence result of uniform domains in metric spaces is proved.

Key words: uniform domain; John domain; condition $A(\delta)$; $\text{type}(\alpha, \beta)$; metric space

0 引言

假设 (X, d) 是一个度量空间,记为 X 。令 D 是 X 的非空子区域, $\text{dist}(x, \partial D)$ 表示 x 到 D 的边界 ∂D 的距离, D 的直径记为 $\text{diam}(D)$ 。对于任意的 $x \in D$ 和 $r > 0$, $B(x, r) = \{y \in D, d(x, y) < r\}$ 、 $\bar{B}(x, r) = \{y \in D, d(x, y) \leq r\}$ 、 $S(x, r) = \{y \in D, d(x, y) = r\}$ 分别表示以 x 为中心, r 为半径的度量开球、闭球以及球面。

为了研究欧氏空间中 bi-Lipschitz 映射的近似理论和单叶性的问题,John^[1]引进 John 域的概念, Martio 等^[2]继续讨论映射的单叶性问题,引进一致域的概念。Martio^[3]介绍欧氏空间中 John 域和一致域的相关性质,研究 John 域和一致域之间的关系。由于一致域在研究拟对称映射、拟共形映射、拟双曲映射等都起着至关重要的作用,因此对一致域性质的研究得到了学者们的极大关注和广泛应用,在欧氏空间和 Banach 空间中已有很多一致域性质的相关结论^[4-12],度量空间中关于一致域的研究见文献[13-20]。本文旨在度量空间中继续研究一致域的一些等价性质。

1 预备知识及主要结论

曲线是指任意连续映射 $\gamma: [a, b] \rightarrow X$, γ 的长度定义为

$$l(\gamma) = \sup \left\{ \sum_{i=1}^n d(\gamma(t_i), \gamma(t_{i-1})) \right\},$$

式中的上确界针对 $[a, b]$ 的任意划分 $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ 所取。如果 $l(\gamma) < \infty$,则称曲线 γ 是可求长的。 γ 在

收稿日期:2024-04-25;网络出版时间:2025-12-17

基金项目:国家自然科学基金资助项目(12461012);贵州省科学技术基金资助项目(黔科合基础 MS[2026]476,黔科合基础-ZK[2021]一般 001)

第一作者:严沙沙(2001—),女,硕士研究生,研究方向为拟共形映射与度量空间上的分析。E-mail:3072269500@qq.com

*通信作者:刘红军(1987—),男,副教授,博士,研究方向为拟共形映射与度量空间上的分析。E-mail:hongjunliu@gznu.edu.cn

X 中的像仍然记为 γ , γ 以 x 和 y 为端点的子曲线记为 $\gamma[x, y]$ 。长度函数指 $s_\gamma: [a, b] \rightarrow [0, l(\gamma)]$, 它由 $s_\gamma(t) = l(\gamma[a, t])$ 给出。任意的可求长曲线 $\gamma: [a, b] \rightarrow X$, 都存在唯一的曲线 $\gamma_s: [0, l(\gamma)] \rightarrow X$, 使得 $\gamma = \gamma_s \circ s_\gamma$, 而且对于任意的 $t \in [0, l(\gamma)]$, 进一步有 $l(\gamma_s[0, t]) = t$, 其中 γ_s 称作曲线 γ 的弧长参数化。

在下文中, 将可求长曲线 γ 进行弧长参数化, 记 γ_s 为 γ 。设 $l(\gamma) = L$, 若给定一条可求长曲线为 $\gamma: [0, L] \rightarrow X$ 连接 x 和 x_0 , 使得 $\gamma(0) = x$, $\gamma(L) = x_0$ 。定义 $|\gamma|$ 为 $\gamma: [0, L] \rightarrow X$ 的轨迹, γ^{-1} 为 $\gamma: [0, L] \rightarrow X$ 的逆映射, $\bar{\gamma}$ 为 $\gamma: [0, L] \rightarrow X$ 的扭转映射, 其中曲线 $\bar{\gamma}: [0, L] \rightarrow X$ 是连接 x_0 和 x , 使得 $\bar{\gamma}(0) = x_0$, $\bar{\gamma}(L) = x$ 且 $\bar{\gamma}(t) = \gamma(L-t)$ 。

定义 1^[3] 设 D 是 X 的非空真子区域, $0 < \alpha \leq \beta < \infty$, 如果存在点 $x_0 \in D$, 对于任意的 $x \in D$, 都存在可求长曲线 $\gamma: [0, L] \rightarrow D$ 连接 x 和 x_0 , 使得 $\gamma(0) = x$ 和 $\gamma(L) = x_0$, γ 满足 $L \leq \beta$, 且 $\text{dist}(\gamma(t), \partial D) \geq \frac{\alpha}{L}t$, $t \in [0, L]$, 则称 D 是一个 (α, β) -John 域, 其中 x_0 称为 D 的中心。

定义 2^[3] 设 D 是 X 的非空真子区域, 如果对于 $x, y \in D \subset X$, $x \neq y$, 那么存在子区域 $G \subset D$, 使得 $x, y \in G$, 而且 G 为 $(\alpha d(x, y), \beta d(x, y))$ -John 域, 则称 D 是 (α, β) -一致域。

定义 3^[3] 设 D 是 X 的非空真子区域, 如果对于 $x, y \in D \subset X$, $x \neq y$, 那么存在 D 中的可求长曲线 $\gamma: [0, L] \rightarrow D$ 连接 x 和 y , 使得 $\gamma(0) = x$ 和 $\gamma(L) = y$, 则称 D 属于 (α, β) 类, 其中 γ 满足:

- (i) $L \leq \beta d(x, y)$;
- (ii) $\text{dist}(\gamma(t), \partial D) \geq \frac{\alpha}{\beta} \cdot \min\{L-t, t\}$, $t \in [0, L]$ 。

定义 4^[3] 设 D 是 X 的非空真子区域且 $0 < \delta \leq 1$, 如果对于 $x, y \in D \subset X$, $x \neq y$, 那么存在可求长曲线 $\gamma: [0, L] \rightarrow D$ 连接 x 和 y , 使得 $\gamma(0) = x$ 和 $\gamma(L) = y$, 则称 D 满足条件 $A(\delta)$, 其中 γ 满足:

- (i) $\text{diam}|\gamma| \leq \frac{d(x, y)}{\delta}$;
- (ii) $\gamma[0, t] \subset \bar{B}\left(\gamma(t), \frac{1}{\delta} \text{dist}(\gamma(t), \partial D)\right)$, $0 \leq t \leq \frac{L}{2}$;
- (iii) $\gamma[t, L] \subset \bar{B}\left(\gamma(t), \frac{1}{\delta} \text{dist}(\gamma(t), \partial D)\right)$, $\frac{L}{2} \leq t \leq L$ 。

定义 5^[3] 设 D 是 X 的非空真子区域, 若对于 $x_1, x_2 \in D$, $x_1 \neq x_2$, 且存在连续集 E 包含 x_1 和 x_2 , 使得

$$(x, y, x_i, x_j) = \frac{d(x, y)d(x_i, x_j)}{d(x, x_i)d(x_j, y)} \geq \delta, \quad i, j = 1, 2, i \neq j,$$

则称 D 是 δ -一致域, 其中 $x \in E \setminus \{x_1, x_2\}$, $y \in X \setminus D$ 。

注 1 如果 $y = \infty$, 那么 $(x, y, x_i, x_j) = \frac{d(x_i, x_j)}{d(x, x_j)}$ 。

定义 6^[20] 设 X 是一个度量空间, 对于任意的度量开球 $B(x, r) \subset X$, 且 $r < \text{diam}(X)$, 如果存在常数 $C_0 \geq 1$ 和 $Q > 1$, 使得

$$C_0^{-1}r^Q \leq \mathcal{H}_Q(B(x, r)) \leq C_0r^Q,$$

则称 X 为 Q -regular 空间, 其中 \mathcal{H}_Q 记为度量空间 X 中的 Hausdorff 测度。

定理 1 设 X 是 Q -regular 度量空间, D 是 X 的非空真子区域, 则下列条件互相等价:

- (i) D 是 (α, β) -一致域;
- (ii) D 属于 (α', β') 类;
- (iii) D 满足条件 $A(\delta)$;
- (iv) D 是 δ' -一致域,

其中常数 $\alpha, \beta, \alpha', \beta', \delta, \delta'$ 是互相依赖的。

2 重要的引理

引理 1 设 X 是一个度量空间, D 是 X 的非空真子区域, x_0 为 D 的中心, 如果存在常数 $0 < \alpha \leq \beta < \infty$, 使

得 $x \in D$, 存在可求长曲线 $\gamma: [0, L] \rightarrow D$ 连接 x 和 x_0 , 并且对于任意的 $t \in [0, L]$, γ 满足 $L \leq \beta$ 和 $\text{dist}(\gamma(t), \partial D) \geq \frac{\alpha t}{\beta}$, 进一步得到 D 是一个 (α_1, β_1) -John 域, 其中, $\alpha_1 = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 \frac{\text{diam}(D)}{2}$, $\beta_1 = \beta$ 。

证明 设 $p = \frac{\alpha \text{diam}(D)}{2\beta}$, 则

$$\text{diam}(D) \leq 2L \leq 2\beta \text{ 和 } B(x_0, p) \subset D。$$

由于 $\alpha \leq \beta$, 因此得 $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 \frac{\text{diam}(D)}{2} \leq \beta$ 。

假设对于任意的 $x \in D$, 存在可求长曲线 $\gamma: [0, L] \rightarrow D$ 连接 x 和 x_0 , 且满足 $\text{dist}(\gamma(t), \partial D) \geq \frac{\alpha t}{\beta}$, 其中 $t \in [0, L]$ 。根据 $p = \frac{\alpha \text{diam}(D)}{2\beta}$ 和 $\text{diam}(D) \leq 2L$, 得 $p \leq L$, 则

$$\text{dist}(\gamma(t), \partial D) \geq \frac{\alpha t}{\beta} \geq \frac{\alpha p t}{\beta L} = \frac{\alpha^2 \cdot \text{diam}(D) t}{2\beta^2 L},$$

D 是一个 $\left(\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 \frac{\text{diam}(D)}{2}, \beta\right)$ -John 域, 引理 1 得证。

引理 2 设 X 是 Q -regular 度量空间, D 是 X 的非空真子区域, $0 < \delta \leq 1$, 如果对所有的 $x, x_0 \in D \subset X$, $x \neq x_0$, 都存在 D 中的可求长曲线 $\gamma: [0, 1] \rightarrow D$ 连接 x 和 x_0 , 使得对于 $0 \leq t \leq 1$, 有

$$\gamma[0, t] \subset B\left(\gamma(t), \frac{1}{\delta} \text{dist}(\gamma(t), \partial D)\right),$$

则存在可求长的道路 $\gamma_1: [0, L] \rightarrow D$ 连接 x 和 x_0 且满足 $L \leq \frac{d(x, x_0)}{C^2}$ 和 $\text{dist}(\gamma_1(t), \partial D) \geq Ct$, 其中 $t \in [0, L]$, 以及 $C \in (0, 1]$ 取决于 δ 和 Q 。

证明 固定 $x \in D$, 设 $g: [0, 1] \rightarrow [0, h]$, 使得

$$g(t) = (1+t) \cdot \max_{0 \leq s \leq t} d(\gamma(s), x), \quad t \in [0, 1],$$

其中 $h = 2 \max_{0 \leq s \leq 1} d(\gamma(s), x)$ 。令 $\gamma' = \gamma \circ g^{-1}: [0, h] \rightarrow D$, 对于任意的 $t \in [0, 1]$, 有

$$\frac{1}{2} g(t) \leq \max_{0 \leq s \leq t} d(\gamma(s), x) \leq \frac{2}{\delta} \text{dist}(\gamma(t), \partial D),$$

对于任意的 $\tau \in [0, h]$, 得

$$d(\gamma'(\tau), x) \leq \tau, \tag{1}$$

$$\frac{\delta}{4} \tau \leq \text{dist}(\gamma'(\tau), \partial D)。 \tag{2}$$

通过归纳, 定义序列 $h = \tau_0 \geq \tau_1 \geq \dots \geq 0$, 设 $x_i = \gamma'(\tau_i)$, $i = 0, 1, \dots$,

$$\tau_{i+1} = \inf \left\{ \tau \in (0, \tau_i) : d(\gamma'(\tau), \gamma'(\tau_i)) \leq \frac{\delta \tau_i}{8} \right\}。$$

再结合不等式(2), 得 $B(x_i, (\delta/4)\tau_i) \subset D$ 。

断言 1 存在整数 $\mu = \mu(\delta)$, 对于任意的 $\mu \leq k$, 有 $\tau_{i+k} \leq \frac{1}{2} \tau_i$ 。

固定整数 i , 对于 $j = i+1, i+2, \dots, i+k$, 假设 $\tau_j > \frac{\tau_i}{2}$, 对于任意的 $i \leq j < n \leq i+k$, 有

$$x_n \notin B\left(x_j, \frac{\delta \tau_j}{8}\right)。$$

令 $B_j = B\left(x_j, \frac{\delta \tau_j}{16}\right)$, 则 B_j 是互不相交的。再结合不等式(1), 推出 $B_j \subset B(x, 2\tau_i)$ 。设 \mathcal{H}_Q 是 X 中的 Hausdorff

测度,存在常数 $C_0 \geq 1$ 和 $Q > 1$,使得对于上述 $B_j \subset B(x, 2\tau_i)$,有

$$\mathcal{H}_Q(B(x, 2\tau_i)) \leq C_0(2\tau_i)^Q \text{ 和 } \mathcal{H}_Q(B(x, 2\tau_i)) \geq \sum_{j=i+1}^{i+k} \mathcal{H}_Q(B_j) \geq kC_0^{-1} \left(\frac{\delta\tau_i}{16}\right)^Q,$$

得 $k \leq C_0^2 2^{5Q} \delta^{-Q}$ 。选择整数 μ , 满足

$$0 \leq \mu - C_0^2 2^{5Q} \delta^{-Q} < 1,$$

使得 $\tau_{i+k} \leq \frac{\tau_i}{2}$, 断言 1 得证。

定义 $\gamma_2: [0, L] \rightarrow D$ 是连接 x_i 和 x_{i+1} 的近测地线组成的曲线, 令 $\gamma_1(\tau) = \gamma_2(L - \tau)$, 其中 $\tau \in [0, L]$, 和 $y = \gamma_2(\tau)$, 假设 $y \in [x_{i_0}, x_{i_0+1}]$, 令 $l_y = l(\gamma_2[\tau, L])$, 由断言 1 得

$$l_y \leq \sum_{j=i_0}^{\infty} d(x_j, x_{j+1}) \leq \sum_{j=i_0}^{\infty} \frac{\delta\tau_j}{8} = \frac{\delta}{8} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{j=k\mu}^{(k+1)\mu-1} \tau_{i_0+j} \right) \leq \frac{\delta}{8} \sum_{k=0}^{\infty} \mu 2^{-k} \tau_{i_0} = \frac{\delta\mu\tau_{i_0}}{4}. \tag{3}$$

结合 $x_{i_0+1} \in \bar{B}\left(x_{i_0}, \frac{\delta\tau_{i_0}}{8}\right)$ 和不等式(2), 有

$$\text{dist}(y, \partial D) \geq \frac{\delta\tau_{i_0}}{8}. \tag{4}$$

根据 $\tau_{i_0} > 0$, 再结合不等式(3)和(4), 得

$$\frac{\text{dist}(y, \partial D)}{l_y} \geq \frac{1}{2\mu} \geq \frac{1}{2(C_0^2 2^{5Q} \delta^{-Q} + 1)} \geq C_0^{-2} 2^{-6Q} \delta^Q,$$

则 $l_y \leq \delta\mu\tau_{i_0}/4 \leq \delta\mu\tau_0/4 < \infty$ 。又因为 $h = 2 \max_{0 \leq s \leq 1} d(\gamma(s), x)$, 所以存在常数 $M \geq 1$, 使得 $h \leq Md(x, x_0)$, 其中 M 与 δ 相关, 进一步地, 有

$$L \leq \frac{\delta\mu\tau_0}{4} = \frac{\delta\mu h}{4} \leq \frac{\delta}{4} (1 + C_0^2 2^{5Q} \delta^{-Q}) h \leq MC_0^2 2^{6Q} \delta^{-Q} d(x, x_0).$$

令 $C = M^{-1} C_0^{-2} 2^{-6Q} \delta^Q$, 有 $L \leq \frac{d(x, x_0)}{C^2}$ 和 $\text{dist}(\gamma_1(t), \partial D) \geq Ct$, 即 γ_1 就是需要的曲线。证毕。

引理 3 设 X 是 Q -regular 度量空间, D 是 X 的非空真子区域, 如果 D 满足条件 $A(\delta)$, 则 D 属于 (α_1, β_1) 类, 其中 $\alpha_1 = 1$, $\beta_1 = \frac{2}{C^2\delta}$, C 与 δ, Q 相关。

证明 已知 D 满足条件 $A(\delta)$, 对于任意的 $x_1, x_2 \in D$, 存在道路 $\gamma: [0, L] \rightarrow D$ 满足

$$\begin{aligned} \text{diam}|\gamma| &\leq \frac{d(x_1, x_2)}{\delta}, \\ \gamma[0, t] &\subset \bar{B}\left(\gamma(t), \frac{1}{\delta} \text{dist}(\gamma(t), \partial D)\right), \quad 0 \leq t \leq \frac{L}{2}, \\ \gamma[t, L] &\subset \bar{B}\left(\gamma(t), \frac{1}{\delta} \text{dist}(\gamma(t), \partial D)\right), \quad \frac{L}{2} \leq t \leq L. \end{aligned}$$

假设 $L=2$, $x_0 = \gamma(1)$, 根据引理 2, 存在可求长的道路 $\gamma_i: [0, L_i] \rightarrow D$ 连接 x_i 到 x_0 , 满足 $L_i \leq \frac{d(x_i, x_0)}{C^2}$ 和 $\text{dist}(\gamma_i(t), \partial D) \geq Ct$, 其中 $0 < C \leq 1$, 且 C 取决于 δ 和 Q 。

考虑 $\gamma' = \gamma_1 \cup \bar{\gamma}_2: [0, L_1 + L_2] \rightarrow D$, 结合不等式 $\text{diam}(|\gamma_i|) \leq \frac{d(x_1, x_2)}{\delta}$, 有

$$L_1 + L_2 \leq \frac{d(x_1, x_0) + d(x_2, x_0)}{C^2} \leq \frac{2d(x_1, x_2)}{C^2\delta},$$

$$\text{dist}(\gamma'(t), \partial D) \geq Ct \geq \frac{C^2\delta}{2}t.$$

则 D 属于 (α_1, β_1) 类,其中, $\alpha_1 = 1, \beta_1 = \frac{2}{C^2\delta}$ 。

3 定理 1 的证明

定理 1 的证明思路是 (i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (iv) \Rightarrow (i), 接下来逐步证明。

(i) \Rightarrow (ii)。已知 D 是 (α, β) -一致域, 设 x_0 为 D 的中心, 对于任意的 $x_1, x_2 \in D$, 存在可求长道路 $\gamma_i: [0, L_i] \rightarrow D$ 连接 x_i 和 D 的中心 x_0 , 并且满足

$$L_i \leq \beta d(x_1, x_2), \tag{5}$$

$$\text{dist}(\gamma_i(t), \partial D) \geq \frac{\alpha d(x_1, x_2)}{L_i} t, \quad t \in [0, L_i]. \tag{6}$$

根据不等式(5)和(6), 得

$$\text{dist}(\gamma_i(t), \partial D) \geq \frac{\alpha d(x_1, x_2)}{L_i} t \geq \frac{\alpha}{\beta} t. \tag{7}$$

考虑 $\gamma = \gamma_1 \cup \bar{\gamma}_2: [0, L_1 + L_2] \rightarrow D$, 接下来证明 D 属于 (α', β') 类。根据不等式(5), 得

$$L_1 + L_2 \leq 2\beta d(x_1, x_2)。$$

再结合不等式(7), 得

$$\text{dist}(\gamma(t), \partial D) \geq \frac{\alpha}{\beta} t \geq \frac{\alpha}{2\beta} t。$$

则 D 属于 (α', β') 类, 其中 $\alpha' = \alpha, \beta' = 2\beta$ 。

(ii) \Rightarrow (iii)。已知 D 属于 (α', β') 类, 对于任意的 $x, y \in D$, 存在 D 中的可求长曲线 $\gamma: [0, L'] \rightarrow D$, 满足

$$L' \leq \beta' d(x, y), \tag{8}$$

$$\text{dist}(\gamma(t), \partial D) \geq \frac{\alpha'}{\beta'} \cdot \min\{L'-t, t\}, \quad t \in [0, L']. \tag{9}$$

结合不等式(8)和(9), 推出

$$\begin{aligned} \text{diam}(|\gamma|) &\leq L' \leq \beta' d(x, y), \\ \gamma[0, t] &\subset \bar{B}(\gamma(t), t) \subset \bar{B}\left(\gamma(t), \frac{\beta'}{\alpha'} \text{dist}(\gamma(t), \partial D)\right), \quad t \in \left[0, \frac{L'}{2}\right]. \end{aligned}$$

再根据对称性, 对于 $\left[\frac{L'}{2}, L'\right]$ 内的曲线 $\gamma[t, L']$ 也有相同的结论, 得到 D 满足条件 $A(\delta)$, 其中 $\delta = \min\left(\frac{1}{\beta'}, \frac{\alpha'}{\beta'}\right)$ 。

(iii) \Rightarrow (iv)。已知 D 满足条件 $A(\delta)$, 根据引理 3 可得, D 属于 (α_1, β_1) 类, 其中, $\alpha_1 = 1, \beta_1 = \frac{2}{C^2\delta}$ 。

接下来证明 D 是 δ' -一致域, 其中 δ' 取决于 δ 和 Q 。

设 $x_1, x_2 \in D, x_1 \neq x_2$, 存在可求长曲线 $\gamma: [0, L] \rightarrow D$ 连接 x_1 和 x_2 , 并且满足

$$L \leq \beta_1 d(x_1, x_2),$$

$$\text{dist}(\gamma(t), \partial D) \geq \frac{\alpha_1}{\beta_1} \cdot \min\{L-t, t\}, \quad t \in [0, L].$$

对于 $t \in (0, L)$, 令 $x = \gamma(t), x \neq x_1, x_2$, 并且 $y \in X \setminus D$, 设 $t \leq \frac{L}{2}$, 下面分 2 个步骤进行讨论。

步骤 1 证明 $d(x, y, x_1, x_2) \geq \delta_1$, 其中 $\delta_1 = \min\left\{\frac{\alpha_1}{4\beta_1^2}, \frac{3}{4\beta_1}\right\}$ 。若 $d(x_2, y) \leq 4\beta_1 d(x_1, x_2)$, 结合不等式

$\text{dist}(\gamma(t), \partial D) \geq \frac{\alpha_1}{\beta_1} \cdot \min\{L-t, t\}$, 有

$$(x, y, x_1, x_2) = \frac{d(x, y)d(x_1, x_2)}{d(x, x_1)d(x_2, y)} \geq \frac{\alpha_1 \cdot \min\{L-t, t\} \cdot d(x_1, x_2)}{\beta_1 t d(x_2, y)} \geq \frac{\alpha_1}{4\beta_1^2}. \quad (10)$$

若 $d(x_2, y) > 4\beta_1 d(x_1, x_2)$, 结合三角不等式和 $L \leq \beta_1 d(x_1, x_2)$, 有

$$\frac{d(x, y)}{d(x_2, y)} \geq \frac{d(x_2, y) - d(x, x_2)}{d(x_2, y)} \geq \frac{d(x_2, y) - \beta_1 d(x_1, x_2)}{d(x_2, y)} \geq \frac{3}{4}. \quad (11)$$

再次利用不等式 $L \leq \beta_1 d(x_1, x_2)$, 得

$$\frac{d(x_1, x_2)}{d(x, x_1)} > \frac{d(x_1, x_2)}{\beta_1 d(x_1, x_2)} = \frac{1}{\beta_1}. \quad (12)$$

结合不等式(11)、(12), 得

$$\frac{d(x, y)d(x_1, x_2)}{d(x, x_1)d(x_2, y)} \geq \frac{3}{4\beta_1}. \quad (13)$$

联合不等式(10)、(13), 推出

$$(x, y, x_1, x_2) = \frac{d(x, y)d(x_1, x_2)}{d(x, x_1)d(x_2, y)} \geq \delta_1,$$

其中 $\delta_1 = \min\left\{\frac{\alpha_1}{4\beta_1^2}, \frac{3}{4\beta_1}\right\}$.

步骤 2 证明 $(x, y, x_2, x_1) \geq \delta_2$, 其中 $\delta_2 = \frac{\alpha_1}{\beta_1(\beta_1 + \alpha_1)}$. 若 $d(x, y) < \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \beta_1} d(y, x_1)$, 则

$$d(x_1, x) \geq d(y, x_1) - d(y, x) \geq \frac{\beta_1}{\alpha_1 + \beta_1} d(y, x_1),$$

$$d(x, y) \geq \frac{\alpha_1 t}{\beta_1} \geq \frac{\alpha_1 d(x, x_1)}{\beta_1} \geq \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \beta_1} d(y, x_1),$$

与假设相矛盾, 因此 $d(x, y) \geq \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \beta_1} d(y, x_1)$. 利用 $L \leq \beta_1 d(x_1, x_2)$, 推出

$$(x, y, x_2, x_1) = \frac{d(x, y)d(x_1, x_2)}{d(x, x_2)d(x_1, y)} \geq \frac{\alpha_1 d(x_1, x_2) / (\beta_1 + \alpha_1)}{d(x, x_2)} \geq \frac{\alpha_1 d(x_1, x_2)}{\beta_1(\beta_1 + \alpha_1) d(x_1, x_2)} = \frac{\alpha_1}{\beta_1(\beta_1 + \alpha_1)}.$$

综上所述, 对于 $i, j = 1, 2, i \neq j$, 当 $t \in \left[0, \frac{L}{2}\right]$ 时, 得

$$(x, y, x_i, x_j) = \frac{d(x, y)d(x_i, x_j)}{d(x, x_i)d(x_j, y)} \geq \delta',$$

其中

$$\delta' = \min\left\{\frac{\alpha_1}{4\beta_1^2}, \frac{3}{4\beta_1}, \frac{\alpha_1}{\beta_1(\beta_1 + \alpha_1)}\right\}.$$

根据对称性, 当 $t \in \left[\frac{L}{2}, L\right]$ 时, 得 $(x, y, x_i, x_j) \geq \delta'$, 因此 D 是 δ' -一致域。

(iv) \Rightarrow (i). $x_1, x_2 \in D, x_1 \neq x_2$, 令 E 是 δ' -一致域中的连续集, 设 E_1 是 E 的子集, 使得 E_1 连接 $S\left(x_1, \frac{d(x_1, x_2)}{2}\right)$ 和 $S\left(x_2, \frac{d(x_1, x_2)}{2}\right)$.

断言 2 设 $x_0 \in E_1 \cap S\left(x_1, \frac{d(x_1, x_2)}{2}\right)$, 存在曲线 η_1 连接 x_0 和 x_1 , 且满足

$$\eta_1[0, t] \subset \bar{B}\left(\eta_1(t), \frac{1}{\kappa} \text{dist}(\eta_1(t), \partial D)\right), \quad (14)$$

其中 κ 取决于 δ' .

设 $z_0 = x_0, z_1 \in E \cap S\left(x_1, \frac{d(x_1, x_2)}{2^2}\right)$, 因为 D 是 δ' -一致域, 所以存在一个连续集包含 z_0 和 z_1 , 并满足 $(z_1, y, x_i, x_j) \geq \delta'$, 其中 $i, j = 1, 2, i \neq j, y \in X \setminus D$. 设包含 z_0 和 z_1 的连续集为 γ_0 , 重复上述步骤, 由

$$z_i \in E \cap S\left(x_1, \frac{1}{2^{i+1}}d(x_1, x_2)\right),$$

给出 γ_i 的定义, 固定 i , 令 $y'_i \in X \setminus D$, 并且满足 $d(z_i, y'_i) = \text{dist}(z_i, X \setminus D)$, 显然有

$$\text{dist}(z_i, X \setminus D) \geq \frac{\delta' d(x_1, x_2) d(x_2, y'_i)}{2^{i+1} d(x_1, x_2)} \geq \frac{\delta' d(x_2, y'_i)}{2^{i+1}}. \tag{15}$$

以下分 2 种情形继续讨论。

情形 1 $d(x_2, y'_i) < \frac{d(x_1, x_2)}{2}$. 设 η_1 为连接 x_0 和 x_1 的测地线段, 显然 η_1 满足式(14)。

情形 2 $d(x_2, y'_i) \geq \frac{d(x_1, x_2)}{2}$. 结合不等式(15)和假设 $d(x_2, y'_i) \geq \frac{d(x_1, x_2)}{2}$, 显然有

$$\text{dist}(z_i, X \setminus D) \geq \frac{\delta' d(x_1, x_2)}{2^{i+2}} = r_i, \quad i = 0, 1, \dots.$$

若 $x \in |\gamma_i| \setminus \bigcup_{j=i, i+1} B\left(z_j, \frac{r_j}{2}\right)$, 根据 δ' -一致域的定义, 对于任意的 $y \in X \setminus D$, 则

$$d(x, y) \geq \frac{\delta' d(x, z_i) d(y, z_{i+1})}{d(z_i, z_{i+1})}.$$

又因为 $d(x, z_i) \geq \frac{r_i}{2}, d(y, z_{i+1}) \geq r_{i+1}$ 和 $d(z_i, z_{i+1}) \leq \frac{2d(x_1, x_2)}{2^{i+1}}$, 所以有

$$d(x, y) \geq \frac{(\delta')^3 d(x_1, x_2)}{2^{i+6}}. \tag{16}$$

若 $x \in |\gamma_i| \cap \bigcup_{j=i, i+1} \bar{B}\left(z_j, \frac{r_j}{2}\right)$, 则根据三角不等式以及假设条件, 得

$$d(x, y) \geq d(y, z_j) - d(x, z_j) \geq r_j - \frac{r_j}{2} = \frac{\delta' d(x_1, x_2)}{2^{j+3}}, \quad j = i, i+1. \tag{17}$$

联合不等式(16)、(17), 对于任意的 $y \in X \setminus D$, 有

$$d(x, y) \geq \min\left\{\frac{(\delta')^3 d(x_1, x_2)}{2^{i+6}}, \frac{\delta' d(x_1, x_2)}{2^{j+3}}\right\} = \frac{(\delta')^3 d(x_1, x_2)}{2^{i+6}}. \tag{18}$$

组合 γ_i 合成曲线 η_1 , 进一步证明 η_1 满足式(14)。当 $y = \infty$ 时, 由 $(z, y, z_j, z_{j+1}) \geq \delta'$, 得

$$d(z, z_j) \leq \frac{d(z_j, z_{j+1})}{\delta'} \leq \frac{2d(x_1, x_2)}{\delta' 2^{j+1}}.$$

对于任意的 $z \in |\gamma_j|$, 有

$$d(z, x_1) \leq d(x_1, z_j) + d(z, z_j) \leq d(x_1, z_j) + \frac{d(x_1, x_2)}{\delta' 2^j} \leq \frac{d(x_1, x_2)}{2^{j+1}} + \frac{d(x_1, x_2)}{\delta' 2^j} \leq \frac{2d(x_1, x_2)}{\delta' 2^j}. \tag{19}$$

若 $x \in \eta_1$, 则存在 i , 使得 $x \in \gamma_i$, 结合不等式(18)、(19), 得

$$d(z, x) \leq d(x, x_1) + d(z, x_1) \leq \frac{4d(x_1, x_2)}{2^i \delta'} \leq \frac{1}{\kappa} \text{dist}(x, X \setminus D),$$

这里 $\kappa = \frac{(\delta')^4}{256}$. 即断言 2 得证。

由曲线 η_1 连接 x_0 和 x_1 满足式(14), 根据对称性, 找到满足相似条件的曲线 η_2 连接 x_0 和 x_2 , 令 $\eta = \bar{\eta}_1 \cup \eta_2$, 即 D 满足条件 $A(\kappa)$, 再结合引理 1.3 以及文献[3]定理 3.4, 因此 D 是 (α_2, β_2) -一致域, 其中 α_2, β_2 依赖于 δ' 和 Q . 定理 1 得证。

参考文献:

- [1] JOHN F. Rotation and strain[J]. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 1961, 14(3):391-413.
- [2] MARTIO O, SARVAS J. Injectivity theorems in plane and space[J]. *Annales Academiæ Scientiarum Fennicæ (Series A: Mathematica)*, 1979, 4:383-401.
- [3] MARTIO O. Definitions for uniform domains[J]. *Annales Academiæ Scientiarum Fennicæ (Series A: Mathematica)*, 1980, 5:197-205.
- [4] HUANG M Z, PONNUSAMY S, WANG X T. Decomposition and removability properties of John domains[J]. *Proceedings Mathematical Sciences*, 2008, 118(3):357-570.
- [5] HERRON D. Harmonic measure and hyperbolic distance in John disk[J]. *Complex Variables*, 1998, 83(2):283-299.
- [6] HERRON D, KOSKELA P. Uniform and Sobolev extension domains[J]. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 1992, 114(2):483-489.
- [7] HUANG M Z, VUORINEN M, WANG X T. On the subinvariance of uniform domains in Banach spaces[J]. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2013, 407(2):527-540.
- [8] VÄISÄLÄ J. Uniform domains[J]. *Tohoku Mathematical Journal*, 1988, 40(1):101-118.
- [9] VÄISÄLÄ J. Relatively and inner uniform domains[J]. *Conformal Geometry and Dynamics of the American Mathematical Society*, 1998, 2(5):56-88.
- [10] VÄISÄLÄ J. The free quasiworld, freely quasiconformal and related maps in Banach spaces[J]. *Banach Center Publications*, 1999, 48(1):55-118.
- [11] VÄISÄLÄ J. Hyperbolic and uniform domains in Banach spaces[J]. *Annales Academiæ Scientiarum Fennicæ Mathematica*, 2005, 30:261-302.
- [12] GUO Changyu. Generalized quasidisks and conformality II [J]. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 2015, 143(8):3505-3517.
- [13] GUO Changyu. Uniform continuity of quasiconformal mappings onto generalized John domains[J]. *Annales Academiæ Scientiarum Fennicæ Mathematica*, 2015, 40:183-202.
- [14] GUO C Y, KOSKELA P. Generalized John disks[J]. *Central European Journal of Mathematics*, 2014, 12(2):349-361.
- [15] GUO C Y, KOSKELA P, TAKKINEN J H. Generalized quasidisks and conformality[J]. *Publicacions Matemàtiques*, 2014, 58(1):193-212.
- [16] HUANG M Z, PONNUSAMY S, WANG X T, et al. The Apollonian inner metric and uniform domain[J]. *Mathematische Nachrichten*, 2010, 283(9):1277-1290.
- [17] HUANG M Z, WANG X T, PONNUSAMY S, et al. Uniform domains, John domains and quasi-isotropic domains[J]. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2008, 343(1):110-126.
- [18] LI Y X, RASILA A, ZHOU Q S. Removability of uniform metric space[J]. *Mediterranean Journal of Mathematics*, 2022, 19:139.
- [19] WANG Xiantao, ZHOU Qingshan. Quasimöbius maps, weakly Quasimöbius maps and uniform perfectness in quasi-metric spaces[J]. *Annales Academiæ Scientiarum Fennicæ Mathematica*, 2017, 42:257-284.
- [20] AMBOROSIO L. Some fine properties of sets of finite perimeter in Ahlfors regular metric measure spaces[J]. *Advances in Mathematics*, 2001, 159(1):51-67.

(编辑:陈丽萍)