山东大学学报(理学版)2026 年 4 月 第 61 卷 第 4 期
Journal of Shandong University (*Natural Science*), Vol.61, No.4, 2026 http://lxbwk.njournal.sdu.edu.cn

文章编号:1671-9352(2026)04-0052-04 DOI:10.6040/j.issn.1671-9352.0.2024.407

Frobenius 函子与 $\mathscr{X}$-Gorenstein 投射对象

李瑷竹,梁力*

(兰州交通大学数理学院, 甘肃 兰州 730070)

摘要:令 $\mathscr{A}$ 是有足够投射对象的阿贝尔范畴,$\mathscr{X}$ 是 $\mathscr{A}$ 的关于同构封闭且包含投射对象的类。本文主要研究在什么条件下 Frobenius 函子保持对象的 $\mathscr{X}$-Gorenstein 投射维数,并且证明 Frobenius 函子保持对象的 Ding 投射维数。

关键词:$\mathscr{X}$-Gorenstein 投射对象;Forbenius 函子;$\mathscr{X}$-Gorenstein 投射维数;Ding 投射对象

中图分类号:O154 **文献标志码**:A

引用格式:李瑷竹,梁力. Frobenius 函子与 $\mathscr{X}$-Gorenstein 投射对象[J]. 山东大学学报(理学版),2026,61(4):52-55.

Frobenius functors and $\mathscr{X}$-Gorenstein projective objects

LI Aizhu, LIANG Li*

(School of Mathematics and Physics, Lanzhou Jiaotong University, Lanzhou 730070, Gansu, China)

Abstract: let $\mathscr{A}$ be an abelian category with enough projective objects, and let $\mathscr{X}$ be a class of objects in $\mathscr{A}$ closed under isomorphism and containing the projective objects. The main purpose of this paper is to study under what conditions the Frobenius functors preserve the $\mathscr{X}$-Gorenstein projective dimension of objects, and the conclusion that the Frobenius functors preserve the Ding projective dimension of objects is proved.

Key words: $\mathscr{X}$-Gorenstein projective objects; Frobenius functors; $\mathscr{X}$-Gorenstein projective dimension; Ding projective objects

1 引言及预备知识

Gorenstein 投射模是相对同调代数的核心[1-2]。文献[2]研究 Gorenstein 投射模的若干性质,得到 Gorenstein 投射维数的相关结论。文献[3]在此基础之上推广,给出 $\mathscr{X}$-Gorenstein 投射模和维数的概念。文献[4]主要证明阿贝尔范畴之间的忠实 Frobenius 函子保持对象的 Gorenstein 投射维数。本文主要研究忠实 Frobenius 函子对 $\mathscr{X}$-Gorenstein 投射维数的影响,证明当 $\mathscr{X}$ 满足一定条件时,阿贝尔范畴之间的忠实 Frobenius 函子保持对象的 $\mathscr{X}$-Gorenstein 投射维数。当 $\mathscr{X}$ 是阿贝尔范畴中的平坦对象构成的类时,对比文献[5]中的定义,显然 $\mathscr{X}$-Gorenstein 投射对象就是强 Gorenstein 平坦对象,也称为 Ding 投射对象,本文也证明在一定条件下忠实的 Frobenius 函子保持对象的 Ding 投射维数。

接下来给出 $\mathscr{X}$-Gorenstein 投射对象的定义,定义 $\mathscr{A}$ 是有足够投射对象的阿贝尔范畴,$\mathscr{X}$ 是 $\mathscr{A}$ 的关于同构和有限直和封闭且包含投射对象的类。

定义 1[3] 令 M 是 $\mathscr{A}$ 中对象,称 M 是 $\mathscr{X}$-Gorenstein 投射的,如果存在正合列

$$P=\cdots\to P_1\to P_0\to P^0\to P^1\to\cdots,$$

其中 P^i 和 P_i 是 $\mathscr{A}$ 中投射对象,使得对任意 $\mathscr{X}$ 中对象 $\mathscr{X}$,函子 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(-,X)$ 作用 P 后仍保持正合,并且 $M\cong\mathrm{Im}(P_0\to P^0)$,此时称 P 是 M 的一个 $\mathscr{X}$-投射分解。显然,若 $\mathscr{X}$ 是 $\mathscr{A}$ 中投射对象构成的类,则 $\mathscr{X}$-Gorenstein 投射对象就是 Gorenstein 投射对象;若 $\mathscr{X}$ 是 $\mathscr{A}$ 中平坦对象构成的类,则 $\mathscr{X}$-Gorenstein 投射对象就是 Ding 投

收稿日期:2024-11-28; **网络出版时间**:2025-10-10

基金项目:国家自然科学基金资助项目(12271230)

第一作者:李瑷竹(1999—),女,硕士研究生,研究方向为同调代数. E-mail:2587502465@qq.com

* **通信作者**:梁力(1980—),男,教授,博士,研究方向为同调代数. E-mail:lliangnju@gmail.com

射对象。

以下给出 $\mathscr{X}$-Gorenstein 投射对象的一些基本性质,其详细证明过程可查看文献[3]。

引理 1 令 M 是 $\mathscr{A}$ 中对象,则以下条件等价:

(1) M 是 $\mathscr{X}$-Gorenstein 投射对象。

(2) 对 $\mathscr{X}$ 中任意对象 $\mathscr{X}$,对任意的 $i>0$,有 $\mathrm{Ext}^i_{\mathscr{A}}(M,X)=0$,并且存在 $\mathscr{A}$ 中正合列 $Q=0\to M\to P^0\to P^1\to\cdots$,其中每个 P^i 都是 $\mathscr{A}$ 中的投射对象,使得对任意 $\mathscr{X}$ 中对象 X,函子 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(-,X)$ 作用 Q 后仍保持正合。

(3) 存在 $\mathscr{A}$ 中正合列 $0\to M\to P\to N\to 0$,其中 P 是投射对象,N 是 $\mathscr{X}$-Gorenstein 投射对象。

(4) 存在一簇短正合列 $0\to M_i\to P_i\to M_{i+1}\to 0\,(i\in\mathbf{Z})$,其中 P_i 是投射对象,且 $M_0=M$,使得对任意 $\mathscr{X}$ 中对象 X 有 $\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{A}}(M_i,X)=0$。

引理 2 以下结论成立:

(1) 令 $0\to X\to Y\to Z\to 0$ 是 $\mathscr{A}$ 中短正合列,其中 Z 是 $\mathscr{X}$-Gorenstein 投射的,则 X 是 $\mathscr{X}$-Gorenstein 投射的当且仅当 Y 是 $\mathscr{X}$-Gorenstein 投射的。

(2) 令 $(M_i)_{i\in I}$ 是 $\mathscr{A}$ 中一簇对象,则 $\oplus_{i\in I}M_i$ 是 $\mathscr{X}$-Gorenstein 投射的当且仅当 M_i 是 $\mathscr{X}$-Gorenstein 投射的。

引理 3 令 M 是 $\mathscr{A}$ 中对象,对 $\mathscr{A}$ 中 2 个正合列:

$$0\to X_n\to X_{n-1}\to\cdots\to X_0\to M\to 0,$$
$$0\to Y_n\to Y_{n-1}\to\cdots\to Y_0\to M\to 0,$$

其中 X_i,Y_i 是 $\mathscr{X}$-Gorenstein 投射的,$0<i\leqslant n-1$,则 X_n 是 $\mathscr{X}$-Gorenstein 投射的当且仅当 Y_n 是 $\mathscr{X}$-Gorenstein 投射的。

2 Frobenius 函子与 $\mathscr{X}$-Gorenstein 投射对象

令 $\mathscr{A}$ 和 $\mathscr{B}$ 是具有足够投射对象的阿贝尔范畴,$\mathrm{Prj}(\mathscr{A})$ 和 $\mathrm{Prj}(\mathscr{B})$ 分别表示 $\mathscr{A}$ 和 $\mathscr{B}$ 中的投射对象构成的类,$\mathscr{X}_{\mathscr{A}}$ 和 $\mathscr{X}_{\mathscr{B}}$ 分别表示 $\mathscr{A}$ 和 $\mathscr{B}$ 中的两个关于同构和有限直和封闭且包含投射对象的类。假设 X 是 $\mathscr{A}$ 中对象,用 $\mathscr{X}_{\mathscr{A}}$-$\mathrm{Gpd}_{\mathscr{A}}(X)$ 表示它的 $\mathscr{X}$-Gorenstein 投射维数,定义为 $\mathscr{X}_{\mathscr{A}}$-$\mathrm{Gpd}_{\mathscr{A}}(X)\leqslant n$ 当且仅当存在正合列

$$0\to M_n\to M_{n-1}\to\cdots\to M_0\to X\to 0,$$

其中每个 M_i 都是 $\mathscr{X}$-Gorenstein 投射的。

定义 2 令 $F:\mathscr{A}\to\mathscr{B}$ 和 $G:\mathscr{B}\to\mathscr{A}$ 是 2 个加法函子,称 (F,G) 是 $\mathscr{A}$ 和 $\mathscr{B}$ 之间的 Frobenius 函子对,如果 (F,G) 和 (G,F) 都是伴随对。$F:\mathscr{A}\leftrightarrows\mathscr{B}:G$ 表示 Frobenius 函子对,$\eta:\mathrm{Id}_{\mathscr{A}}\to GF$ 和 $\varepsilon:FG\to\mathrm{Id}_{\mathscr{B}}$ 分别表示伴随对 (F,G) 的单位和余单位。

引理 4[4] 令 $F:\mathscr{A}\leftrightarrows\mathscr{B}:G$ 是 Frobenius 函子对,则以下表述成立:

(1) F 和 G 都是正合函子,且满足 $F(\mathrm{Prj}(\mathscr{A}))\subseteq\mathrm{Prj}(\mathscr{B})$, $G(\mathrm{Prj}(\mathscr{B}))\subseteq\mathrm{Prj}(\mathscr{A})$。

(2) 函子 F 是忠实的当且仅当 $\mathrm{add}\,G(\mathrm{Prj}(\mathscr{B}))=\mathrm{Prj}(\mathscr{A})$,当且仅当单位 $\eta:\mathrm{Id}_{\mathscr{A}}\to GF$ 是单态射。

(3) 函子 G 是忠实的当且仅当 $\mathrm{add}\,F(\mathrm{Prj}(\mathscr{A}))=\mathrm{Prj}(\mathscr{B})$,当且仅当余单位 $\varepsilon:FG\to\mathrm{Id}_{\mathscr{B}}$ 是满态射。

命题 1 令 $F:\mathscr{A}\leftrightarrows\mathscr{B}:G$ 是 Frobenius 函子对,若 $G(\mathscr{X}_{\mathscr{B}})\subseteq\mathscr{X}_{\mathscr{A}}$,则对 $\mathscr{A}$ 中任意对象 X,存在不等式

$$\mathscr{X}_{\mathscr{A}}\text{-}\mathrm{Gpd}_{\mathscr{A}}(X)\geqslant\mathscr{X}_{\mathscr{B}}\text{-}\mathrm{Gpd}_{\mathscr{B}}(F(X))。$$

证明 因为 F 是正合函子,所以证明该不等式可转换为证明:若 X 是 $\mathscr{X}_{\mathscr{A}}$-Gorenstein 投射的,则 $F(X)$ 是 $\mathscr{X}_{\mathscr{B}}$-Gorenstein 投射的。

取一个 $\mathscr{X}_{\mathscr{A}}$-完全投射分解 P 使得 $X\cong\mathrm{Im}(P_0\to P^0)$。因为 G 是正合函子,所以 $F(P)$ 是由 $\mathscr{B}$ 中投射对象构成的正合列。任取 $\mathscr{X}_{\mathscr{B}}$ 中对象 Q,由条件知 $G(Q)\in\mathscr{X}_{\mathscr{A}}$,故复形 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{B}}(F(P),Q)\cong\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(P,G(Q))$ 是正合的,因此 $F(P)$ 是 $\mathscr{X}_{\mathscr{B}}$-完全投射分解。注意到 $F(X)\cong\mathrm{Im}(F(P_0)\to F(P^0))$,则 $F(X)$ 是 $\mathscr{X}_{\mathscr{B}}$-Gorenstein 投射的。

命题 2 令 $F:\mathscr{A}\leftrightarrows\mathscr{B}:G$ 是 Frobenius 函子对,其中 F 是忠实函子,假设 $\mathscr{X}_{\mathscr{A}}$ 中任意对象 N 可表示为

$G(Q)$的同态像,其中$Q\in\mathscr{X}_{\mathscr{B}}$,并且满足对任意$A\in\mathscr{A}$,由$\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{A}}(A,G(Q))=0$,可得$\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{A}}(A,N)=0$。若$X$是$\mathscr{A}$中对象使得$F(X)$是$\mathscr{X}_{\mathscr{B}}$-Gorenstein投射的,则存在$\mathscr{A}$中正合列

$$0\to X\to G(P)\to X^1\to 0,$$

其中P是$\mathscr{B}$中投射对象,使得对任意$N\in\mathscr{X}_{\mathscr{A}}$有$\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{A}}(X^1,N)=0$。

证明　因为$F(X)$是$\mathscr{X}_{\mathscr{B}}$-Gorenstein投射对象,所以由引理1知,存在$\mathscr{B}$中正合列

$$0\to F(X)\xrightarrow{f^1}P\to Y\to 0,$$

其中P是投射的,Y是$\mathscr{X}_{\mathscr{B}}$-Gorenstein投射的。令$f=G(f^1)\circ\eta_X$,其中$\eta_X$是伴随对$(F,G)$的单位。因为$F$是正合且忠实的函子,所以由引理4可知,$\eta_X$是单态射。又因为$f^1$是单的且$G$正合,所以$G(f^1)$是单态射,因此$f=G(f^1)\circ\eta_X$是单态射,故存在正合列

$$0\to X\xrightarrow{f}G(P)\to X^1\to 0。$$

考虑行正合列构成的交换图

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & F(X) \arrow[r, "F(f)"] \arrow[d, equal] & FG(P) \arrow[r] \arrow[d, "\varepsilon_P"] & F(X^1) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & F(X) \arrow[r, "f"] & P \arrow[r] & Y \arrow[r] & 0,
\end{tikzcd}$$

利用交换图可得正合列

$$0\to FG(P)\to F(X^1)\oplus P\to Y\to 0,$$

由引理4,$FG(P)\in\mathrm{Prj}(\mathscr{B})$。又因为$Y$是$\mathscr{X}_{\mathscr{B}}$-Gorenstein投射的,所以$F(X^1)\oplus P$是$\mathscr{X}_{\mathscr{B}}$-Gorenstein投射的,故$F(X^1)$是$\mathscr{X}_{\mathscr{B}}$-Gorenstein投射对象。对$\mathscr{X}_{\mathscr{A}}$中任意对象$N$,由假设条件,存在$Q\in\mathscr{X}_{\mathscr{B}}$,使得$G(Q)$是$N$的同态像,由引理1可知$\mathrm{Ext}^i_{\mathscr{B}}(F(X^1),Q)=0$, $i>0$,故$\mathrm{Ext}^i_{\mathscr{A}}(X^1,G(Q))=0$。因此对任意$\mathscr{X}_{\mathscr{A}}$中对象$N$,有$\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{A}}(X^1,N)=0$。

命题3　令$F:\mathscr{A}\leftrightarrows\mathscr{B}:G$是Frobenius函子对,其中$F$是忠实函子,且$G(\mathscr{X}_{\mathscr{B}})\subseteq\mathscr{X}_{\mathscr{A}}$,假设$\mathscr{X}_{\mathscr{A}}$中任意对象$N$可表示为$G(Q)$的同态像,其中$Q\in\mathscr{X}_{\mathscr{B}}$,并且由$\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{A}}(A,G(Q))=0$可得$\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{A}}(A,N)=0$, $A\in\mathscr{A}$,则对任意$\mathscr{A}$中对象X存在等式

$$\mathscr{X}_{\mathscr{A}}\text{-}\mathrm{Gpd}_{\mathscr{A}}(X)=\mathscr{X}_{\mathscr{B}}\text{-}\mathrm{Gpd}_{\mathscr{B}}(F(X))。$$

特别地,若F是忠实的Frobenius函子,并且$\mathrm{add}\,G(\mathscr{X}_{\mathscr{B}})=\mathscr{X}_{\mathscr{A}}$,则上述等式成立。

证明　由命题1可知“≥”成立,现证明“≤”。

若$F(X)$是$\mathscr{X}_{\mathscr{B}}$-Gorenstein投射的,则$X$是$\mathscr{X}_{\mathscr{A}}$-Gorenstein投射的。假设$F(X)$是$\mathscr{X}_{\mathscr{B}}$-Gorenstein投射的,由命题2可知,存在$\mathscr{A}$中正合列

$$0\to X\to G(P)\to X^1\to 0,$$

其中$P\in\mathrm{Prj}(\mathscr{B})$,使得对任意$\mathscr{X}_{\mathscr{A}}$中对象$N$,有$\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{A}}(X^1,N)=0$。令$Q^0=G(P)$,重复命题2中的证明过程可得到一个正合列

$$Q=0\to X\to Q^0\to Q^1\to Q^2\to\cdots,$$

其中每个$Q^i\in\mathrm{Prj}(\mathscr{A})$,使得对任意$\mathscr{X}_{\mathscr{A}}$中的对象$N$有$\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(Q,N)$是正合的。因此由引理1.2可得$X$是$\mathscr{X}_{\mathscr{A}}$-Gorenstein投射的。

现假设$\mathscr{X}_{\mathscr{B}}$-$\mathrm{Gpd}_{\mathscr{B}}(F(X))=n$,取正合列

$$\xi:0\to K\to P_{n-1}\to\cdots\to P_0\to X\to 0,$$

其中$P^i\in\mathrm{Prj}(\mathscr{A})$。将正合函子$F$作用到上述正合列,由引理3可知$F(K)$是$\mathscr{X}_{\mathscr{B}}$-Gorenstein投射的,$K$是$\mathscr{X}_{\mathscr{A}}$-Gorenstein投射的。因此$\mathscr{X}_{\mathscr{A}}$-$\mathrm{Gpd}_{\mathscr{A}}(X)\leqslant n$。

$\mathrm{Flat}(\mathscr{A})$和$\mathrm{Flat}(\mathscr{B})$分别表示$\mathscr{A}$和$\mathscr{B}$中平坦对象构成的类。

定义3　称$\mathscr{A}$中对象F是平坦的,若函子$-\otimes_{\mathscr{A}}F$是正合的,$\mathrm{Flat}(\mathscr{A})$和$\mathrm{Flat}(\mathscr{B})$分别表示$\mathscr{A}$和$\mathscr{B}$中平坦对象构成的类。

命题4　令$F:\mathscr{A}\leftrightarrows\mathscr{B}:G$是Frobenius函子对,则$G(\mathrm{Flat}(\mathscr{B}))\subseteq\mathrm{Flat}(\mathscr{A})$;假设$F$是忠实函子,且由

$\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{A}}(A,G(Q))=0$ 可得 $\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{A}}(A,N)=0$, $A\in\mathscr{A}$,其中 $G(Q)$ 是平坦对象 N 的同态像,则对任意 $\mathscr{A}$ 中对象 X 存在等式

$$\mathrm{Dpd}_{\mathscr{A}}(X)=\mathrm{Dpd}_{\mathscr{B}}(F(X))。$$

证明　现证 $G(\mathrm{Flat}(\mathscr{B}))\subseteq\mathrm{Flat}(\mathscr{A})$。

任取 $\mathscr{B}$ 中平坦对象 $Q_{\mathscr{B}}$,则存在偏序集 I 和正向系统 $\{\varphi_{ji}:P_i^{\mathscr{B}}\to P_j^{\mathscr{B}}\}_{i\leqslant j}$,其中 $i\in I$, $P_i^{\mathscr{B}}\in P(\mathscr{B})$,使得 $Q_{\mathscr{B}}=\mathrm{colim}\ P_i^{\mathscr{B}}$,故有 $\mathrm{colim}\ G(P_i^B)=G(\mathrm{colim}\ P_i^B)=G(Q_B)$。由引理 4,$G(P_i^B)\in P(\mathscr{A})$,故 $G(Q_B)$ 是 $\mathscr{A}$ 中平坦对象,得证。

任取 $\mathscr{A}$ 中的平坦对象 $Q_{\mathscr{A}}$,则存在偏序集 J 和正向系统 $\{\phi_{ji}:P_i^{\mathscr{A}}\to P_j^{\mathscr{A}}\}_{i\leqslant j}$,其中 $P_i^{\mathscr{A}}\in\mathrm{Prj}(\mathscr{A})$, $i\in J$,使得 $Q_{\mathscr{A}}=\mathrm{colim}\ P_i^{\mathscr{A}}$。因为 F 是忠实的,由引理 4,$\mathrm{add}\ G(P(\mathscr{B}))=P(\mathscr{A})$,所以存在可裂正合列 $G(P_i)\to P_i^{\mathscr{A}}\to 0$,其中 $P_i\in P(\mathscr{B})$。现说明 $\{\psi_{ji}:G(P_i)\to G(P_j)\}_{i\leqslant j}$ 和 $\{\sigma_{ji}:P_i\to P_j\}_{i\leqslant j}$ 都是正向系统。

由交换图

$$\begin{array}{ccccc} G(P_i) & \longrightarrow & P_i^{\mathscr{A}} & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow{\scriptstyle \psi_{ji}} & & \downarrow{\scriptstyle f} & & \\ G(P_j) & \longrightarrow & P_j^{\mathscr{A}} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

可知,$\{\psi_{ji}:G(P_i)\to G(P_j)\}_{i\leqslant j}$ 是 $\mathscr{A}$ 中正向系统。

再由同构 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(G(P_i),G(P_j))\cong\mathrm{Hom}_{\mathscr{B}}(FG(P_i),P_j)$ 知存在 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{B}}(FG(P_i),P_j)$ 中的态射 $\bar{\psi}_{ji}$。令 $\sigma_{ji}=\bar{\psi}_{ji}\circ\eta_{P_i}:P_i\to P_j$,其中 $\eta:\mathrm{Id}_{\mathscr{B}}\to FG$ 是伴随对 (G,F) 的单位,容易验证 $\{\sigma_{ji}:P_i\to P_j\}_{i\leqslant j}$ 是正向系统。

令 $Q=\mathrm{colim}\ P_i$,则 Q 是 $\mathscr{B}$ 中平坦对象,并且 $\mathrm{colim}\ G(P_i)=G(\mathrm{colim}\ P_i)=G(Q)$,故存在正合列 $G(Q)\to Q_{\mathscr{A}}\to 0$,即对任意 $Q_{\mathscr{A}}\in\mathrm{Flat}(\mathscr{A})$,存在 $Q\in\mathrm{Flat}(\mathscr{B})$ 使得 $Q_{\mathscr{A}}$ 是 $G(Q)$ 的同态像,由定理 2.5,等式成立。

3　应用

定义 4[6]　令 $\theta:R\to S$ 是一个环扩张,称 θ 是 Frobenius 扩张,若 S 是有限生成投射左 R-模,并且存在 S-R-双模的同构 $S\cong\mathrm{Hom}_R(S,R)$。

例 1　令 $U:S\text{-Mod}\to R\text{-Mod}$ 是遗忘函子,故 U 是忠实函子。由文献[7]可知,$\theta:R\to S$ 是 Frobenius 扩张当且仅当 $(S\otimes_R-,U)$ 是 Frobenius 函子对,其中 $S\otimes_R-:R\text{-Mod}\to S\text{-Mod}$ 是扩张函子,则以下表述成立:

(1) 令 $\theta:R\to S$ 是一个 Frobenius 扩张。因为 $U:S\text{-Mod}\to R\text{-Mod}$ 是忠实函子,所以左 S-模 M 是 Gorenstein 投射的当且仅当 M 作为左 R-模是 Gorenstein 投射的。

(2) 令 $\theta:R\to S$ 是一个 Frobenius 扩张。由命题 4 可知 $U(\mathrm{Flat}(S))\subseteq\mathrm{Flat}(R)$,因此,由命题 1 可得,若左 R-模 N 是 Ding 投射的,则 N 作为左 S-模也是 Ding 投射的。

参考文献:

[1] ENOCHS E E, JENDA O M G. Relative homological algebra[M]. Berlin-New York: Walter de Gruyter, 2011:256-262.
[2] HOLM H. Gorenstein homological dimensions[J]. Journal of Pure and Applied Algebra, 2004, 189(1/3):167-193.
[3] BENNIS D, OUARGHI K. $\mathscr{X}$-Gorenstein projective modules[J]. International Mathematical Forum, 2010, 5(10):487-491.
[4] CHEN Xiaowu, REN Wei. Frobenius functors and Gorenstein homological properties[J]. Journal of Algebra, 2022, 610:18-37.
[5] DING Nanqing, MAO Lixin. Strongly Gorenstein flat modules[J]. Journal of the Australian Mathematical Society, 2009, 86(3):323-338.
[6] MORITA K. Adjoint pairs of functors and Frobenius extensions[J]. Science Reports of the Tokyo Kyoiku Daigaku, 1965, 9(205):40-71.
[7] KADISON L. New examples of Frobenius extensions[M]. Provedence: American Mathematical Society, 1999:2-3.

(编辑:陈丽萍)