文章编号:1671-9352(2026)04-0001-08 DOI:10.6040/j.issn.1671-9352.0.2024.336

Nijenhuis 配对 Hopf 模及其构造

张良云,廖美林,蒋润滋,蔡铭超
(南京农业大学理学院, 江苏 南京 210095)

摘要:结合 Nijenhuis 配对模和 Nijenhuis 配对余模,引入 Nijenhuis 配对 Hopf 模概念。由 Hopf 代数的对极映射和群像元分别构造 Nijenhuis 配对 Hopf 模,并给出 Nijenhuis 配对 Hopf 模的结构定理。

关键词:Nijenhuis 代数;Hopf 代数;Nijenhuis 配对 Hopf 模
中图分类号:O153 **文献标志码**:A
引用格式:张良云,廖美林,蒋润滋,等. Nijenhuis 配对 Hopf 模及其构造[J]. 山东大学学报(理学版),2026,61(4):1-8.

Nijenhuis paired Hopf modules and their constructions

ZHANG Liangyun, LIAO Meilin, JIANG Runzi, CAI Mingchao
(College of Science, Nanjing Agricultural University, Nanjing 210095, Jiangsu, China)

Abstract: The concept of Nijenhuis paired Hopf modules is introduced by combining Nijenhuis paired modules with Nijenhuis paired comodules. Nijenhuis paired Hopf modules are then constructed from the antipode and group-like element of a Hopf algebra. The structure theorem for Nijenhuis paired Hopf modules is provided.

Key words: Nijenhuis algebras; Hopf algebras; Nijenhuis paired Hopf modules

1 引言与预备知识

20 世纪 50 年代,Nijenhuis 在研究拟复流形时首次引入 Nijenhuis 张量的概念[1]。随后学者们研究发现 Nijenhuis 张量与 Schouten-Nijenhuis 括号、Frölicher-Nijenhuis 括号[2]和 Nijenhuis-Richardson 括号等密切相关。Carinena 等[3]研究双哈密顿系统时首次提出结合代数上的 Nijenhuis 算子,然而 Lie 代数上的Nijenhuis 算子概念是由 Nijenhuis 在研究伪复流形时引入的[4],后来被用来研究 Poisson-Nijenhuis 流形[5]和经典杨–巴克斯特方程[6]。

Nijenhuis 算子及其代数的研究越来越受到人们的重视。Nijenhuis 代数(A,N)是一个带有 Nijenhuis 算子 N(A 上的一个线性映射)的结合代数 A,并满足如下 Nijenhuis 等式,即,对任意 $u,v\in A$,有

$$N(u)N(v)+N^2(uv)=N(N(u)v)+N(uN(v))。$$

Nijenhuis 代数得到了极大的发展,研究者探讨 Nijenhuis 代数与 NS 代数、N-树型代数之间的联系,并在预 Lie 代数上研究 Nijenhuis 算子[7-8]。

本文基于上述研究,结合 Nijenhuis 配对模和 Nijenhuis 配对余模,引入 Nijenhuis 配对(弱)Hopf 模概念,然后由 Hopf 代数的对极映射和群像元分别构造 Nijenhuis 配对(弱)Hopf 模,最后给出并证明Nijenhuis配对 Hopf 模的结构定理。本文讨论的对象均在域 K 上,代数指的是一个有单位元的结合代数,余代数指的是一个余结合余代数,id 表示恒等映射,并采用 Sweedler 记法[9]。针对余代数(C,Δ),记它的余乘法为$\Delta(c)=c_1\otimes c_2$, $c\in C$,针对左 C-余模(M,ρ),记它的余作用为$\rho(m)=m_{(-1)}\otimes m_{(0)}$, $m\in M$。

收稿日期: 2024-09-30; **网络出版时间**:2025-10-10
基金项目:中华农业科教基金会资助项目(NKJ202402009); 国家大学生实践创新训练计划资助项目(202410307084Z)
第一作者:张良云(1964—),男,教授,博士生导师,研究方向为 Hopf 代数. E-mail:zlyun@ njau.edu.cn

定义 1[10] 设 A 是一个结合代数,如果存在一个线性映射 $N:A\to A$,使得对任意 $a,b\in A$,满足条件

$$N(a)N(b)+N^2(ab)=N(N(a)b)+N(aN(b)),\tag{1}$$

则称 (A,N) 是一个 Nijenhuis 代数[9]。

定义 2[11] 设 C 是一个余代数,如果存在一个线性映射 $N:C\to C$,满足条件

$$(N\otimes N)\Delta+\Delta N^2=(\mathrm{id}\otimes N)\Delta N+(N\otimes \mathrm{id})\Delta N,\tag{2}$$

则称 (C,N) 是一个 Nijenhuis 余代数[1],并称 N 是余代数 C 上的一个 Nijenhuis 算子。

定义 3[12] 设 A 是一个结合代数,M 是一个左 A-模,如果存在 2 个线性映射 $P:A\to A$, $T:M\to M$,使得对任意 $a\in A$, $m\in M$,满足条件

$$P(a)\cdot T(m)+T^2(a\cdot m)=T(P(a)\cdot m)+T(a\cdot T(m)),\tag{3}$$

则称 (M,P,T) 是一个 Nijenhuis 配对 A-模[1],并称 (P,T) 为 (A,M) 上的一组 Nijenhuis 配对算子。

定义 4 设 M 是一个左 C-余模,如果存在 2 个线性映射 $N:C\to C$, $T:M\to M$,满足条件

$$(N\otimes T)\rho+\rho T^2=(\mathrm{id}\otimes T)\rho T+(N\otimes \mathrm{id})\rho T,\tag{4}$$

则称 (M,N,T) 是一个 Nijenhuis 配对 C-余模。

2 Nijenhuis 配对 Hopf 模

本章引入 Nijenhuis 配对 Hopf 模概念,并由 Hopf 代数中的群像元和对极映射分别构造 Nijenhuis 配对 Hopf 模。

定义 5 设 H 为一个双代数,M 是一个左 H-Hopf 模,如果存在 2 个线性映射 $P:H\to H$, $T:M\to M$ 使得 (M,P,T) 既是一个 Nijenhuis 配对 H-模,又是一个 Nijenhuis 配对 H-余模,则称 (M,P,T) 是一个 Nijenhuis 配对 H-Hopf 模。

设 (M,N,T) 是一个 Nijenhuis 配对 H-Hopf 模,若 V 是 M 的一个 H-Hopf 子模,并满足 $T(V)\subseteq V$,则 (V,N,T) 为一个 Nijenhuis 配对 H-Hopf 模,即是 M 的一个 Nijenhuis 配对 H-Hopf 子模。

设 (M,N,T),(M',N',T') 均是 Nijenhuis 配对 H-Hopf 模,若存在一个 Hopf 模映射 $\varphi:M\to M'$,并满足 $\varphi\circ T=T'\circ\varphi$,则称 φ 是一个 Nijenhuis 配对 H-Hopf 模映射。

定义 6[13-14] 设 H 为一个弱双代数,M 是一个左 H-Hopf 模,如果存在 2 个线性映射 $P:H\to H$, $T:M\to M$ 使得 (M,P,T) 既是一个 Nijenhuis 配对 H-模,又是一个 Nijenhuis 配对 H-余模,则称 (M,P,T) 是一个 Nijenhuis配对弱 H-Hopf 模。

类似地可以定义一个 Nijenhuis 配对弱右-Hopf 模。

设 H 是一个具有弱对极映射 S 的弱 Hopf 代数,对任意 $h\in H$,则下列结果成立:

(W1) $\sqcap^L(h_1)\otimes h_2=S(1_1)\otimes 1_2h$;

(W2) $h_1\otimes\sqcap^L(h_2)=1_1h\otimes 1_2$;

(W3) $\Delta(1)=1_1\otimes 1_2\in\sqcap^R(H)\otimes\sqcap^L(H)$;

(W4) $\sqcap^L\circ\sqcap^L=\sqcap^L$;

(W5) S 既是一个反代数映射,又是一个反余代数映射。

$\Delta(1)$ 记为 $1_1\otimes 1_2\in H\otimes H$, $\sqcap^L,\sqcap^R:H\to H$ 是弱 Hopf 代数 H 的靶映射和源映射($\sqcap^L(h)=\varepsilon(1_1h)1_2$; $\sqcap^R(h)=\varepsilon(h1_2)1_1,h\in H$),并且 $\sqcap^L(H)$ 和 $\sqcap^R(H)$ 分别是弱 Hopf 代数 H 的 2 个像子集(分别称为弱 Hopf 代数 H 的靶代数和源代数)。

例 1 (1) 设 H 为一个双代数,如果存在一个线性映射 $P:H\to H$,使得

$$P(h)=\varepsilon(h)x,$$

则 (H,P,P) 是一个 Nijenhuis 配对 H-Hopf 模。这里元素 x 为双代数 H 的一个群像元,且 x 是幂等的。

(2) 设 H 为一个交换弱 Hopf 代数,M 是一个弱右 H-Hopf 模,定义线性映射 $T:M\to M$,

$$T(m)=m_{[0]}\cdot S(m_{[1]}),\quad m\in M,$$

则$(M,\sqcap^L,T)$是一个 Nijenhuis 配对弱右 H-Hopf 模。

特别地,$(H,\sqcap^L,\sqcap^L)$是一个 Nijenhuis 配对弱右 H-Hopf 模。

证明 (1) 首先 P 是幂等的,由于对任意 $a\in H$,有

$$P^2(a)=P(\varepsilon(a)x)=\varepsilon(a)\varepsilon(x)x=\varepsilon(a)x=P(a)。$$

其次,P 是一个代数映射和余代数映射,由于对任意 $a,b\in H$,有

$$P(ab)=\varepsilon(ab)x=\varepsilon(a)x\varepsilon(b)x=P(a)P(b),$$
$$\Delta P(a)=\varepsilon(a)x\otimes x=P(a_{(1)})\otimes P(a_{(2)})。$$

下面证明(H,P)是一个 Nijenhuis 代数,也是一个 Nijenhuis 余代数。

对任意 $a,b\in H$,有

$$P(a)P(b)+P^2(ab)=P(a)P(b)+P(ab)=2P(a)P(b),$$
$$P(P(a)b)+P(aP(b))=P(a)P(b)+P(a)P(b)=2P(a)P(b),$$

即

$$P(a)P(b)+P^2(ab)=P(P(a)b)+P(aP(b)),$$
$$\begin{aligned}&(\mathrm{id}\otimes P)\Delta P(a)+(P\otimes\mathrm{id})\Delta P(a)-\Delta P^2(a)\\&=(\mathrm{id}\otimes P)(P\otimes P)\Delta(a)+(P\otimes\mathrm{id})(P\otimes P)\Delta(a)-(P\otimes P)\Delta(a)\\&=P(a_{(1)})\otimes P^2(a_{(2)})+P^2(a_{(1)})\otimes P(a_{(2)})-P(a_{(1)})\otimes P(a_{(2)})\\&=P(a_{(1)})\otimes P(a_{(2)})\\&=(P\otimes P)\Delta(a),\end{aligned}$$

即

$$(P\otimes P)\Delta(a)+\Delta P^2(a)=(\mathrm{id}\otimes P)\Delta P(a)+(P\otimes\mathrm{id})\Delta P(a),$$

所以,(H,P)不仅是一个 Nijenhuis 代数,也是一个 Nijenhuis 余代数。显然,通过双代数 H 自身的乘法和余乘法知,H 是一个 H-Hopf 模,由上述证明知(H,P,P)是一个 Nijenhuis 配对 H-Hopf 模。

(2) 首先对任意 $h\in H$, $m\in M$,根据(W5),有

$$\begin{aligned}T(m\cdot h)&=(m_{[0]}\cdot h_1)\cdot S(m_{[1]}h_2)\\&=m_{[0]}\cdot h_1S(h_2)S(m_{[1]})\\&=m_{[0]}\cdot\sqcap^L(h)S(m_{[1]})\\&=T(m)\cdot\sqcap^L(h),\end{aligned}$$

即

$$T(m\cdot h)=T(m)\cdot\sqcap^L(h),$$

由此可知,T 是幂等的。由于

$$\begin{aligned}T^2(m)&=T(T(m))=T(m_{[0]}\cdot S(m_{[1]}))\\&=(m_{[0]}\cdot S(m_{[1]}))_{[0]}\cdot S((m_{[0]}\cdot S(m_{[1]}))_{[1]})\\&=m_{[0][0]}\cdot S(m_{[1]2})S(m_{[0][1]}S(m_{[1]1}))\\&=m_{[0]}\cdot S(m_{[1]3})S^2(m_{[1]2})S(m_{[1]1})\\&=m_{[0]}\cdot S(S(m_{[1]2})m_{[1]3}))S(m_{[1]1})\\&=m_{[0]}\cdot S(\sqcap^R(m_{[1]2}))S(m_{[1]1})\\&=m_{[0]}\cdot S(m_{[1]1}\sqcap^R(m_{[1]2}))\\&=m_{[0]}\cdot S(m_{[1]})\\&=T(m),\end{aligned}$$

因此,对任意 $h\in H$, $m\in M$,根据(W4),有

$$\begin{aligned}T(m\cdot\sqcap^L(h))+T(T(m)\cdot h)&=T(m)\cdot\sqcap^L(h)+T^2(m)\cdot\sqcap^L(h)\\&=T(m)\cdot\sqcap^L(h)+T(m)\cdot\sqcap^L(h)\\&=T(m)\cdot\sqcap^L(h)+T(m\cdot h)\\&=T(m)\cdot\sqcap^L(h)+T^2(m\cdot h),\end{aligned}$$

即$(M,\sqcap^L,T)$是一个Nijenhuis配对右H-模。下证$(M,\sqcap^L,T)$也是一个Nijenhuis配对右H-余模。

事实上,对任意$m\in M$,有

$$\begin{aligned}\rho T(m)&=m_{[0][0]}\cdot S(m_{[1]})_1\otimes m_{[0][1]}S(m_{[1]})_2\\&=m_{[0]}\cdot S(m_{[1]2})_1\otimes m_{[1]1}S(m_{[1]2})_2\\&=m_{[0]}\cdot S(m_{[1]3})\otimes m_{[1]1}S(m_{[1]2})\\&=m_{[0]}\cdot S(m_{[1]2})\otimes\sqcap^L(m_{[1]1})\\&\overset{(W1)}{=}m_{[0]}\cdot S(1_2m_{[1]})\otimes S(1_1)\\&=m_{[0]}\cdot S(m_{[1]})S(1_2)\otimes S(1_1)\\&=T(m)\cdot S(1_2)\otimes S(1_1)\\&=T(m)\cdot 1_1\otimes 1_2,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(T\otimes\sqcap^L)\rho(m)&=T(m_{[0]})\otimes\sqcap^L(m_{[1]})\\&=m_{[0][0]}\cdot S(m_{[0][1]})\otimes\sqcap^L(m_{[1]})\\&\overset{(W2)}{=}m_{[0]}\cdot S(m_{[1]1})\otimes\sqcap^L(m_{[1]2})\\&=m_{[0]}\cdot S(1_1m_{[1]})\otimes 1_2\\&=m_{[0]}\cdot S(m_{[1]})S(1_1)\otimes 1_2\\&=T(m)\cdot S(1_1)\otimes 1_2,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(T\otimes\mathrm{id})\rho T(m)&=T(T(m)\cdot 1_1)\otimes 1_2(\rho T(m)=T(m)\cdot 1_1\otimes 1_2)\\&=T(m)\cdot\sqcap^L(1_1)\otimes 1_2\\&=T(m)\cdot S(1_1)\otimes 1_2,\end{aligned}$$

$$(\mathrm{id}\otimes\sqcap^L)\rho T(m)=T(m)\cdot 1_1\otimes\sqcap^L(1_2)\overset{(W2)}{=}T(m)\cdot 1_1\otimes 1_2=\rho T^2(m),$$

即

$$(T\otimes\sqcap^L)\rho(m)+\rho T^2(m)=(\mathrm{id}\otimes\sqcap^L)\rho T(m)+(T\otimes\mathrm{id})\rho T(m),$$

故$(M,\sqcap^L,T)$是一个Nijenhuis配对弱右H-余模,再根据定义5可知$(M,\sqcap^L,T)$是一个Nijenhuis配对弱右H-Hopf模。

3 Nijenhuis配对Hopf模的性质及其结构

命题1 设H是一个双代数,M是一个左H-Hopf模,若存在一个H-Hopf模映射$T:M\to M$,则(M,T)是一个泛性Nijenhuis配对H-Hopf模。

证明 因为T是一个H-Hopf模映射,所以对任意K-线性映射$N:H\to H$,以及对任意$h\in H$, $m\in M$,有

$$\begin{aligned}N(h)\cdot T(m)&=N(h)\cdot T(m)+h\cdot T^2(m)-T^2(h\cdot m)\\&=T(N(h)\cdot m)+T(h\cdot T(m))-T^2(h\cdot m),\end{aligned}$$

即(M,T)是一个泛性的Nijenhuis配对H-模。

$$\begin{aligned}&T(m)_{(-1)}\otimes T(T(m)_{(0)})+N(T(m)_{(-1)})\otimes T(m)_{(0)}-T^2(m)_{(-1)}\otimes T^2(m)_{(0)}\\&=m_{(-1)}\otimes T^2(m_{(0)})+N(m_{(-1)})\otimes T(m_{(0)})-m_{(-1)}\otimes T^2(m_{(0)})\\&=N(m_{(-1)})\otimes T(m_{(0)}),\end{aligned}$$

即

$$N(m_{(-1)})\otimes T(m_{(0)})+T^2(m)_{(-1)}\otimes T^2(m)_{(0)}=T(m)_{(-1)}\otimes T(T(m_{(0)}))+N(T(m_{(-1)}))\otimes T(m)_{(0)},$$

故(M,T)是一个泛性Nijenhuis配对H-余模,再根据定义5可知(M,T)是一个泛性Nijenhuis配对H-Hopf模。

命题2 设(M,N,T)和(M',N',T')是2个Nijenhuis配对H-Hopf模,若存在一个Nijenhuis配对H-Hopf模映射$f:M\to M'$,则有下面结论:

(1) $\mathrm{Ker}\,f$是M的一个Nijenhuis配对H-Hopf子模;

(2) $\mathrm{Im}\, f$ 是 M'的一个 Nijenhuis 配对 H-Hopf 子模;

(3) 如果 L 是 M 的一个 Nijenhuis 配对 H-Hopf 子模,则 $f(L)$ 是 M'的一个 Nijenhuis 配对 H-Hopf 子模。

证明　(1) 由于 f 为一个 Nijenhuis 配对 H-Hopf 模映射,因此 $\mathrm{Ker}\, f$ 是 M 的一个左 H-Hopf 子模,且 $f\circ T=T'\circ f$,故对任意 $m\in \mathrm{Ker}\, f$,有

$$fT(m)=T'f(m)=0,$$

因此 $T(\mathrm{Ker}\, f)\subseteq \mathrm{Ker}\, f$, $\mathrm{Ker}\, f$ 是 M 的一个 Nijenhuis 配对左 H-Hopf 子模。

(2) 由于 f 为一个 H-Hopf 模映射,因此 $\mathrm{Im}\, f$ 是 M'的一个左 H-Hopf 子模,故对任意 $m\in M$,有

$$T'f(m)=fT(m)\in f(M),$$

因此 $T'(\mathrm{Im}\, f)\subseteq \mathrm{Im}\, f$, $\mathrm{Im}\, f$ 是 M'的一个 Nijenhuis 配对左 H-Hopf 子模。

(3) 设 L 是 M 的一个 Nijenhuis 配对 H-Hopf 子模,则由 f 为 Nijenhuis 配对 H-Hopf 模映射知,$f(L)$ 是 M'的一个左 H-Hopf 子模,并且 $T(L)\subseteq L$,因此,对任意 $m\in L$,有

$$T'f(m)=fT(m)\in f(L),$$

故 $f(L)$ 是 M'的一个 Nijenhuis 配对左 H-Hopf 子模。

命题 3　设 (M,N,T) 是一个 Nijenhuis 配对 H-Hopf 模,若存在一个 Hopf 模同构映射 $\phi:M\to M$,则 $(M,N,\phi^{-1}T\phi)$ 是一个 Nijenhuis 配对 H-Hopf 模。这里 ϕ^{-1} 为 Hopf 模同构映射 ϕ 的逆映射。

证明　由 ϕ 是 H-Hopf 模同构映射知 ϕ^{-1} 也是 H-Hopf 模映射,而且对任意 $h\in H$, $m\in M$,有

$$\begin{aligned}&\phi^{-1}T\phi(N(h)\cdot m+h\cdot\phi^{-1}T\phi(m)-\phi^{-1}T\phi(h\cdot m))\\&=\phi^{-1}(T(N(h)\cdot\phi(m)+h\cdot T\phi(m)-T(h\cdot\phi(m))))\\&=\phi^{-1}(N(h)\cdot T(\phi(m)))\\&=N(h)\cdot\phi^{-1}T\phi(m),\end{aligned}$$

即

$$N(h)\cdot\phi^{-1}T\phi(m)+(\phi^{-1}T\phi)^2(h\cdot m)=\phi^{-1}T\phi(N(h)\cdot m+h\cdot\phi^{-1}T\phi(m)),$$

故 $(M,N,\phi^{-1}T\phi)$ 是一个 Nijenhuis 配对 H-模。

下证 $(M,N,\phi^{-1}T\phi)$ 是一个 Nijenhuis 配对 H-余模,因为 $\rho\phi^{-1}=(\mathrm{id}\otimes\phi^{-1})\rho$,所以

$$\begin{aligned}(N\otimes\phi^{-1}T\phi)\rho&=(N\otimes\mathrm{id})(\mathrm{id}\otimes\phi^{-1}T)(\mathrm{id}\otimes\phi)\rho\\&=(N\otimes\phi^{-1}T)\rho\phi,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(N\otimes\mathrm{id}+\mathrm{id}\otimes\phi^{-1}T\phi)\rho\phi^{-1}T\phi-\rho(\phi^{-1}T\phi)^2&=(N\otimes\mathrm{id}+\mathrm{id}\otimes\phi^{-1}T\phi)(\mathrm{id}\otimes\phi^{-1})\rho T\phi-(\mathrm{id}\otimes\phi^{-1})\rho T^2\phi\\&=(N\otimes\phi^{-1}+\mathrm{id}\otimes\phi^{-1}T)\rho T\phi-(\mathrm{id}\otimes\phi^{-1})\rho T^2\phi\\&=(\mathrm{id}\otimes\phi^{-1})(N\otimes\mathrm{id}+\mathrm{id}\otimes T)\rho T\phi-(\mathrm{id}\otimes\phi^{-1})\rho T^2\phi\\&=(\mathrm{id}\otimes\phi^{-1})((N\otimes\mathrm{id})\rho T+(\mathrm{id}\otimes T)\rho T-\rho T^2)\phi\\&=(\mathrm{id}\otimes\phi^{-1})(N\otimes T)\rho\phi\\&=(N\otimes\phi^{-1}T)\rho\phi,\end{aligned}$$

即

$$(N\otimes\phi^{-1}T\phi)\rho+\rho(\phi^{-1}T\phi)^2=(N\otimes\mathrm{id}+\mathrm{id}\otimes\phi^{-1}T\phi)\rho\phi^{-1}T\phi,$$

故 $(M,N,\phi^{-1}T\phi)$ 是一个 Nijenhuis 配对 H-余模。再由定义 5 知 $(M,N,\phi^{-1}T\phi)$ 是一个 Nijenhuis 配对 H-Hopf 模。

下面建立 Nijenhuis 配对 H-Hopf 模与 Rota-Baxter 配对 H-Hopf 模之间的联系。

定义 7　设 H 为一个双代数,M 是一个左 H-Hopf 模,如果存在 2 个线性映射 $P:H\to H$, $T:M\to M$,使得 (M,P,T) 既是一个权重为 λ 的 Rota-Baxter 配对左 H-模,也是一个权重为 λ 的 Rota-Baxter 配对左 H-余模,则称 (M,P,T) 是一个权重为 λ 的 Rota-Baxter 配对左 H-Hopf 模[15]。

命题 4　设 M 是一个左 H-Hopf 模,如果存在 2 个线性算子 $N:H\to H$, $T:M\to M$,则下面结论成立:

(1) 若 $T^2=0$,则 (M,N,T) 是一个 Nijenhuis 配对 H-Hopf 模,当且仅当 (M,N,T) 是权重为 0 的 Rota-Baxter 配对 H-Hopf 模;

(2) 若 $T^2=T$,则 (M,N,T) 是一个 Nijenhuis 配对 H-Hopf 模,当且仅当 (M,N,T) 是权重为 -1 的 Rota-

Baxter 配对 H-Hopf 模;

(3) 若 $T^2=\mathrm{id}$,则(M,N,T)是一个 Nijenhuis 配对 H-Hopf 模,当且仅当$(M,N+\mathrm{id},T+\mathrm{id})$是一个权重为$-2$ 的 Rota-Baxter 配对 H-Hopf 模。

证明 (1)与(2)的证明是直接的。

(3) 对任意 $a\in A$, $m\in M$,有

$$(N+\mathrm{id})(a)\cdot(T+\mathrm{id})(m)=N(a)\cdot T(m)+N(a)\cdot m+a\cdot T(m)+a\cdot m,$$

$$\begin{aligned}&(T+\mathrm{id})((N+\mathrm{id})(a)\cdot m)+(T+\mathrm{id})(a\cdot(T+\mathrm{id})(m))-2(T+\mathrm{id})(a\cdot m)\\=&(T+\mathrm{id})(N(a)\cdot m+a\cdot m)+(T+\mathrm{id})(a\cdot T(m)+a\cdot m)-2(T(a\cdot m)+a\cdot m)\\=&T(N(a)\cdot m)+T(a\cdot m)+N(a)\cdot m+a\cdot m+T(a\cdot T(m))\\&+T(a\cdot m)+a\cdot T(m)+a\cdot m-2T(a\cdot m)-2a\cdot m\\=&T(N(a)\cdot m)+a\cdot T(m)+N(a)\cdot m+T(a\cdot T(m)),\end{aligned}$$

$$((N+\mathrm{id})\otimes(T+\mathrm{id}))\rho=(N\otimes T+N\otimes\mathrm{id}+\mathrm{id}\otimes T+\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})\rho,$$

$$\begin{aligned}&((N+\mathrm{id})\otimes\mathrm{id})\rho(T+\mathrm{id})+(\mathrm{id}\otimes(T+\mathrm{id}))\rho(T+\mathrm{id})-2\rho(T+\mathrm{id})\\=&(N\otimes\mathrm{id})\rho T+(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})\rho T+(N\otimes\mathrm{id})\rho+(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})\rho+(\mathrm{id}\otimes T)\rho T\\&+(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})\rho T+(\mathrm{id}\otimes T)\rho+(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})\rho-2(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})\rho T-2(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})\rho\\=&(N\otimes\mathrm{id})\rho T+(N\otimes\mathrm{id})\rho+(\mathrm{id}\otimes T)\rho T+(\mathrm{id}\otimes T)\rho。\end{aligned}$$

如果$(M,N+\mathrm{id},T+\mathrm{id})$是一组权重为$-2$ 的 Rota-Baxter 配对左 H-Hopf 模,则由 $T^2=\mathrm{id}$ 及上面的证明知

$$N(a)\cdot T(m)+a\cdot m=T(N(a)\cdot m)+T(a\cdot T(m)),$$

$$(N\otimes T)\rho+\rho=(N\otimes\mathrm{id})\rho T+(\mathrm{id}\otimes T)\rho T,$$

即(M,N,T)不仅是一个 Nijenhuis 配对 H-模,也是一个 Nijenhuis 配对 H-余模,故(M,N,T)是一个 Nijenhuis 配对 H-Hopf 模。

反之,证明类似。

下面探索 Nijenhuis 配对 H-Hopf 模的形变。

引理 1 设(M,N,T)是一个 Nijenhuis 配对 H-模,则$(M,\widetilde{N},\widetilde{T})$也是一个 Nijenhuis 配对 H-模。这里$\widetilde{N}=-k\,\mathrm{id}-N$, $\widetilde{T}=-k\,\mathrm{id}-T$, $k\in K$。

证明 对任意 $h\in H$, $m\in M$,有

$$\begin{aligned}\widetilde{N}(h)\cdot\widetilde{T}(m)&=(-k\,\mathrm{id}-N)(h)\cdot(-k\,\mathrm{id}-T)(m)\\&=(-kh-N(h))\cdot(-km-T(m))\\&=k^2h\cdot m+kh\cdot T(m)+kN(h)\cdot m+N(h)\cdot T(m),\\\widetilde{T}(\widetilde{N}(h)\cdot m)&=(-k\,\mathrm{id}-T)((-k\,\mathrm{id}-N)(h)\cdot m)\\&=(-k\,\mathrm{id}-T)\cdot((-kh-N(h))\cdot m)\\&=k^2h\cdot m+kT(h\cdot m)+kN(h)\cdot m+T(N(h)\cdot m),\\\widetilde{T}(h\cdot\widetilde{T}(m))&=(-k\,\mathrm{id}-T)(h\cdot(-k\,\mathrm{id}-T)(m))\\&=(-k\,\mathrm{id}-T)(-kh\cdot m-h\cdot T(m))\\&=k^2h\cdot m+kh\cdot T(m)+kT(h\cdot m)+T(h\cdot T(m)),\\\widetilde{T}^2(h\cdot m)&=(-k\,\mathrm{id}-T)^2(h\cdot m)\\&=k^2h\cdot m+2kT(h\cdot m)+T^2(h\cdot m),\end{aligned}$$

故由(M,N,T)是一个 Nijenhuis 配对 H-模知

$$\widetilde{N}(h)\cdot\widetilde{T}(m)+\widetilde{T}^2(h\cdot m)=\widetilde{T}(\widetilde{N}(h)\cdot m)+\widetilde{T}(h\cdot\widetilde{T}(m)),$$

即$(M,\widetilde{N},\widetilde{T})$也是一个 Nijenhuis 配对 H-模。

引理 2 设(M,N,T)是一个 Nijenhuis 配对 H-余模,则$(M,\widetilde{N},\widetilde{T})$也是一个 Nijenhuis 配对 H-余模,这里 $\widetilde{N}=-k\,\mathrm{id}-N$, $\widetilde{T}=-k\,\mathrm{id}-T$, $k\in K$。

证明 与引理 1 的证明类似,略。

命题 5　设(M,N,T)是一个 Nijenhuis 配对 H-Hopf 模,则$(M,\widetilde{N},\widetilde{T})$也是一个 Nijenhuis 配对 H-Hopf 模。这里$\widetilde{N}=-k\mathrm{id}-N$, $\widetilde{T}=-k\mathrm{id}-T$, $k\in K$。

证明　由引理 1 和 2 直接证明。

命题 6　设 M 是一个 H-Hopf 模,且存在 2 个 H-Hopf 子模 M_1 与 M_2 使得 $M=M_1\oplus M_2$,设 $p,q\in K$,令 $T:M\to M$, $T(m_1+m_2)=pm_1+qm_2$, $m_1\in M_1$, $m_2\in M_2$,则(M,T)是一个泛性的 Nijenhuis 配对 H-Hopf 模。

证明　显然 T 是一个 H-Hopf 模映射,由命题 1 知结论成立。

下面针对 Hopf 模由 Hopf 代数中的群像元构造 Nijenhuis 配对 H-Hopf 模。

命题 7　设 H 是一个双代数,ξ 是 H 的一个群像元,且 $\xi^2=\xi$,M 为一个左 H-Hopf 模,定义 2 个线性映射 $N_\xi:H\to H$, $N_\xi(h)=\xi h$ 和 $T_\xi:M\to M$, $T_\xi(m)=\xi\cdot m$,则(M,N_ξ,T_ξ)是一个 Nijenhuis 配对 H-Hopf 模。

证明　对任意 $h\in H$, $m\in M$,

$$N_\xi(h)\cdot T_\xi(m)=\xi h\cdot(\xi\cdot m)=\xi h\xi\cdot m,$$

$$\begin{aligned}&T_\xi(N_\xi(h)\cdot m)+T_\xi(h\cdot T_\xi(m))-T_\xi^2(h\cdot m)\\=&T_\xi(\xi h\cdot m)+T_\xi(h\xi\cdot m)-\xi^2h\cdot m\\=&\xi^2h\cdot m+\xi h\xi\cdot m-\xi^2h\cdot m\\=&\xi h\xi\cdot m,\end{aligned}$$

即有

$$N_\xi(h)\cdot T_\xi(m)+T_\xi^2(h\cdot m)=T_\xi(N_\xi(h)\cdot m)+T_\xi(h\cdot T_\xi(m)),$$

故(M,N_ξ,T_ξ)是一个 Nijenhuis 配对左 H-模。

下证(M,N_ξ,T_ξ)是一个 Nijenhuis 配对左 H-余模:

$$(N_\xi\otimes T_\xi)\rho(m)=N_\xi(m_{(-1)})\otimes T_\xi(m_{(0)})=\xi m_{(-1)}\otimes\xi\cdot m_{(0)},$$

$$\begin{aligned}&(\mathrm{id}\otimes T_\xi)\rho T_\xi(m)+(N_\xi\otimes\mathrm{id})\rho T_\xi(m)-\rho T_\xi^2(m)\\=&(\mathrm{id}\otimes T_\xi)\rho(\xi\cdot m)+(N_\xi\otimes\mathrm{id})\rho(\xi\cdot m)-\rho(\xi^2\cdot m)\\=&(\mathrm{id}\otimes T_\xi)\rho(\xi\cdot m)+(N_\xi\otimes\mathrm{id})\rho(\xi\cdot m)-\rho(\xi\cdot m)\\=&\xi m_{(-1)}\otimes T_\xi(\xi\cdot m_{(0)})+N_\xi(\xi m_{(-1)})\otimes\xi\cdot m_{(0)}-\xi m_{(-1)}\otimes\xi\cdot m_{(0)}\quad(\Delta(\xi)=\xi\otimes\xi)\\=&\xi m_{(-1)}\otimes\xi\cdot m_{(0)}+\xi m_{(-1)}\otimes\xi\cdot m_{(0)}-\xi m_{(-1)}\otimes\xi\cdot m_{(0)}\quad(\xi^2=\xi)\\=&\xi m_{(-1)}\otimes\xi\cdot m_{(0)},\end{aligned}$$

即有

$$(N_\xi\otimes T_\xi)\rho+\rho T_\xi^2=(\mathrm{id}\otimes T_\xi)\rho T_\xi+(N_\xi\otimes\mathrm{id})\rho T_\xi。$$

故(M,N_ξ,T_ξ)是一个 Nijenhuis 配对 H-Hopf 模。

引理 3　设 H 是一个具有对极映射 S 的 Hopf 代数,(M,T)是一个泛性的 Nijenhuis 配对 H-Hopf 模,如果 T 是一个 H-Hopf 模映射,则$(H\otimes M^{\mathrm{coH}},T')$是一个泛性的 Nijenhuis 配对 H-Hopf 模。

这里映射 T'定义为

$$T'(h\otimes m)=h\otimes T(m),\quad h\in H,\ m\in M^{\mathrm{coH}}$$

且 $M^{\mathrm{coH}}=\{m\in M|\rho(m)=1_H\otimes m\}$,其中 $H\otimes M^{\mathrm{coH}}$是一个 H-Hopf 模,即 $h\cdot(g\otimes m)=hg\otimes m$ 以及 $\rho(h\otimes m)=h_1\otimes h_2\otimes m$, $h,g\in H$, $m\in M^{\mathrm{coH}}$。

证明　因为 T 是一个 H-Hopf 模映射,所以 $T(M^{\mathrm{coH}})\subseteq M^{\mathrm{coH}}$,故 T'也是一个 H-Hopf 模映射。

下面给出泛性的 Nijenhuis 配对 H-Hopf 模的结构定理。

定理 8　设 H 是一个具有对极映射 S 的 Hopf 代数,(M,T)是一个泛性的 Nijenhuis 配对 H-Hopf 模,如果 T 是一个 H-Hopf 模映射,则存在一个泛性的 Nijenhuis 配对 H-Hopf 模同构

$$(M,T)\cong(H\otimes M^{\mathrm{coH}},T')。$$

证明　由引理 3 知$(H\otimes M^{\mathrm{coH}},T')$是一个泛性的 Nijenhuis 配对 H-Hopf 模。

根据文献[15]中的定理 4.1.1,定义 H-Hopf 模同构映射为

$$\alpha:H\otimes M^{\mathrm{coH}}\to M,\quad h\otimes m\mapsto h\cdot m,$$

并且定义其逆映射为

$$\beta: M \to H \otimes M^{\mathrm{coH}}, \quad m \mapsto m_{(-1)} \otimes E_M(m_{(0)}),$$

其中 $E_M(m) = S(m_{(-1)}) \cdot m_{(0)}$, $m \in M$。对任意 $m \in M$, 显然 $T' \circ \alpha = \alpha \circ T$, 因此存在一个泛性的 Nijenhuis 配对 H-Hopf 模同构于映射

$$(M, T) \cong (H \otimes M^{\mathrm{coH}}, T')。$$

参考文献:

[1] NIJENHUIS A. X_{n-1}-forming sets of eigenvectors[J]. Indagationes Mathematicae, 1951, 13:200-212.

[2] FRÖLICHER A, NIJENHUIS A. Theory of vector valued differential forms. part I[J]. Indagationes Mathematicae, 1956, 18: 338-360.

[3] MAGRI F. A simple model of the integrable Hamiltonian equation[J]. Journal of Mathematical Physics, 1978, 19(5):1156-1162.

[4] GOLUBCHIK I Z, SOKOLOV V V. One more type of classical Yang-Baxter equation[J]. Functional Analysis and Its Applications, 2000, 34:296-298.

[5] GOLUBCHIK I Z, SOKOLOV V V. Generalized operator Yang-Baxter equations, integrable ODEs and nonassociative algebras[J]. Journal of Nonlinear Mathematical Physics, 2000, 7(2):184-197.

[6] BAXTER G. An analytic problem whose solution follows from a simple algebraic identity[J]. Pacific Journal of Mathematics, 1960, 10(3):731-742.

[7] GUO Li, LIN Zongzhu. Representations and modules of Rota-Baxter algebras[J]. Asian Journal of Mathematics, 2021, 25(6):841-870.

[8] LIU Jiefeng, SHENG Yunhe, ZHOU Yanqiu. Nijenhuis operators on n-Lie algebras[J]. Communications in Theoretical Physics, 2016, 10(6):659-670.

[9] SWEEDLER M E. Hopf algebras[M]. New York: Benjamin, 1969.

[10] CARINENA J, GRABOWSKI J, MARMO G. Quantum bi-Hamiltonian systems[J]. International Journal of Modern Physics A, 2000, 15(30):4797-4810.

[11] EBRAHIMI-FARD K. Rota-Baxter algebras and the Hopf algebra of renormalization[D]. Germany: Bonn University, 2006.

[12] FANG Yunfei, WANG Ximu, ZHANG Liangyun. The deformations and constructions of Nijenhuis paired modules[J]. International Electronic Journal of Algebra, 2025, 38:52-69.

[13] GABRIELLA B, FLORIAN N, KORNÈL S. Weak Hopf algebras: I. integral theory and C^*-Structure[J]. Journal of Algebra, 1999, 221(2):385-438.

[14] ZHENG Huihui, GUO Li, ZHANG Liangyun. Rota-Baxter paired modules and their constructions from Hopf algebras[J]. Journal of Algebra, 2020, 559:601-624.

[15] ZHENG Huihui, ZHANG Yuxin, ZHANG Liangyun. Rota-Baxter paired comodule and Rota-Baxter paired Hopf module [J]. Colloquium Mathematical, 2021, 168(1):59-83.

(编辑:陈丽萍)