文章编号:1671-9352(2026)04-0042-04 DOI:10.6040/j.issn.1671-9352.0.2024.312

广义正规性对有限群 p-幂零性的影响

雒晓良,贾蕾
(太原师范学院数学与统计学院, 山西 晋中 030619)

摘要:分析 Sylow 子群的极大子群在群 G 中的 n-σ-嵌入性质,结合正规化子与导子群的理论,得到有限群是 p-幂零群的几个充分条件。

关键词:n-σ-嵌入子群;p-幂零群;p-可解群;σ-置换子群
中图分类号:O152 **文献标志码**:A
引用格式:雒晓良,贾蕾. 广义正规性对有限群 p-幂零性的影响[J]. 山东大学学报(理学版),2026,61(4):42-45,51.

Influence of the generalized normality on p-nilpotent of the finite group

LUO Xiaoliang, JIA Lei
(School of Mathematics and Statistics, Taiyuan Normal University, Jinzhong 030619, Shanxi, China)

Abstract: The n-σ-embedded properties of the maximal subgroups of the Sylow subgroups are investigated, and some sufficient conditions for finite groups to be p-nilpotent are obtained.

Key words: n-σ-embedded subgroup; p-nilpotent group; p-solvable group; σ-permutable subgroup

0 引言

子群的正规性一直都是群论学者研究的焦点,由置换子群和次正规子群推广而得的一些广义正规性近些年来受到持续关注。Skiba 等[1]提出 σ-群及相关正规性概念,并由此得到一系列有限群是 σ-可解群的判定定理。Wu 等[2]研究一类子群的广义正规性即嵌入性质,并由此给出一些有限群的结构定理。下面是文中所用到的关于 σ-群理论的一些符号和基本概念。

令 $\sigma=\{\sigma_i \mid i\in I\}$ 是所有素数集合 P 的一个划分,即有 $P=\bigcup_{i\in I}\sigma_i$ 且满足 $\sigma_i\cap\sigma_j=\varnothing$,其中 $i\neq j$;记 $\sigma(n)=\{\sigma_i \mid \sigma_i\cap\pi(n)\neq\varnothing\}$,若 $G=1$ 或 $|\sigma(G)|=1$,称 G 是 σ-本原的。设 Π 是 σ 的任一子集,$\mathscr{H}=\{H_1,H_2,\cdots,H_t\}$,其中每个 H_i 是 G 的 Hall σ_i-子群且 $\sigma_i\in\Pi\cap\pi(G)$,当 $i\neq j$, $\pi(H_i)\cap\pi(H_j)=\varnothing$ 并且有 $\pi(G)=\pi(H_1)\cup\pi(H_2)\cup\cdots\cup\pi(H_t)$,称 $\mathscr{H}$ 是 G 的一个完备的 Hall Π-集,当 $\Pi=\sigma$ 时,$\mathscr{H}$ 是 G 的一个完备的 Hall σ-集。当 G 有一个完备的 Hall σ-集,称 G 为 σ-full 群;如果 G 的每个子群都为 D_{σ_i}-群,其中 $\sigma_i\in\sigma(G)$,称 G 是 Sylow 型的 σ-full 群。设 H 是 G 的子群,若存在 G 的子群链 $H=H_0\leqslant H_1\leqslant\cdots\leqslant H_n=G$ 满足 $H_{i-1}\trianglelefteq H_i$ 或者 $H_i/(H_{i-1})_{H_i}$ 是 σ-本原的,$1\leqslant i\leqslant n$,则称 H 是 G 的 σ-次正规子群;如果 G 有一个完备的Hall σ-集 $\mathscr{H}=\{H_1,H_2,\cdots,H_t\}$,使得对 $\mathscr{H}$ 中每个 H_i 和 G 中的任意元素 x 都有 $HH_i^x=H_i^xH$,则称 H 是 G 的 σ-置换子群。

文献[3-4]中引入了 n-σ-嵌入的概念并得到群可解性的一些判定定理:设 H 是有限群 G 的子群,如果 G 有正规子群 K 使得 HK 在 G 中是 σ-置换的,并且有 $H\cap K\leqslant H_{\sigma G}$,其中 $H_{\sigma G}$ 是所有包含于 H 的 G 的 σ-置换子群生成的子群,则称 H 在 G 中 n-σ-嵌入。

收稿日期:2024-09-11; **网络出版时间**:2025-05-07
基金项目:山西省教育厅科技创新项目(2020L0518)
第一作者:雒晓良(1983—),男,副教授,硕士生导师,博士,研究方向为群论. E-mail:xlluo2016@aliyun.com

1　预备知识

引理 1[1]　令 H 为 σ-full 群 G 的 σ_1-子群,则 H 为 σ-置换子群当且仅当 $O^{\sigma_1}(G)\leqslant N_G(H)$。

引理 2[1-2]　设 G 是 Sylow 型的 σ-full 群,H 是 G 的子群,则

(1) 若 H 在 G 中 σ-置换且 $H\leqslant K\leqslant G$,则 H 在 K 中 σ-置换。

(2) 若 $N\trianglelefteq G$,H 在 G 中 σ-置换,则 HN/N 在 G/N 中 σ-置换。

(3) 若 H 在 G 中 σ-置换,则 H^x 在 G 中 σ-置换,$\forall x\in G$。

引理 3[3]　设 G 是 Sylow 型的 σ-full 群,H 是 G 的子群,

(1) 若 H 在 G 中 n-σ-嵌入且 $H\leqslant K\leqslant G$,则 H 在 K 中 n-σ-嵌入。

(2) 若 $N\trianglelefteq G$, $N\leqslant H$ 或 $(|N|,|H|)=1$,则当 H 在 G 中 n-σ-嵌入时,必然 HN/N 在 G/N 中 n-σ-嵌入。

(3) 若 H 在 G 中 n-σ-嵌入,则 H^x 在 G 中 n-σ-嵌入,$\forall x\in G$。

引理 4[5]　设 G 是 π-可分群,若 $O_{\pi'}(G)=1$,则 $C_G(O_\pi(G))\leqslant O_\pi(G)$。

引理 5[5]　设 p 为 $|G|$ 的最小素因子,若 $N\trianglelefteq G$ 且 $|N|=p$,则 $N\leqslant Z(G)$。

引理 6[5]　设 G 是有限群,$N\trianglelefteq G$ 且 $H\leqslant G$,若 $N\leqslant \Phi(H)$,则 $N\leqslant\Phi(G)$。

由文献[6]中的引理 2.1,易得引理 7、8。

引理 7　A 为 G 的 σ_1-子群且在 G 中 σ-次正规,H 为 G 的 Hall σ_1-子群,则 $A\leqslant H$。

引理 8　G 是 Sylow 型的 σ-full 群,A 为 G 的 σ_1-子群且在 G 中 σ-次正规,则 $A\leqslant O_{\sigma_1}(G)$。

引理 9[7]　如果 G 是 π-可分的,p 和 q 分别是 π 和 π'中的质数,则对于 $\sigma=\pi$, $\sigma=\{\pi,q\}$, $\sigma=\{p,q\}$,G 有一个 S_σ-子群。

引理 10[8]　设 p 为 $|G|$ 的素因子且 $(|G|,p-1)=1$,若 N 是 G 的 p 阶正规子群,则 $N\leqslant Z(G)$。

2　主要结论

为叙述方便,群 G 都是 Sylow 型的 σ-full 群,$\mathscr{H}=\{H_1,H_2,\cdots,H_t\}$ 为 G 的一个完备的 Hall σ-集,且满足 H_1 是幂零群,取 $p\in\sigma_1$。

定理 1　设 $P\in \mathrm{Syl}_p(H_1)$ 且 P 的极大子群在 G 中 n-σ-嵌入,若满足下列条件之一,则 G 是 p-幂零群:(a) G 是 p-可解群且 p 满足 $(|G|,p-1)=1$;(b) p 为奇素数且 $N_G(P)$ 是 p-幂零群。

证明　设 G 是极小阶反例,以下分步证明。

(1) $O_{p'}(G)=1$。

若 $L=O_{p'}(G)\neq 1$,考虑商群 G/L。$\overline{\mathscr{H}}=\{H_1L/L,H_2L/L,\cdots,H_tL/L\}$ 为 G/L 的一个完备的 Hall σ-集,H_1L/L为 G/L 的 Hall σ_1-子群且为幂零群,$PL/L\in \mathrm{Syl}_p(H_1L/L)$。任取 $P_1L/L\lessdot PL/L$,由引理 3 知 P_1L/L 在 G/L 中 n-σ-嵌入,$N_{G/L}(PL/L)=N_G(P)L/L$ 是 p-幂零群,G/L 满足定理条件,由 G 阶的极小性,得 G/L 是 p-幂零群,即 G 是 p-幂零群,矛盾。

(2) G 中包含 Sylow p-子群的真子群 M 都是 p-幂零群。

设$P^x\in \mathrm{Syl}_p(M)$,其中 $x\in G$,由引理 3 可知 P^x的极大子群 P_1^x 在 M 中 n-σ-嵌入,$N_G^x(P)=N_G(P^x)$为 p-幂零群,即 $N_M(P^x)\leqslant N_G(P^x)$为 p-幂零群,M 满足条件,从而 M 为 p-幂零群。

(3) G 为 p-可解群且 $C_G(O_p(G))\leqslant O_p(G)$。

设 $J(P)$ 是 P 的 Thompson 子群,则有 $P\leqslant N_G(Z(J(P)))$。若 $N_G(Z(J(P)))<G$,则由(2)可知 $N_G(Z(J(P)))$是 p-幂零群,G 是 p-幂零群,矛盾,故 $N_G(Z(J(P)))=G$,即 $Z(J(P))\lhd G$,所以 $O_p(G)\neq 1$。设 N 为 G 的极小正规 p-子群,则 $N\leqslant O_p(G)\leqslant P$,考虑商群 G/N,P/N 的极大子群 P_1/N 在 G/N 中 n-σ-嵌入,$N_{G/N}(P/N)=N_G(P)/N$ 是 p-幂零群,可知 G/N 满足条件,所以 G/N 为 p-幂零群,进而 G 为 p-可解群。因为 $O_{p'}(G)=1$,所以 $C_G(O_p(G))\leqslant O_p(G)$。

(4) $G=P^xQ$。

G 为 p-可解群,$\forall q\in\pi(G)$,其中 $q\neq p$,由引理9知,存在 G 的一个 Sylow q-子群 Q 使得 $P^xQ\leqslant G(x\in G)$。若 $P^xQ<G$,由(2)可知 P^xQ 为 p-幂零群,因此 $Q\lhd P^xQ$。考虑子群 $O_P(G)Q$,因为 $O_p(G)Q=O_p(G)\times Q$,所以 $[Q,O_p(G)]=1$,即 $Q\leqslant C_G(O_p(G))\leqslant O_p(G)$,矛盾,故有 $G=P^xQ$ 且 $H_1=P^x$。

(5) G 有唯一极小正规子群 N 使得 G/N 为 p-幂零群,$\Phi(G)=1$ 且 $N=O_P(G)=F(G)$。

令 N 是 G 的极小正规子群,在商群 G/N 中,$\bar{\mathscr{H}}=\{H_1N/N,H_2N/N,\cdots H_tN/N\}$ 是 G/N 的一个完备的 Hall σ-集且 H_1N/N 是幂零群。由于 G 是 p-可解群,因此 N 是初等交换 p-群,即 $N\leqslant P$。取 $P_1/N\lessdot P/N$,P_1/N在 G/L 中 n-σ-嵌入,从而 G/N 满足假设条件,由极小反例知 G/N 为 p-幂零群。若 G 中存在极小正规子群 $N_1\neq N$,有 G/N_1 为 p-幂零群,则 $G=G/N\cap N_1\lesssim G/N\times G/N_1$ 是 p-幂零群,矛盾,故 G 中极小正规子群唯一且 $\Phi(G)=1$。进一步地,有 $N=O_P(G)=F(G)$。因为 $O_{\sigma_1}(G)\leqslant H_1$ 是幂零群且 $O_{p'}(G)=1$,所以 $O_{\sigma_1}(G)=O_p(G)$。

(6) G 是 p-幂零群。

因为 $N\nleqslant\Phi(G)$,所以由引理6知 $N\nleqslant\Phi(P)$,从而存在 P 的极大子群 P_1 使得 $P=NP_1$。因为 $|N:N\cap P_1|=|NP_1:P_1|=p$,所以 $N\cap P_1\lessdot N$。当 $N\cap P_1=1$ 时,有 $|N|=p$。

当条件定理1(a)成立时,由引理10可知 $N\leqslant Z(G)$,由(5)知 G/N 为 p-幂零群,设 G/N 的正规 p-补为 K/N,由 Schur-Zassenhaus 定理,N 在 K 中有补,记为 H,$K=N\times H$,因此 H 为 G 的 Hall p'-子群。由于 H char $K\trianglelefteq G$,因此 $H\trianglelefteq G$,即 G 是 p-幂零群,矛盾。

当条件定理1(b)成立时,如果 $N\cap P_1=1$, $|N|=|N:N\cap P_1|=|NP_1:P_1|=p$,若 $p<q$,NQ 为 p-幂零群,则有 $Q\leqslant C_G(N)=C_G(O_p(G))\leqslant O_p(G)$,矛盾,则 $p>q$。因为

$$M\cong G/N=N_G(N)/C_G(N)\lesssim \mathrm{Aut}(N),$$

$\mathrm{Aut}(N)$为 $p-1$ 阶循环群,所以 M 循环,从而有 Q 循环,则 G 为 q-幂零群,即 $P\trianglelefteq G$,从而 $N_G(P)=G$ 是 p-幂零群,矛盾。

如果 $N\cap P_1\neq1$, P_1 在 G 中 n-σ-嵌入,存在正规子群 K 使得 P_1K 在 G 中是 σ-置换的,并且有 $P_1\cap K\leqslant(P_1)_{\sigma G}$。当 $K=1$ 时,P_1 为 σ-置换子群,由引理1可得 $O^p(G)\leqslant N_G(P_1)$。又因为 $P_1\trianglelefteq P$,所以 $P_1\trianglelefteq G$,从而 $N\leqslant P_1$,即 $P=P_1$ 矛盾。当 $K\neq1$ 时,$N\leqslant K$,则由引理8知 $N\cap P_1\leqslant P_1\cap K\leqslant(P_1)_{\sigma G}<N$,因为 $N\cap P_1\lessdot N$ 且 $N\nleqslant P_1$,所以 $N\cap P_1=(P_1)_{\sigma G}$在 G 中是 σ-置换的,则由引理1有 $O^p(G)\leqslant N_G(N\cap P_1)$,又因为 $N\cap P_1\trianglelefteq P$,所以 $N\cap P_1\trianglelefteq G$,于是 $N\cap P_1=1$ 或 $N\cap P_1=N$,矛盾,证毕。

注意到,对于$|G|$的最小素因子 p,显然满足$(|G|,p-1)=1$,则有推论1。

推论1 设 G 是 p-可解群,$P\in\mathrm{Syl}_p(H_1)$,如果 p 是$|G|$的最小素因子且 P 的极大子群在 G 中 n-σ-嵌入,则 G 是 p-幂零群。

减弱 Sylow p-子群在 G 中 n-σ-嵌入性质的约束,得到定理2。

定理2 设 G 是 p-可解群且 p 满足$(|G|,p-1)=1$,取 $P\in\mathrm{Syl}_p(H_1)$,若 P 的极大子群在 $N_G(P)$ 中 n-σ-嵌入且 P'在 G 中 σ-置换,则 G 是 p-幂零群。

证明 设 G 是极小阶反例,分步证明。

(1) $O_{p'}(G)=1$。

若 $L=O_{p'}(G)\neq1$,考虑商群 G/L。$\bar{\mathscr{H}}=\{H_1L/L,H_2L/L,\cdots,H_tL/L\}$ 为 G/L 的一个完备的 Hall σ-集,H_1L/L 为 G/L 的 Hall σ_1-子群且为幂零群,$PL/L\in\mathrm{Syl}_p(H_1L/L)$。任取 $P_1L/L\lessdot PL/L$,由引理2、3知,P_1L/L在 $N_G(P)L/L$ 中 n-σ-嵌入,$(PL/L)'=P'L/L$ 在 G/L 中 σ-置换,因此 G/L 满足定理2条件,由 G 阶的极小性,得 G/L 是 p-幂零群,即有 G 是 p-幂零群,矛盾。

(2) G 中包含 Sylow p-子群的真子群 M 都是 p-幂零群。

设 $P\leqslant M$, P 的极大子群 P_1 在 $N_M(P)$ 中 n-σ-嵌入,且由引理3知,对 $\forall x\in M$, P^x的极大子群 P_1^x 在 $N_M(P)$中也是 n-σ-嵌入的。P'在 M 中 σ-置换,由引理2知$(P')^x$ 在 M 中 σ-置换,从而 M 满足条件,得 M 为 p-幂零群。

(3) $G=P^xQ$。

G 为 p-可解群,$\forall q\in\pi(G)$,其中 $q\neq p$,存在 G 的一个 Sylow q-子群 Q 使得 $P^xQ\leqslant G(x\in G)$。若 $P^xQ<G$,

则由(2)可知 P^xQ 为 p-幂零群,因此 $Q\trianglelefteq P^xQ$,从而子群 $O_p(G)Q=O_p(G)\times Q$,所以 $[Q,O_p(G)]=1$,即 $Q\leqslant C_G(O_p(G))\leqslant O_p(G)$,矛盾,则有 $G=P^xQ$ 且 $H_1=P^x$。

(4) G 是 p-幂零群。

因为 P' 在 G 中 σ-置换,所以 $O^p(G)\leqslant N_G(P')$,又因为 $P'\trianglelefteq P$,则 $P'\trianglelefteq PO^p(G)=G$,在商群 G/P' 中,$P/P'\in \mathrm{Syl}_p(H_1/P')$。取 $M/P'\lessdot P/P'$,有 M/P' 在 $N_{G/P'}(P/P')=N_G(P)/P'$ 中 n-σ-嵌入,$(P/P')'=1$ 在 G/P' 中 σ-置换,从而 G/P' 满足定理 1 条件,由 G 阶的极小性,得 G/P' 是 p-幂零群。又因为 $P'\leqslant\Phi(P)$,由引理 6 可知 $P'\leqslant\Phi(G)$,则 $G/\Phi(G)$ 是 p-幂零群,即 G 是 p-幂零群,矛盾,从而 $P'=1$,P 为交换群。由定理 1 可知 $N_G(P)$ 是 p-幂零群,进而 $P\leqslant Z(N_G(P))$,则 G 是 p-幂零群,矛盾。证毕。

推论 2　设 G 是 p-可解群,p 是 $|G|$ 的最小素因子,取 $P\in \mathrm{Syl}_p(H_1)$,若 P 的极大子群在 $N_G(P)$ 中 n-σ-嵌入且 P' 在 G 中 σ-置换,则 G 是 p-幂零群。

以下结论去掉了 Sylow p-子群的约束,利用更小的 p-子群研究。

定理 3　设 G 是 p-可解群,p 满足 $(|G|,p-1)=1$,取 $N\trianglelefteq G$ 使得 G/N 为 p-幂零群及 $P\in \mathrm{Syl}_p(N\cap H_1)$,若 P 的极大子群在 $N_G(P)$ 中 n-σ-嵌入且 P' 在 G 中 σ-置换,则 G 是 p-幂零群。

证明　P 的每个极大子群在 $N_N(P)$ 中 n-σ-嵌入且 P' 在 N 中 σ-置换,由定理 2 知 N 为 p-幂零群,于是 $N=PL$,其中 L 为正规 p-补。因为 L char $N\trianglelefteq G$,所以 L 是 G 的正规子群。

当 $L=1$ 时,则有 $N=P$,于是 $G/N=G/P$ 是 p-幂零群,设 K/P 为 G/P 的正规 p-补,易知 K 满足定理 2 条件,从而 K 为 p-幂零群,则 K 的正规 p-补为 G 的正规 p-补,即 G 是 p-幂零群。

当 $L\neq1$ 时,考虑商群 G/L, $N/L\trianglelefteq G/L$ 并且 $\bar{G}/\bar{N}$ 为 p-幂零群,$PL/L\in \mathrm{Syl}_p((N\cap H_1)L/L)$, $P_1L/L\lessdot PL/L$,由引理 2 知 P_1L/L 在 $N_G(P)L/L$ 中 n-σ-嵌入,$(PL/L)'=P'L/L$ 在 G/L 中 σ-置换,因此 G/L 满足上述定理 3 条件,由 G 阶的极小性,得 G/L 是 p-幂零群,即有 G 是 p-幂零群,矛盾。证毕。

推论 3　设 G 是 p-可解群,p 是 $|G|$ 的最小素因子,取 $N\trianglelefteq G$ 使得 G/N 为 p-幂零群及 $P\in \mathrm{Syl}_p(N\cap H_1)$,若 P 的极大子群在 $N_G(P)$ 中 n-σ-嵌入且 P' 在 G 中 σ-置换,则 G 是 p-幂零群。

定理 4　设 p 为奇素数,$N\trianglelefteq G$ 使得 G/N 为 p-幂零群及 $P\in \mathrm{Syl}_p(N\cap H_1)$,若 P 的极大子群在 G 中 n-σ-嵌入且 $N_G(P)$ 是 p-幂零群,则 G 是 p-幂零群。

证明　设 G 是极小阶反例,分步证明。

(1) $O_{p'}(G)=1$。

令 $L=O_{p'}(G)\neq1$,考虑商群 $\bar{G}=G/L$,令 $\bar{N}=NL/L$,有 $\bar{G}/\bar{N}\cong G/NL$ 为 p-幂零群,由于 $P\in \mathrm{Syl}_p(N\cap H_1)$,因此,$PL/L\in \mathrm{Syl}_p((N\cap H_1)L/L)$, $N_{\bar{G}}(\bar{P})=\overline{N_G(P)}=N_G(P)L/L$ 是 p-幂零群。令 P_1L/L 为 PL/L 的极大子群,其中 $P_1\lessdot P$。由引理 3 知 P_1L/L 在 $\bar{G}$ 中 n-σ-嵌入,从而 G/L 满足定理条件,由 G 阶的极小性,得 G/L 是 p-幂零群,即有 G 是 p-幂零群,矛盾。

(2) 推出矛盾。

对于 $N\leqslant G$,显然 N 满足定理 1 条件,N 是 p-幂零群,但由(1)必然 $N=P$,则 $N_G(P)=G$ 是 p-幂零群,矛盾。证毕。

参考文献:

[1] SKIBA A N. On σ-subnormal and σ-permutable subgroups of finite groups[J]. Journal of Algebra, 2015, 436:1-16.

[2] WU Zhenfeng, ZHANG Chi, HUANG Jianhong. Finite groups with given σ-embedded and n-σ-embedded subgroups[J]. Indian Journal of Pure and Applied Mathematics, 2017, 48(3):429-448.

[3] CAO C C, HUSSAIN M T, ZHANG L. On n-σ-embedded subgroups of finite groups[J]. Acta Mathematica Hungarica, 2018, 155(2):502-517.

[4] 毛月梅,马小箭. σ-群理论在嵌入性方面的一些应用[J]. 数学的实践与认识,2020,50(15):170-176.
MAO Yuemei, MA Xiaojian. Some applications of σ-group theory in embeddability of subgroups[J]. Mathematics in Practice and Theory, 2020, 50(15):170-176.

(下转第 51 页)