山东大学学报(理学版)2026 年 4 月 第 61 卷 第 4 期
Journal of Shandong University(*Natural Science*), Vol.61, No.4, 2026 http://lxbwk.njournal.sdu.edu.cn

文章编号:1671-9352(2026)04-0025-12 DOI:10.6040/j.issn.1671-9352.0.2024.114

外三角范畴粘合的低阶 K-群

郑敏[1,2],陈清华[2*]
(1.福建江夏学院数理教研部, 福建 福州 350108; 2.福建师范大学数学与统计学院, 福建 福州 350117)

摘要:证明在一定条件下外三角范畴左(右)粘合中 3 个范畴的 K_i-群间具有直和同构关系,推广关于 Abel 范畴(三角范畴)粘合的 K_i-群的已有结论($i=0,1$)。利用外三角范畴的粘合刻画 3 个范畴的幂等完备化范畴 K_i-群的可加性($i=0,1$)。

关键词:外三角范畴;粘合;K_i-群;幂等完备化范畴;三角范畴

中图分类号:O154 **文献标志码**:A

引用格式:郑敏,陈清华. 外三角范畴粘合的低阶 K-群[J]. 山东大学学报(理学版),2026,61(4):25-36.

Lower K-groups of the recollement of extriangulated categories

ZHENG Min[1,2], CHEN Qinghua[2*]
(1. Department of Mathematics and Physics, Fujian Jiangxia University, Fuzhou 350108, Fujian, China; 2. School of Mathematics and Statistics, Fujian Normal University, Fuzhou 350117, Fujian, China)

Abstract: This paper proves that, under certain conditions, there exists the direct and isomorphic relation among the K_i-groups of three categories in the left (right) recollement of extriangulated categories, which generalizes the conclusions of K_i-groups of recollements of abelian (triangulated) categories($i=0,1$). The recollement of extriangulated categories is used to describe the additivity of K_i-groups of the idempotent completion categories of its three categories($i=0,1$).

Key words: extriangulated category; recollement; K_i-group; idempotent completion category; triangulated category

0 引言

综合正合范畴[1]和三角范畴的相似特征,Nakaoka 等[2]引入的外三角范畴(extriangulated category)涵盖了正合范畴、三角范畴和一些非正合非三角的范畴,拓宽常见的 Abel 范畴、正合范畴和三角范畴间关系的研究空间。

K-理论在代数拓扑、代数几何、弦理论等数学和物理的许多相关领域中都起着重要的作用。代数 K-理论,被视作是对环的模和线性代数特别是向量空间的维数理论以及行列式理论的推广。由于低阶 K-群是利用范畴的对象和自同构态射给出的定义,范畴的特征可折射到低阶 K-群上,因此对低阶 K-群的研究是常见的热点问题[3-10]。

基于 Abel 范畴粘合和三角范畴粘合的共性,Wang 等[11]引入外三角范畴粘合的概念。关于范畴的粘合,3 个范畴间的同调及表示论性质等关系研究一直以来是人们关注的焦点。比如范畴的粘合中 3 个范畴间挠对(余挠对)的关系[12-14]、t-结构的关系[15]、同调维数的关系[16]等。

本文研究外三角范畴左(右)粘合中 3 个范畴 K_i-群间的关系,所得结论推广关于 Abel 范畴(三角范畴)的粘合中 3 个范畴 K_i-群的相关结论($i=0,1$),并给出关于非 Abel 范畴且非三角范畴的粘合中 3 个范畴 K_i-群的应用实例。进一步地,作为应用,利用外三角范畴的粘合刻画 3 个范畴的幂等完备化范畴 K_i-群间关系。

收稿日期:2024-04-07; **网络出版时间**:2025-07-09
基金项目:国家自然科学基金资助项目(11871404); 福建江夏学院国家基金培育项目(JXZ2023005)
第一作者:郑敏(1983—),女,副教授,博士,研究方向为代数表示论. E-mail:woshizhengmin20@163.com
* **通信作者**:陈清华(1962—),男,教授,博士,研究方向为代数表示论. E-mail:cqhmath@fjnu.edu.cn

1 预备知识

本章简要介绍外三角范畴粘合的相关概念[2,11]。为使范畴的 K_i-群定义有意义,本文假设范畴均是小范畴。

设$(\mathscr{C},\mathbf{E},\mathfrak{s})$是外三角范畴,称$\mathscr{C}$中态射序列

$$X_n \xrightarrow{d_n} X_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} \cdots \xrightarrow{d_2} X_1 \xrightarrow{d_1} X_0$$

为 $\mathbf{E}$-三角序列[11],如果对$\forall\, 1\leqslant i\leqslant n-1$,存在$K_i\in\mathscr{C}$和 $\mathbf{E}$-三角

$$K_{i+1} \xrightarrow{g_{i+1}} X_i \xrightarrow{f_i} K_i \dashrightarrow,$$

式中,$K_n=X_n$, $g_n=d_n$, $K_1=X_0$ 且 $f_1=d_1$,使得 $d_i=g_if_i$, $\forall\, 1<i<n$。

称$\mathscr{C}$中态射序列 $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ 为一个容许序列(conflation)[2],若它实现了某个 $\mathbf{E}$-扩张 $\delta\in\mathbf{E}(C,A)$。此时,称态射 f 是一个容许单态射(inflation),态射 g 是一个容许满态射(deflation)[2]。

设 $f:X\to Y$ 为$\mathscr{C}$中态射,称 f 为相容态射(compatible morphism)[11],如果 f 既是容许单态射又是容许满态射,则 f 为同构。态射 f 若为相容态射,则 f 要么不是容许单态射,要么不是容许满态射,要么是同构。值得注意的是正合范畴中任何态射都是相容态射,且三角范畴中任何相容态射都是同构[11]。

定义 1[11] 称$\mathscr{C}$中态射序列 $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ 右正合,若存在容许满且相容的态射 $h_1:A\to K$ 和 $\mathbf{E}$-三角 $K \xrightarrow{h_2} B \xrightarrow{g} C \dashrightarrow$,使得 $f=h_2h_1$。对偶可定义左正合序列。

称$\mathscr{C}$中态射序列 $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} D$ 右正合(或 左正合),若存在 $\mathbf{E}$-三角

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g_1} K \dashrightarrow \text{和}\ K \xrightarrow{g_2} C \xrightarrow{h} D \dashrightarrow,$$

使得 $g=g_2g_1$ 且 g_1(或 g_2)为相容态射。

命题 1[11] 令 η 表示$\mathscr{C}$中序列 $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$,则 η 既是左正合又是右正合序列当且仅当 η 为容许序列。

命题 2[11] 令 η 表示$\mathscr{C}$中右正合列 $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$,则

(1) 如果 f 是容许单态射,那么 η 为容许序列;

(2) 如果 $A=0$,则 g 是同构。

注 1 上述命题的对偶结论依然成立[11]。

定义 2[11] 设$(\mathscr{A},\mathbf{E}_{\mathscr{A}},\mathfrak{s}_{\mathscr{A}})$和$(\mathscr{B},\mathbf{E}_{\mathscr{B}},\mathfrak{s}_{\mathscr{B}})$是外三角范畴,$F:\mathscr{A}\to\mathscr{B}$是加法共变函子,称 F 为右正合函子,如果满足以下条件:

(1) 如果 f 是$\mathscr{A}$中的相容态射,则 $F(f)$ 是$\mathscr{B}$中的相容态射;

(2) 如果 $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ 是$\mathscr{A}$中的右正合序列,则 $F(A) \xrightarrow{F(f)} F(B) \xrightarrow{F(g)} F(C)$ 是$\mathscr{B}$中的右正合序列;

(3) 存在自然变换 $\eta:\mathbf{E}_{\mathscr{A}}(-,-)\to\mathbf{E}_{\mathscr{B}}(F^{\mathrm{op}}(-),-)$,其中对$\forall\,(C,A)\in\mathscr{A}^{\mathrm{op}}\times\mathscr{A}$,

$$\eta_{(C,A)}:\mathbf{E}_{\mathscr{A}}(C,A)\to\mathbf{E}_{\mathscr{B}}(F^{\mathrm{op}}(C),A'),$$

使得 $\mathfrak{s}_{\mathscr{B}}(\eta_{(C,A)}(\delta))=[A' \xrightarrow{x} F(B) \xrightarrow{F(g)} F(C)]$,其中 $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \overset{\delta}{\dashrightarrow}$ 为 $\mathbf{E}_{\mathscr{A}}$-三角。

注 2 左正合函子对偶可定义[11]。

定义 3[11] 设$(\mathscr{A},\mathbf{E}_{\mathscr{A}},\mathfrak{s}_{\mathscr{A}})$和$(\mathscr{B},\mathbf{E}_{\mathscr{B}},\mathfrak{s}_{\mathscr{B}})$是外三角范畴,$F:\mathscr{A}\to\mathscr{B}$是加法共变函子。称 F 为正合函子,如果满足条件

(1) 如果 f 是$\mathscr{A}$中的相容态射,则 $F(f)$ 是$\mathscr{B}$中的相容态射;

(2) 存在自然变换

$$\eta=\{\eta_{(C,A)}\mid(C,A)\in\mathscr{A}^{\mathrm{op}}\times\mathscr{A}\}:\mathbf{E}_{\mathscr{A}}(-,-)\to\mathbf{E}_{\mathscr{B}}(F^{\mathrm{op}}(-),F(-));$$

(3) 如果 $\mathfrak{s}_{\mathscr{A}}(\delta)=[A \xrightarrow{x} B \xrightarrow{y} C]$,则

$$\mathfrak{s}_{\mathscr{B}}(\eta_{(C,A)}(\delta))=[F(A)\xrightarrow{F(x)}F(B)\xrightarrow{F(y)}F(C)]。$$

命题 3[11]　设$(\mathscr{A},\mathbf{E}_{\mathscr{A}},\mathfrak{s}_{\mathscr{A}})$和$(\mathscr{B},\mathbf{E}_{\mathscr{B}},\mathfrak{s}_{\mathscr{B}})$是外三角范畴,$F:\mathscr{A}\to\mathscr{B}$是加法共变函子,则 F 是正合函子当且仅当 F 是左正合且右正合。

定义 4[11]　设 $\mathscr{A}$,$\mathscr{B}$和 $\mathscr{C}$是外三角范畴,加法函子的图

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{A} \arrow[r, "i_*=i_!"] & \mathscr{B} \arrow[l, bend right, "i^*"'] \arrow[l, bend left, "i^!"] \arrow[r, "j^*=j^!"] & \mathscr{C} \arrow[l, bend right, "j_!"'] \arrow[l, bend left, "j_*"]
\end{tikzcd}$$

称为 $\mathscr{B}$相对于 $\mathscr{A}$和 $\mathscr{C}$的一个粘合(recollement),如果 i^* 和 $j_!$是右正合函子,i_* 和 $j^!$是正合函子,$i^!$和 j_*是左正合函子,且满足以下 5 个条件:

(ER1) $(i^*,i_*=i_!,i^!)$及$(j_!,j^!=j^*,j_*)$是伴随三元组;

(ER2) $\mathrm{Im}\ i_*=\mathrm{Ker}\ j^*$;

(ER3) i_*、$j_!$、j_*是满嵌函子;

(ER4) 对任意 $X\in\mathscr{B}$,存在左正合 $\mathbf{E}_{\mathscr{B}}$-三角序列

$$i_!i^!X\xrightarrow{\varepsilon_X}X\xrightarrow{\eta_X}j_*j^*X\longrightarrow i_*A,$$

其中 $A\in\mathscr{A}$, ε_X 和 η_X 是后连接态射和前连接态射;

(ER5) 对任意 $X\in\mathscr{B}$,存在右正合 $\mathbf{E}_{\mathscr{B}}$-三角序列

$$i_*A'\longrightarrow j_!j^!X\xrightarrow{\delta_X}X\xrightarrow{\zeta_X}i_*i^*X,$$

其中 $A'\in\mathscr{A}$, δ_X 和 ζ_X 是后连接态射和前连接态射。

方便起见,本文后续将外三角范畴的粘合记为$(\mathscr{A},\mathscr{B},\mathscr{C},i^*,i_*,i^!,j_!,j^*,j_*)$。

注 3　由于 Abel 范畴(三角范畴)$\mathscr{A}$、$\mathscr{B}$和 $\mathscr{C}$为外三角范畴,定义外三角范畴粘合$(\mathscr{A},\mathscr{B},\mathscr{C},i^*,i_*,i^!,j_!,j^*,j_*)$,这与文献[17-18]中 Abel 范畴(三角范畴)粘合的定义一致。

为精确刻画外三角范畴粘合的 3 个范畴间 K_i-群的关系($i=0,1$),下面定义外三角范畴的左(右)粘合。

定义 5　设 $\mathscr{A}$,$\mathscr{B}$和 $\mathscr{C}$是外三角范畴,加法函子的图

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{A} \arrow[r, bend right, "i_*"'] & \mathscr{B} \arrow[l, bend right, "i^*"'] \arrow[r, bend right, "j^!"'] & \mathscr{C} \arrow[l, bend right, "j_!"']
\end{tikzcd}$$

称为 $\mathscr{B}$相对于 $\mathscr{A}$和 $\mathscr{C}$的一个左粘合,如果 i^* 和 $j_!$是右正合函子,i_*和 $j^!$是左正合函子且满足下述 4 个条件:

(1) (i^*,i_*)和$(j_!,j^!)$是伴随对;

(2) $\mathrm{Im}\ i_*=\mathrm{Ker}\ j^!$;

(3) i_*,$j_!$是满嵌函子;

(4) 对任意 $X\in\mathscr{B}$,存在右正合 $\mathbf{E}_{\mathscr{B}}$-三角序列

$$i_*(A')\longrightarrow j_!j^!(X)\xrightarrow{\delta_X}X\xrightarrow{\zeta_X}i_*i^*(X),$$

其中,$A'\in\mathscr{A}$, δ_X 和 ζ_X 是后连接态射和前连接态射。

加法函子的图

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{A} \arrow[r, bend left, "i_!"] & \mathscr{B} \arrow[l, bend left, "i^!"] \arrow[r, bend left, "j^*"] & \mathscr{C} \arrow[l, bend left, "j_*"]
\end{tikzcd}$$

称为 $\mathscr{B}$相对于 $\mathscr{A}$和 $\mathscr{C}$的一个右粘合,如果 $i_!$和 j^*是右正合函子,$i^!$和 j_*是左正合函子,且满足下述 4 个条件:

(1) $(i_!,i^!)$和(j^*,j_*)是伴随对;

(2) $\mathrm{Im}\ i_!=\mathrm{Ker}\ j^*$;

(3) $i_!$ 和 j_* 是满嵌函子;

(4) 对任意 $X\in\mathscr{B}$,存在左正合 $\mathbf{E}_{\mathscr{B}}$-三角序列

$$i_!i^!(X)\xrightarrow{\varepsilon_X}X\xrightarrow{\eta_X}j_*j^*(X)\longrightarrow i_!(A),$$

其中 $A\in\mathscr{A}$, ε_X 和 η_X 是后连接态射和前连接态射。

方便起见,本文后续将外三角范畴的左粘合记为($\mathscr{A},\mathscr{B},\mathscr{C},i^*,i_*,j_!,j^!$),外三角范畴的右粘合记为($\mathscr{A},\mathscr{B},\mathscr{C},i_!,i^!,j^*,j_*$)。

命题 4　设 $\mathscr{A}$、$\mathscr{B}$ 和 $\mathscr{C}$ 为外三角范畴,则($\mathscr{A},\mathscr{B},\mathscr{C},i^*,i_*,i^!,j_!,j^*,j_*$)是 $\mathscr{B}$ 相对于 $\mathscr{A}$ 和 $\mathscr{C}$ 的一个粘合当且仅当($\mathscr{A},\mathscr{B},\mathscr{C},i^*,i_*,j_!,j^!$)是 $\mathscr{B}$ 相对于 $\mathscr{A}$ 和 $\mathscr{C}$ 的一个左粘合且($\mathscr{A},\mathscr{B},\mathscr{C},i_!,i^!,j^*,j_*$)是 $\mathscr{B}$ 相对于 $\mathscr{A}$ 和 $\mathscr{C}$ 的一个右粘合以及 $i_*=i_!$, $j^!=j^*$。

证明　由定义 4、5 易得上述充要关系。

关于外三角范畴的左(右)粘合有以下性质。

命题 5　如果存在 $\mathscr{B}$ 相对于 $\mathscr{A}$ 和 $\mathscr{C}$ 的一个左粘合

$$\begin{tikzcd}\mathscr{A} \arrow[r, shift right, "i_*"'] & \mathscr{B} \arrow[l, shift right, "i^*"'] \arrow[r, shift right, "j^!"'] & \mathscr{C} \arrow[l, shift right, "j_!"']\end{tikzcd},$$

则(1) $i^*j_!=0$;

(2) 如果 i^* 是正合函子,对任意 $X\in\mathscr{B}$,存在 $\mathbf{E}_{\mathscr{B}}$-三角

$$j_!j^!(X)\xrightarrow{\delta_X}X\xrightarrow{\zeta_X}i_*i^*(X)\dashrightarrow,$$

其中 δ_X 和 ζ_X 是后连接态射和前连接态射。

对偶地,如果存在 $\mathscr{B}$ 相对于 $\mathscr{A}$ 和 $\mathscr{C}$ 的一个右粘合

$$\begin{tikzcd}\mathscr{A} \arrow[r, shift left, "i_!"] & \mathscr{B} \arrow[l, shift left, "i^!"] \arrow[r, shift left, "j^*"] & \mathscr{C} \arrow[l, shift left, "j_*"]\end{tikzcd},$$

则(1) $i^!j_*=0$;

(2) 如果 $i^!$ 是正合函子,对任意 $X\in\mathscr{B}$,存在 $\mathbf{E}_{\mathscr{B}}$-三角

$$i_!i^!(X)\xrightarrow{\varepsilon_X}X\xrightarrow{\eta_X}j_*j^*(X)\dashrightarrow,$$

其中 ε_X 和 η_X 是后连接态射和前连接态射。

证明　仅证明左粘合情形。右粘合情形同理可证。

(1) 对任意 $X\in\mathscr{C}$,由于 $j^!i_*=0$,因此

$$\mathscr{A}(i^*j_!(X),i^*j_!(X))\cong\mathscr{B}(j_!(X),\ i_*i^*j_!(X))\cong\mathscr{C}(X,j^!i_*i^*j_!(X))=0,$$

从而 $i^*j_!=0$。

(2) 对任意 $X\in\mathscr{B}$,存在右正合 $\mathbf{E}_{\mathscr{B}}$-三角序列

$$i_*(A')\xrightarrow{h}j_!j^!(X)\xrightarrow{\delta_X}X\xrightarrow{\zeta_X}i_*i^*(X),$$

满足 $i_*(A')\xrightarrow{h}j_!j^!(X)\xrightarrow{h_1}M\dashrightarrow$ 及 $M\xrightarrow{h_2}X\xrightarrow{\zeta_X}i_*i^*(X)\dashrightarrow$ 是 $\mathbf{E}_{\mathscr{B}}$-三角,其中 h_1 是相容的,且 $\delta_X=h_2h_1$。

由 i^* 正合,可得 $i^*j_!j^!(X)\xrightarrow{i^*(\delta_X)}i^*(X)\xrightarrow{i^*(\zeta_X)}i^*i_*i^*(X)$ 右正合。又由 $i^*j_!=0$,可得 $i^*j_!j^!(X)=0$,故 $i^*(\zeta_X)$ 同构。

将正合函子 i^* 作用于 $\mathbf{E}_{\mathscr{B}}$-三角 $M\xrightarrow{h_2}X\xrightarrow{\zeta_X}i_*i^*(X)\dashrightarrow$,可得

$$i^*(M)\xrightarrow{i^*(h_2)}i^*(X)\xrightarrow{i^*(\zeta_X)}i^*i_*i^*(X)\dashrightarrow$$

是 $\mathbf{E}_{\mathscr{A}}$-三角,从而 $i^*(M)=0$。又依 i^* 正合,可得

$$i^*i_*(A') \xrightarrow{i^*(h)} i^*j_!j^!(X) \xrightarrow{i^*(h_1)} i^*(M) \dashrightarrow$$

是 $\mathbf{E}_{\mathscr{A}}$-三角,故 $i^*(h)$ 为同构,从而 $i^*i_*(A') \cong i^*j_!j^!(X) \cong 0$。

又由于 i_* 为满嵌入函子,因此 $A' \cong i^*i_*(A') = 0$, h_1 为同构,故

$$j_!j^!(X) \xrightarrow{\delta_X} X \xrightarrow{\zeta_X} i_*i^*(X) \dashrightarrow$$

是 $\mathbf{E}_{\mathscr{B}}$-三角。

2　外三角范畴粘合的 K_0-群的可加性

本章将研究外三角范畴左(右)粘合中 3 个范畴 K_0-群间的关系。首先回顾外三角范畴的 K_0-群定义。

定义 6[10]　设 $\mathscr{C}$ 是外三角范畴。令 $\mathscr{F}$ 为以 $\mathscr{C}$ 中对象同构类 $\langle X\rangle$ 为基的自由 Abel 群,$\mathscr{F}_0$ 是由 $\{\langle X\rangle - \langle Y\rangle + \langle Z\rangle \mid X \longrightarrow Y \longrightarrow Z \dashrightarrow$ 为 $\mathbf{E}_{\mathscr{C}}$-三角$\}$ 生成的 $\mathscr{F}$ 的子群,则称商群 $\mathscr{F}/\mathscr{F}_0$ 为 $\mathscr{C}$ 的 K_0-群,记为 $K_0(\mathscr{C})$。($[X]$ 表示对应于同构类 $\langle X\rangle$ 在 $K_0(\mathscr{C})$ 中的元素。)

注 4　设 Ab 表示 Abel 群范畴,$\mathscr{W}$ 表示以小外三角范畴为对象,正合函子为态射所构成的范畴。显然,外三角范畴的 K_0-群定义具有函子性,即可定义函子 $K_0: \mathscr{W} \to Ab$,使得对 $\forall\, \mathscr{C} \in \operatorname{obj} \mathscr{W}$, $K_0(\mathscr{C})$ 是 $\mathscr{C}$ 的 K_0-群,且对任意正合函子 $F: \mathscr{C} \to \mathscr{D}$,

$$\begin{array}{rccc} K_0(F): & K_0(\mathscr{C}) & \to & K_0(\mathscr{D}) \\ & [X] & \mapsto & [F(X)] \end{array}$$

为 Abel 群同态。

以下结合外三角范畴左(右)粘合的结构特征,证得 3 个范畴 K_0-群在一定条件下存在如下关系。

定理 1　设 $\mathscr{A}$,$\mathscr{B}$ 和 $\mathscr{C}$ 是外三角范畴,若存在 $\mathscr{B}$ 相对于 $\mathscr{A}$ 和 $\mathscr{C}$ 的一个左粘合

$$\begin{tikzcd} \mathscr{A} \arrow[r, shift right, "i_*"'] & \mathscr{B} \arrow[l, shift right, "i^*"'] \arrow[r, shift right, "j^!"'] & \mathscr{C} \arrow[l, shift right, "j_!"'] \end{tikzcd}$$

使得 i^* 和 $j_!$ 为左正合函子,$j^!$ 和 i_* 为右正合函子,则 $K_0(\mathscr{A}) \oplus K_0(\mathscr{C}) \cong K_0(\mathscr{B})$。

对偶地,若存在 $\mathscr{B}$ 相对于 $\mathscr{A}$ 和 $\mathscr{C}$ 的一个右粘合

$$\begin{tikzcd} \mathscr{A} \arrow[r, shift left, "i_!"] & \mathscr{B} \arrow[l, shift left, "i^!"] \arrow[r, shift left, "j^*"] & \mathscr{C} \arrow[l, shift left, "j_*"] \end{tikzcd}$$

使得 j^* 和 $i_!$ 为左正合函子,$i^!$ 和 j_* 为右正合函子,则 $K_0(\mathscr{A}) \oplus K_0(\mathscr{C}) \cong K_0(\mathscr{B})$。

证明　由于 $(\mathscr{A}, \mathscr{B}, \mathscr{C}, i^*, i_*, j_!, j^!)$ 是 $\mathscr{B}$ 相对于 $\mathscr{A}$ 和 $\mathscr{C}$ 的一个左粘合,i^* 和 $j_!$ 为左正合函子,且 $j^!$ 和 i_* 为右正合函子,因此 i^*,$j_!$,$j^!$ 和 i_* 为正合函子。由正合函子 i^* 和 $j^!$ 可诱导出 Abel 群同态

$$\begin{array}{rccccrccc} \varphi_1: & K_0(\mathscr{B}) & \to & K_0(\mathscr{A}) & \qquad & \varphi_2: & K_0(\mathscr{B}) & \to & K_0(\mathscr{C}) \\ & [X] & \mapsto & [i^*(X)], & & & [X] & \mapsto & [j^!(X)]。 \end{array}$$

根据直积的泛性质可得 Abel 群同态

$$\begin{array}{rccc} \bar{\varphi}: & K_0(\mathscr{B}) & \to & K_0(\mathscr{A}) \oplus K_0(\mathscr{C}) \\ & [X] & \mapsto & ([i^*(X)], [j^!(X)])。 \end{array}$$

由正合函子 i_* 和 $j_!$ 可诱导出 Abel 群同态

$$\begin{array}{rccccrccc} \psi_1: & K_0(\mathscr{A}) & \to & K_0(\mathscr{B}) & \qquad & \psi_2: & K_0(\mathscr{C}) & \to & K_0(\mathscr{B}) \\ & [X'] & \mapsto & [i_*(X')], & & & [X''] & \mapsto & [j_!(X'')]。 \end{array}$$

由直和的泛性质可得 Abel 群同态

$$\begin{array}{rccc} \bar{\psi}: & K_0(\mathscr{A}) \oplus K_0(\mathscr{C}) & \to & K_0(\mathscr{B}) \\ & ([X'], [X'']) & \mapsto & [i_*(X')] + [j_!(X'')]。 \end{array}$$

从而,对 $\forall\, ([X'], [X'']) \in K_0(\mathscr{A}) \oplus K_0(\mathscr{C})$,有

$$\begin{aligned}\bar{\varphi}\bar{\psi}(([X'],[X''])) &= \bar{\varphi}([i_*(X')]+[j_!(X'')]) = \bar{\varphi}([i_*(X')])+\bar{\varphi}([j_!(X'')]) \\ &= (([i^*(i_*(X'))],[j^!(i_*(X'))]))+([i^*(j_!(X''))],[j^!(j_!(X''))])。\end{aligned}$$

由 $j_!$ 和 i_* 是满嵌函子,可得自然同构 $j^!j_! \simeq id_{\mathscr{C}}$, $i^*i_* \simeq id_{\mathscr{A}}$。根据命题 5 可得 $j^!i_* = 0 = i^*j_!$,故 $\bar{\varphi}\bar{\psi}(([X'],[X''])) = ([X'],[X''])$,即 $\bar{\varphi}\bar{\psi} = id_{K_0(\mathscr{A})\oplus K_0(\mathscr{C})}$。

进一步地,由于 i^* 为正合函子,因此根据命题 5,对任意 $X\in\mathscr{B}$,存在 $\mathbf{E}_{\mathscr{B}}$-三角

$$j_!j^!(X)\xrightarrow{\delta_X}X\xrightarrow{\zeta_X}i_*i^*(X)\dashrightarrow,$$

其中 δ_X 和 ζ_X 是后连接态射和前连接态射,从而对 $\forall[X]\in K_0(\mathscr{B})$,有

$$\bar{\psi}\bar{\varphi}([X]) = \bar{\psi}([i^*(X)],[j^!(X)]) = [i_*(i^*(X))]+[j_!(j^!(X))] = [X],$$

故 $\bar{\psi}\bar{\varphi} = id_{K_0(\mathscr{B})}$。

综上所述,$K_0(\mathscr{A})\oplus K_0(\mathscr{C})\cong K_0(\mathscr{B})$。对偶结论同理可证。

根据外三角范畴的粘合和左(右)粘合间的充要关系,可得如下结论。

推论 1 设 $\mathscr{A}$、$\mathscr{B}$ 和 $\mathscr{C}$ 是外三角范畴,若存在 $\mathscr{B}$ 相对于 $\mathscr{A}$ 和 $\mathscr{C}$ 的一个粘合

$$\begin{tikzcd} \mathscr{A} \arrow[r, "i_*=i_!"] & \mathscr{B} \arrow[l, bend right, "i^*"'] \arrow[l, bend left, "i^!"] \arrow[r, "j^!=j^*"] & \mathscr{C} \arrow[l, bend right, "j_!"'] \arrow[l, bend left, "j_*"] \end{tikzcd}$$

使得 i^* 和 $j_!$ 为左正合函子(或 $i^!$ 和 j_* 为右正合函子),则 $K_0(\mathscr{A})\oplus K_0(\mathscr{C})\cong K_0(\mathscr{B})$。

证明 由于$(\mathscr{A},\mathscr{B},\mathscr{C},i^*,i_*,i^!,j_!,j^*,j_*)$是 $\mathscr{B}$ 相对于 $\mathscr{A}$ 和 $\mathscr{C}$ 的一个粘合,且 i^* 和 $j_!$ 为左正合函子,因此根据命题 4 可得$(\mathscr{A},\mathscr{B},\mathscr{C},i^*,i_*,j_!,j^!)$是 $\mathscr{B}$ 相对于 $\mathscr{A}$ 和 $\mathscr{C}$ 的一个左粘合,且 i^*,i_*,$j^!$ 和 $j_!$ 为正合函子。再由定理 1,可得 $K_0(\mathscr{A})\oplus K_0(\mathscr{C})\cong K_0(\mathscr{B})$。

三角范畴的粘合是一个外三角范畴的粘合[11],三角函子是外三角范畴的正合函子[11],根据推论 1,得如下结论。

推论 2[19] 设 $\mathscr{A}$、$\mathscr{B}$ 和 $\mathscr{C}$ 是三角范畴,若存在 $\mathscr{B}$ 相对于 $\mathscr{A}$ 和 $\mathscr{C}$ 的一个粘合

$$\begin{tikzcd} \mathscr{A} \arrow[r, "i_*=i_!"] & \mathscr{B} \arrow[l, bend right, "i^*"'] \arrow[l, bend left, "i^!"] \arrow[r, "j^!=j^*"] & \mathscr{C} \arrow[l, bend right, "j_!"'] \arrow[l, bend left, "j_*"] \end{tikzcd},$$

则 $K_0(\mathscr{A})\oplus K_0(\mathscr{C})\cong K_0(\mathscr{B})$。

推论 3 设 $\mathscr{A}$、$\mathscr{B}$ 和 $\mathscr{C}$ 是 Abel 范畴,若存在 $\mathscr{B}$ 相对于 $\mathscr{A}$ 和 $\mathscr{C}$ 的一个粘合

$$\begin{tikzcd} \mathscr{A} \arrow[r, "i_*=i_!"] & \mathscr{B} \arrow[l, bend right, "i^*"'] \arrow[l, bend left, "i^!"] \arrow[r, "j^!=j^*"] & \mathscr{C} \arrow[l, bend right, "j_!"'] \arrow[l, bend left, "j_*"] \end{tikzcd}$$

使得 i^* 和 $j_!$ 为左正合函子(或 $i^!$ 和 j_* 为右正合函子),则 $K_0(\mathscr{A})\oplus K_0(\mathscr{C})\cong K_0(\mathscr{B})$。

证明 由于 Abel 范畴的粘合是一个外三角范畴的粘合且 i^* 和 $j_!$ 为左正合函子[11],因此根据推论 1,可得 $K_0(\mathscr{A})\oplus K_0(\mathscr{C})\cong K_0(\mathscr{B})$。

值得一提的是,并非任意外三角范畴粘合中 3 个范畴的 K_0-群均具有可加性。

例 1[20] 设 k 为代数闭域,考虑路代数 $A=kQ_3$, $B=kQ_2$ 和 $C=kQ_1$,其中箭图 Q_3 为 $1\xrightarrow{\alpha}2\xrightarrow{\beta}3$,箭图 Q_2 为 $1\xrightarrow{\alpha}2$ 和箭图 Q_1 为 1。令 A'、B' 和 C' 分别表示 A、B 和 C 对应的 Auslander 代数。由于存在环同构 $A\cong\begin{pmatrix}B & P\\ 0 & C\end{pmatrix}$,其中 P 是投射 B-模,因此存在 A-mod 相对于 C-mod 和 B-mod 的一个粘合,从而存在 A'-mod 相对于 C'-mod 和 B'-mod 的一个粘合。由于 $K_0(A'\text{-mod})\cong\mathbf{Z}^6$, $K_0(B'\text{-mod})\cong\mathbf{Z}^3$ 且 $K_0(C'\text{-mod})\cong\mathbf{Z}$,因此 $K_0(B'\text{-mod})\oplus K_0(C'\text{-mod})$是 $K_0(A'\text{-mod})$的真直和项。

3　外三角范畴粘合的 K_1-群的可加性

本章将刻画外三角范畴粘合中 3 个范畴的 K_1-群关系。首先给出外三角范畴的 K_1-群定义。

定义 7　设 $\mathscr{C}$ 是外三角范畴,$\mathscr{C}$ 的 K_1-群,记为 $K_1^{\det}(\mathscr{C})$,是指以集合 $\Omega\mathscr{C}=\{\alpha\mid\alpha\in \mathrm{Aut}_{\mathscr{C}}(X),X\in \mathrm{obj}\,\mathscr{C}\}$ 作基生成的自由 Abel 群,按下述运算关系所得的 Abel 商群($[\alpha]$表示对应于 α 在 $K_1^{\det}(\mathscr{C})$中的元素):

(1) $[\alpha]+[\beta]=[\alpha\beta]$,其中 $\alpha,\beta\in\mathrm{Aut}_{\mathscr{C}}(X)$, $X\in\mathscr{C}$;

(2) 对 $\mathscr{C}$ 中任意容许序列的自同构,即

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_1"'] & Y \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"'] & Z \arrow[d, "\alpha_2"'] \\ X \arrow[r] & Y \arrow[r] & Z \end{tikzcd},$$

有$[\alpha]=[\alpha_1]+[\alpha_2]$。

注 5　由于 Abel 范畴(三角范畴)$\mathscr{C}$ 是外三角范畴,因此由上述定义可得 $\mathscr{C}$ 的 K_1-群,这与文献[5,21]中 Abel(三角)范畴的 K_1-群定义一致。

为便于后续定理证明,以下证明 K_1-群定义具有函子性。

引理 1　设 $\mathscr{W}$ 表示以小外三角范畴为对象,正合函子为态射所得的范畴,则

$$K_1^{\det}:\mathscr{W}\to Ab:\mathscr{C}\mapsto K_1^{\det}(\mathscr{C})$$

为函子。

证明　设 $\mathscr{C}$ 和 $\mathscr{D}\in\mathrm{obj}\,\mathscr{W}$, $F:\mathscr{C}\to\mathscr{D}$ 是正合函子。令 $\mathscr{F}_{\mathscr{C}}$ 为以 $\Omega\mathscr{C}$ 为基生成的自由 Abel 群。

首先,定义 Abel 群同态

$$\begin{aligned} \varphi:\quad \mathscr{F}_{\mathscr{C}} &\to K_1^{\det}(\mathscr{D}) \\ \alpha &\mapsto [F(\alpha)], \end{aligned}$$

可验证得,对 $\forall\,\alpha_1,\alpha_2:X\to X\in\Omega\mathscr{C}$,有 $\varphi(\alpha_1)+\varphi(\alpha_2)=\varphi(\alpha_1\alpha_2)$。事实上,$\varphi(\alpha_1)+\varphi(\alpha_2)=[F(\alpha_1)]+[F(\alpha_2)]=[F(\alpha_1)F(\alpha_2)]=[F(\alpha_1\alpha_2)]=\varphi(\alpha_1\alpha_2)$。

对 $\mathscr{C}$ 中任意容许序列的自同构,即

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_1"'] & Y \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"'] & Z \arrow[d, "\alpha_2"'] \\ X \arrow[r] & Y \arrow[r] & Z \end{tikzcd},$$

可验证得 $\varphi(\alpha_1+\alpha_2)=\varphi(\alpha)$。

事实上,将正合函子 F 作用于上述容许序列的自同构,可得到 $\mathscr{D}$ 中容许序列的自同构

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r] \arrow[d, "F(\alpha_1)"'] & F(Y) \arrow[r] \arrow[d, "F(\alpha)"'] & F(Z) \arrow[d, "F(\alpha_2)"'] \\ F(X) \arrow[r] & F(Y) \arrow[r] & F(Z) \end{tikzcd}。$$

因此 $\varphi(\alpha_1+\alpha_2)=[F(\alpha_1)]+[F(\alpha_2)]=[F(\alpha)]=\varphi(\alpha)$。

综上所述,由 φ 可诱导如下 Abel 群同态

$$\begin{aligned} K_1^{\det}(F):\quad K_1^{\det}(\mathscr{C}) &\to K_1^{\det}(\mathscr{D}) \\ [\alpha] &\mapsto [F(\alpha)]。\end{aligned}$$

其次,对正合函子 $F:\mathscr{C}\to\mathscr{D}$ 和 $G:\mathscr{D}\to\mathscr{A}$,易证 $K_1^{\det}(GF)=K_1^{\det}(G)K_1^{\det}(F)$ 且 $K_1^{\det}(id)=id$。

综合上述,可得$K_1^{\det}:\mathscr{W}\to Ab$ 为函子。

基于外三角范畴左(右)粘合的结构特征,可证得 3 个范畴 K_1-群在一定条件下存在如下关系。

定理 2　设 $\mathscr{A}$、$\mathscr{B}$ 和 $\mathscr{C}$ 是外三角范畴,若存在 $\mathscr{B}$ 相对于 $\mathscr{A}$ 和 $\mathscr{C}$ 的一个左粘合

$$\begin{tikzcd} \mathscr{A} \arrow[r, shift left=2, leftarrow, "i^*"] \arrow[r, shift right=2, "i_*"'] & \mathscr{B} \arrow[r, shift left=2, leftarrow, "j_!"] \arrow[r, shift right=2, "j^!"'] & \mathscr{C} \end{tikzcd}$$

使得 i^* 和 $j_!$ 为左正合函子,$j^!$ 和 i_* 为右正合函子,则 $K_1^{\det}(\mathscr{A})\oplus K_1^{\det}(\mathscr{C})\cong K_1^{\det}(\mathscr{B})$。

对偶地,若存在 $\mathscr{B}$ 相对于 $\mathscr{A}$ 和 $\mathscr{C}$ 的一个右粘合

$$\begin{tikzcd} \mathscr{A} \arrow[r, shift left=2, "i_!"] \arrow[r, shift right=2, leftarrow, "i^!"'] & \mathscr{B} \arrow[r, shift left=2, "j^*"] \arrow[r, shift right=2, leftarrow, "j_*"'] & \mathscr{C} \end{tikzcd}$$

使得 j^* 和 $i_!$ 为左正合函子,$i^!$ 和 j_* 为右正合函子,则 $K_1^{\det}(\mathscr{A})\oplus K_1^{\det}(\mathscr{C})\cong K_1^{\det}(\mathscr{B})$。

证明 已知$(\mathscr{A},\mathscr{B},\mathscr{C},i^*,i_*,j_!,j^!)$是 $\mathscr{B}$ 相对于 $\mathscr{A}$ 和 $\mathscr{C}$ 的一个左粘合,且 i^* 和 $j_!$ 为左正合函子,$j^!$ 和 i_* 为右正合函子,故 i^*,$j_!$,$j^!$ 和 i_* 为正合函子,从而,根据引理1,由正合函子 i^* 和 $j^!$ 可得 Abel 群同态

$$\begin{aligned} \varphi_1:\ K_1^{\det}(\mathscr{B}) &\to K_1^{\det}(\mathscr{A}) & \varphi_2:\ K_1^{\det}(\mathscr{B}) &\to K_1^{\det}(\mathscr{C}) \\ [\alpha] &\mapsto [i^*(\alpha)], & [\alpha] &\mapsto [j^!(\alpha)]。 \end{aligned}$$

由直积的泛性质可得 Abel 群同态

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}:\ K_1^{\det}(\mathscr{B}) &\to K_1^{\det}(\mathscr{A})\oplus K_1^{\det}(\mathscr{C}) \\ [\alpha] &\mapsto ([i^*(\alpha)],[j^!(\alpha)])。 \end{aligned}$$

根据引理1,由正合函子 i_* 和 $j_!$ 可得 Abel 群同态

$$\begin{aligned} \psi_1:\ K_1^{\det}(\mathscr{A}) &\to K_1^{\det}(\mathscr{B}) & \psi_2:\ K_1^{\det}(\mathscr{C}) &\to K_1^{\det}(\mathscr{B}) \\ [\alpha'] &\mapsto [i_*(\alpha')], & [\alpha''] &\mapsto [j_!(\alpha'')]。 \end{aligned}$$

由直和的泛性质可得 Abel 群同态

$$\begin{aligned} \bar{\psi}:\ K_1^{\det}(\mathscr{A})\oplus K_1^{\det}(\mathscr{C}) &\to K_1^{\det}(\mathscr{B}) \\ ([\alpha'],[\alpha'']) &\mapsto [i_*(\alpha')]+[j_!(\alpha'')]。 \end{aligned}$$

从而对 $\forall([\alpha'],[\alpha''])\in K_1^{\det}(\mathscr{A})\oplus K_1^{\det}(\mathscr{C})$,有

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}\bar{\psi}(([\alpha'],[\alpha''])) &= \bar{\varphi}([i_*(\alpha')]+[j_!(\alpha'')]) = \bar{\varphi}([i_*(\alpha')])+\bar{\varphi}([j_!(\alpha'')]) \\ &= ([i^*(i_*(\alpha'))],[j^!(i_*(\alpha'))])+([i^*(j_!(\alpha''))],[j^!(j_!(\alpha''))])。 \end{aligned}$$

由 $j_!$ 和 i_* 是满嵌函子,可得自然同构 $j^!j_!\simeq id_{\mathscr{C}}$, $i^*i_*\simeq id_{\mathscr{A}}$。又因 $j^!i_*=0=i^*j_!$,所以 $\bar{\varphi}\bar{\psi}(([\alpha'],[\alpha'']))=([\alpha'],[\alpha''])$,即 $\bar{\varphi}\bar{\psi}=id_{K_1^{\det}(\mathscr{A})\oplus K_1^{\det}(\mathscr{C})}$。

进而,由于 i^* 为正合函子,因此根据命题5,可得对任意 $\alpha\in \mathrm{Aut}_{\mathscr{B}}(X)$,存在 $\mathscr{B}$ 中容许序列自同构

$$\begin{tikzcd} j_!j^!(X) \arrow[r] \arrow[d, "j_!j^!(\alpha)"'] & X \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"'] & i_*i^*(X) \arrow[d, "i_*i^*(\alpha)"'] \\ j_!j^!(X) \arrow[r] & X \arrow[r] & i_*i^*(X) \end{tikzcd},$$

则对 $\forall[\alpha]\in K_1^{\det}(\mathscr{B})$,有 $\bar{\psi}\bar{\varphi}([\alpha])=\bar{\psi}([i^*(\alpha)],[j^!(\alpha)])=[i_*(i^*(\alpha))]+[j_!(j^!(\alpha))]=[\alpha]$,故 $\bar{\psi}\bar{\varphi}=id_{K_1^{\det}(\mathscr{B})}$。

综上所述,$K_1^{\det}(\mathscr{A})\oplus K_1^{\det}(\mathscr{C})\cong K_1^{\det}(\mathscr{B})$。

对偶结论同理可证。

进一步,结合外三角范畴的左(右)粘合和粘合间关系,可得如下推论。

推论4 设 $\mathscr{A}$、$\mathscr{B}$ 和 $\mathscr{C}$ 是外三角范畴,若存在 $\mathscr{B}$ 相对于 $\mathscr{A}$ 和 $\mathscr{C}$ 的一个粘合

$$\begin{tikzcd}[column sep=large] \mathscr{A} \arrow[r, shift left=4, leftarrow, "i^*"] \arrow[r, "i_*=i_!" description] \arrow[r, shift right=4, leftarrow, "i^!"'] & \mathscr{B} \arrow[r, shift left=4, leftarrow, "j_!"] \arrow[r, "j^!=j^*" description] \arrow[r, shift right=4, leftarrow, "j_*"'] & \mathscr{C} \end{tikzcd}$$

使得 i^* 和 $j_!$ 为左正合函子(或 $i^!$ 和 j_* 为右正合函子),则 $K_1^{\det}(\mathscr{A})\oplus K_1^{\det}(\mathscr{C})\cong K_1^{\det}(\mathscr{B})$。

证明 由于$(\mathscr{A},\mathscr{B},\mathscr{C},i^*,i_*,i^!,j_!,j^*,j_*)$是 $\mathscr{B}$ 相对于 $\mathscr{A}$ 和 $\mathscr{C}$ 的一个粘合,且 i^* 和 $j_!$ 为左正合函子,

因此根据命题 4 可得($\mathscr{A}$,$\mathscr{B}$,$\mathscr{C}$,i^*,i_*,$j_!$,$j^!$)是 $\mathscr{B}$ 相对于 $\mathscr{A}$ 和 $\mathscr{C}$ 的一个左粘合，且 i^*,i_*,$j^!$ 和 $j_!$ 为正合函子。再由定理 2，可得 $K_1^{\det}(\mathscr{A})\oplus K_1^{\det}(\mathscr{C})\cong K_1^{\det}(\mathscr{B})$。

由于 Abel 范畴(三角范畴)的粘合是一个外三角范畴的粘合[11]，根据推论 4 得如下结论。

推论 5[19]　设 $\mathscr{A}$、$\mathscr{B}$ 和 $\mathscr{C}$ 是三角范畴，若存在 $\mathscr{B}$ 相对于 $\mathscr{A}$ 和 $\mathscr{C}$ 的一个粘合

$$\begin{tikzcd} \mathscr{A} \arrow[r, "i_*=i_!"] & \mathscr{B} \arrow[l, shift right=4, "i^*"'] \arrow[l, shift left=4, "i^!"] \arrow[r, "j^!=j^*"] & \mathscr{C} \arrow[l, shift right=4, "j_!"'] \arrow[l, shift left=4, "j_*"] \end{tikzcd},$$

则 $K_1^{\det}(\mathscr{A})\oplus K_1^{\det}(\mathscr{C})\cong K_1^{\det}(\mathscr{B})$。

推论 6　设 $\mathscr{A}$、$\mathscr{B}$ 和 $\mathscr{C}$ 是 Abel 范畴，若存在 $\mathscr{B}$ 相对于 $\mathscr{A}$ 和 $\mathscr{C}$ 的一个粘合

$$\begin{tikzcd} \mathscr{A} \arrow[r, "i_*=i_!"] & \mathscr{B} \arrow[l, shift right=4, "i^*"'] \arrow[l, shift left=4, "i^!"] \arrow[r, "j^!=j^*"] & \mathscr{C} \arrow[l, shift right=4, "j_!"'] \arrow[l, shift left=4, "j_*"] \end{tikzcd}$$

使得 i^* 和 $j_!$ 为左正合函子(或 $i^!$ 和 j_* 为右正合函子)，则 $K_1^{\det}(\mathscr{A})\oplus K_1^{\det}(\mathscr{C})\cong K_1^{\det}(\mathscr{B})$。

以下举例说明存在关于非 Abel 非三角范畴的外三角范畴粘合中 3 个范畴的 K_i-群的应用($i=0,1$)。

例 2[11]　设 k 为代数闭域，箭图 Q:1→2，路代数 $A=kQ$，则 mod A 的 AR-箭图为

$$\begin{tikzcd} & P_1 \arrow[dr, "\psi"] & \\ S_2 \arrow[ur, "\varphi"] & & S_1 \end{tikzcd}$$

上三角矩阵代数 $B=\begin{pmatrix} A & A \\ 0 & A \end{pmatrix}=kQ'$，其中 Q' 为

$$\begin{tikzcd} & 2 \arrow[dr, "\beta"] & \\ 1 \arrow[ur, "\alpha"] \arrow[dr, "\delta"'] \arrow[rr, dash, dashed] & & 4 \\ & 3 \arrow[ur, "\gamma"'] & \end{tikzcd}$$

其中 $\beta\alpha=\gamma\delta$。定义函子 $F\triangleq A\otimes_A-$。由于存在范畴同构 mod $B\simeq(F(\text{mod }A),\text{mod }A)$，因此每个 B-模可表示为$(Y,X)_f$，其中 $f:Y\to X$ 为 A-模同态。

令 $\mathscr{X}_1=\text{mod }A$，$\mathscr{X}_2=\text{add}(S_1\oplus P_1)$。根据文献[11]得 $\mathscr{X}_2$ 为外三角范畴，但非 Abel 范畴和非三角范畴。

令 $\mathscr{X}=\text{add}((0,S_2)_0\oplus(0,P_1)_0\oplus(0,S_1)_0\oplus(P_1,P_1)_{id}\oplus(P_1,S_1)_\psi\oplus(S_1,S_1)_{id}\oplus(P_1,0)_0\oplus(S_1,0)_0)$。由文献[11]可得非 Abel 范畴和非三角范畴的外三角范畴的粘合为

$$\begin{tikzcd} \mathscr{X}_1 \arrow[r, "i_*=i_!"] & \mathscr{X} \arrow[l, shift right=4, "i^*"'] \arrow[l, shift left=4, "i^!"] \arrow[r, "j^!=j^*"] & \mathscr{X}_2 \arrow[l, shift right=4, "j_!"'] \arrow[l, shift left=4, "j_*"] \end{tikzcd},$$

其中，函子 $i^*((Y,X)_f)=\text{Coker}(f)$，$i_*(X)=(0,X)_0$，$i^!((Y,X)_f)=X$，$j_!(Y)=(Y,Y)_{id}$，$j^*((Y,X)_f)=Y$ 和 $j_*(Y)=(Y,0)_0$。

显然，$i^!$ 和 j_*是正合函子。根据推论 1、4，得 $K_i(\mathscr{X})\cong K_i(\mathscr{X}_1)\oplus K_i(\mathscr{X}_2)$。

4　应用

范畴的粘合隐含着 3 个范畴的内在关系。结合范畴的粘合与范畴扩张相关的结论，可简化对应范畴低阶 K_i-群的关系刻画($i=0,1$)。作为应用，本章将讨论如何利用原范畴的粘合刻画其幂等完备化范畴的低阶 K_i-群间的关系。众所周知，Abel 范畴、Abel 范畴的有界导出范畴等皆为幂等完备化范畴。此外，非幂等完备化范畴也可经由范畴的幂等完备化构造其幂等完备化范畴。下述首先介绍幂等完备化范畴的相关概念和结论。

定义 8[22]　设 $\mathscr{A}$ 是加法范畴，称 $\mathscr{A}$ 是幂等完备的，若任意的幂等自同态均是可裂的，即对任意幂等元 $e\in\mathscr{A}(A,A)$，存在 $p\in\mathscr{A}(A,B)$ 和 $q\in\mathscr{A}(B,A)$，使得 $e=qp$ 且 $1_B=pq$。

定义 9[22]　设 $\mathscr{A}$ 是加法范畴，范畴 $\mathscr{A}$ 的幂等完备化是指如下

obj $\widetilde{\mathscr{A}}$：对象为 (A,e)，其中 $A\in\mathscr{A}$，$e\in\mathscr{A}(A,A)$ 是幂等元。

mor $\widetilde{\mathscr{A}}$：态射 $\alpha\in\widetilde{\mathscr{A}}((A,e),(B,f))$ 是态射 $\alpha\in\mathscr{A}(A,B)$ 满足 $\alpha e=\alpha=f\alpha$，即有交换图

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "e"] \arrow[d, "\alpha"'] \arrow[dr, "\alpha"] & A \arrow[d, "\alpha"] \\ B \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$
。

命题 6[23]　设 $(\mathscr{C},\mathbf{E},\mathfrak{s})$ 是外三角范畴，则 $(\widetilde{\mathscr{C}},\widetilde{\mathbf{E}},\widetilde{\mathfrak{s}})$ 是外三角范畴，其中双函子 $\widetilde{\mathbf{E}}$ 和加法实现 $\widetilde{\mathfrak{s}}$ 均由 $\mathbf{E}$ 和 $\mathfrak{s}$ 自然诱导。

由文献[23]可得由外三角范畴 $\mathscr{C}$ 和 $\mathscr{D}$ 间的加法函子 $F:\mathscr{C}\to\mathscr{D}$，可构造其幂等完备化范畴间的加法函子 $\tilde{F}:\widetilde{\mathscr{C}}\to\widetilde{\mathscr{D}}$，其中对 $\forall(A,e)\in\widetilde{\mathscr{C}}$，有 $\tilde{F}((A,e))=(F(A),F(e))$，对 $\forall\alpha:(A,e)\to(A',e')\in\widetilde{\mathscr{C}}((A,e),(A',e'))$，有 $\tilde{F}(\alpha)=F(\alpha)$。

命题 7　设 $\mathscr{A}$、$\mathscr{B}$ 和 $\mathscr{C}$ 是外三角范畴，若存在 $\mathscr{B}$ 相对于 $\mathscr{A}$ 和 $\mathscr{C}$ 的一个左粘合

$$\begin{tikzcd} \mathscr{A} \arrow[r, shift right, "i_*"'] & \mathscr{B} \arrow[l, shift right, "i^*"'] \arrow[r, shift right, "j^!"'] & \mathscr{C} \arrow[l, shift right, "j_!"'] \end{tikzcd}$$

使得 i^* 和 $j_!$ 为左正合函子，$j^!$ 和 i_* 为右正合函子，则可得 $\widetilde{\mathscr{B}}$ 相对于 $\widetilde{\mathscr{A}}$ 和 $\widetilde{\mathscr{C}}$ 的一个左粘合

$$\begin{tikzcd} \widetilde{\mathscr{A}} \arrow[r, shift right, "\widetilde{i_*}"'] & \widetilde{\mathscr{B}} \arrow[l, shift right, "\widetilde{i^*}"'] \arrow[r, shift right, "\widetilde{j^!}"'] & \widetilde{\mathscr{C}} \arrow[l, shift right, "\widetilde{j_!}"'] \end{tikzcd}$$

使得 $\widetilde{i^*}$，$\widetilde{j_!}$，$\widetilde{j^!}$ 和 $\widetilde{i_*}$ 为正合函子。

对偶地，若存在 $\mathscr{B}$ 相对于 $\mathscr{A}$ 和 $\mathscr{C}$ 的一个右粘合

$$\begin{tikzcd} \mathscr{A} \arrow[r, shift left, "i_!"] & \mathscr{B} \arrow[l, shift left, "i^!"] \arrow[r, shift left, "j^*"] & \mathscr{C} \arrow[l, shift left, "j_*"] \end{tikzcd}$$

使得 j^* 和 $i_!$ 为左正合函子，$i^!$ 和 j_* 为右正合函子，则存在 $\widetilde{\mathscr{B}}$ 相对于 $\widetilde{\mathscr{A}}$ 和 $\widetilde{\mathscr{C}}$ 的一个右粘合

$$\begin{tikzcd} \widetilde{\mathscr{A}} \arrow[r, shift left, "\widetilde{i_!}"] & \widetilde{\mathscr{B}} \arrow[l, shift left, "\widetilde{i^!}"] \arrow[r, shift left, "\widetilde{j^*}"] & \widetilde{\mathscr{C}} \arrow[l, shift left, "\widetilde{j_*}"] \end{tikzcd}$$

使得 $\widetilde{j^*}$，$\widetilde{i_!}$，$\widetilde{i^!}$ 和 $\widetilde{j_*}$ 为正合函子。

证明　由于 $(\mathscr{A},\mathscr{B},\mathscr{C},i^*,i_*,j_!,j^!)$ 是 $\mathscr{B}$ 相对于 $\mathscr{A}$ 和 $\mathscr{C}$ 的一个左粘合，且 i^* 和 $j_!$ 为左正合函子，$j^!$ 和 i_* 为右正合函子，因此 i^*，$j_!$，$j^!$ 和 i_* 为正合函子。

又由 i^* 为正合函子，根据命题 5，对任意 $X\in\mathscr{B}$，存在 $\mathbf{E}_{\mathscr{B}}$-三角

$$j_!j^!(X)\xrightarrow{\delta_X}X\xrightarrow{\zeta_X}i_*i^*(X)\dashrightarrow,$$

其中 δ_X 和 ζ_X 是后连接态射和前连接态射。根据文献[23]中定理 4.6，得 $\widetilde{\mathscr{B}}$ 相对于 $\widetilde{\mathscr{A}}$ 和 $\widetilde{\mathscr{C}}$ 的一个左粘合，使得 $\widetilde{i^*}$，$\widetilde{j_!}$，$\widetilde{j^!}$ 和 $\widetilde{i_*}$ 为正合函子。对偶结论同理可证。

根据命题 4、7，可得如下结论。

推论 7　设 $\mathscr{A}$、$\mathscr{B}$ 和 $\mathscr{C}$ 是外三角范畴，若存在 $\mathscr{B}$ 相对于 $\mathscr{A}$ 和 $\mathscr{C}$ 的一个粘合

$$\begin{tikzcd} \mathscr{A} \arrow[r, "i_*=i_!" description] & \mathscr{B} \arrow[l, bend right, "i^*"'] \arrow[l, bend left, "i^!"] \arrow[r, "j^!=j^*" description] & \mathscr{C} \arrow[l, bend right, "j_!"'] \arrow[l, bend left, "j_*"] \end{tikzcd}$$
，

使得 i^* 和 $j_!$ 为左正合函子（或 $i^!$ 和 j_* 为右正合函子），则存在 $\widetilde{\mathscr{B}}$ 相对于 $\widetilde{\mathscr{A}}$ 和 $\widetilde{\mathscr{C}}$ 的一个粘合

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{\mathscr{A}} \arrow[r, "\widetilde{i_*}=\widetilde{i_!}"] & \widetilde{\mathscr{B}} \arrow[l, shift right=3ex, "\widetilde{i^*}"'] \arrow[l, shift left=3ex, "\widetilde{i^!}"] \arrow[r, "\widetilde{j^!}=\widetilde{j^*}"] & \widetilde{\mathscr{C}} \arrow[l, shift right=3ex, "\widetilde{j_!}"'] \arrow[l, shift left=3ex, "\widetilde{j_*}"]
\end{tikzcd}$$

使得 $\widetilde{i^*}$ 和 $\widetilde{j_!}$ 为正合函子（或 $\widetilde{i^!}$ 和 $\widetilde{j_*}$ 为正合函子）。

根据命题 7、定理 1、2，由外三角范畴的粘合能刻画 3 个范畴幂等完备化范畴的低阶 K_i-群间关系（$i=0,1$）。

定理 3　设 $\mathscr{A}$、$\mathscr{B}$ 和 $\mathscr{C}$ 是外三角范畴，若存在 $\mathscr{B}$ 相对于 $\mathscr{A}$ 和 $\mathscr{C}$ 的一个左粘合

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{A} \arrow[r, shift right=1.5ex, "i_*"'] & \mathscr{B} \arrow[l, shift right=1.5ex, "i^*"'] \arrow[r, shift right=1.5ex, "j^!"'] & \mathscr{C} \arrow[l, shift right=1.5ex, "j_!"']
\end{tikzcd}$$

或 $\mathscr{B}$ 相对于 $\mathscr{A}$ 和 $\mathscr{C}$ 的一个右粘合

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{A} \arrow[r, shift left=1.5ex, "i_!"] & \mathscr{B} \arrow[l, shift left=1.5ex, "i^!"] \arrow[r, shift left=1.5ex, "j^*"] & \mathscr{C} \arrow[l, shift left=1.5ex, "j_*"]
\end{tikzcd}$$

使得 i^* 和 $j_!$（或 j^* 和 $i_!$）为左正合函子，$j^!$ 和 i_*（或 $i^!$ 和 j_*）为右正合函子，则

$$K_0(\widetilde{\mathscr{A}})\oplus K_0(\widetilde{\mathscr{C}})\cong K_0(\widetilde{\mathscr{B}})\text{，且 }K_1^{\det}(\widetilde{\mathscr{A}})\oplus K_1^{\det}(\widetilde{\mathscr{C}})\cong K_1^{\det}(\widetilde{\mathscr{B}})\text{，}$$

其中 $\widetilde{\mathscr{A}}$，$\widetilde{\mathscr{B}}$ 和 $\widetilde{\mathscr{C}}$ 分别是 $\mathscr{A}$，$\mathscr{B}$ 和 $\mathscr{C}$ 的幂等完备化范畴。

由范畴的左（右）粘合和粘合间的充要关系，依推论 7 和定理 3 可得如下应用。

推论 8　设 $\mathscr{A}$，$\mathscr{B}$ 和 $\mathscr{C}$ 是外三角范畴，若存在 $\mathscr{B}$ 相对于 $\mathscr{A}$ 和 $\mathscr{C}$ 的一个粘合

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{A} \arrow[r, "i_*=i_!"] & \mathscr{B} \arrow[l, shift right=3ex, "i^*"'] \arrow[l, shift left=3ex, "i^!"] \arrow[r, "j^!=j^*"] & \mathscr{C} \arrow[l, shift right=3ex, "j_!"'] \arrow[l, shift left=3ex, "j_*"]
\end{tikzcd}$$

使得 i^* 和 $j_!$ 为左正合函子（或 $i^!$ 和 j_* 为右正合函子），则

$$K_0(\widetilde{\mathscr{A}})\oplus K_0(\widetilde{\mathscr{C}})\cong K_0(\widetilde{\mathscr{B}})\text{，且 }K_1^{\det}(\widetilde{\mathscr{A}})\oplus K_1^{\det}(\widetilde{\mathscr{C}})\cong K_1^{\det}(\widetilde{\mathscr{B}})\text{，}$$

其中 $\widetilde{\mathscr{A}}$，$\widetilde{\mathscr{B}}$ 和 $\widetilde{\mathscr{C}}$ 分别是 $\mathscr{A}$，$\mathscr{B}$ 和 $\mathscr{C}$ 的幂等完备化范畴。

参考文献：

[1] BÜHLER T. Exact categories[J]. Expositiones Mathematicae, 2010, 28:1-69.

[2] NAKAOKA H, PALU Y. Extriangulated categories, hovey twin cotorsion pairs and model structures[J]. Cahiers de Topologie et Géometrie Différentielle Catégoriques, 2019, 60(2):117-193.

[3] THOMASON R W. The classification of triangulated subcategories[J]. Compositio Mathematica, 1997, 105(1):1-27.

[4] MARCOS E N, MERKLEN H, PLATZECK M I. The Grothendieck group of the category of modules of finite projective dimension over certain weakly triangular algebras[J]. Communications in Algebra, 2000, 28(3):1387-1404.

[5] VAKNIN A. Determinants in triangulated categories[J]. *K*-Theory, 2001, 24:57-68.

[6] XIAO Jie, ZHU Bin. Relations for the grothendieck groups of triangulated categories[J]. Journal of Algebra, 2002, 257(1):37-50.

[7] GUO Xuejun, LI Linbin. K_1-group of finite dimensional path algebra[J]. Acta Mathematica Sinica, 2001, 17(2):273-276.

[8] MATSUI H. Classifying dense subcategories of exact categories via grothendieck groups[J]. Algebras and Representation Theory, 2016, 21(7):1-13.

[9] JOHANNE H. The grothendieck group of an *n*-exangulated category[J]. Applied Categorical Structures, 2021, 29(3):431-446.

[10] ZHU Bin, ZHUANG Xiao. Grothendieck groups in extriangulated categories[J]. Journal of Algebra, 2021, 574:206-232.

[11] WANG Li, WEI Jiaqun, ZHANG Haicheng. Recollements of extriangulated categories[J]. Colloquium Mathematicum,

2022, 167(2):239-259.
[12] CHEN Jianmin. Cotorsion pairs in a recollement of triangulated categories[J]. Communications in Algebra, 2013, 41:2903-2915.
[13] MA Xin, HUANG Zhaoyong. Torsion pairs in recollements of abelian categories[J]. Frontiers of Mathematics in China, 2018, 13(4):875-892.
[14] MA Xin, ZHAO Tiwei. Recollements and tilting modules[J]. Communications in Algebra, 2020, 48(12):5163-5175.
[15] CHEN Qinghua, TANG Lidan. Idempotent completions and *t*-structures of triangulated categories[J]. Journal of Algebra, 2008, 319:3053-3061.
[16] PSAROUDAKIS C. Homological theory of recollements of abelian categories[J]. Journal of Algebra, 2014, 398:63-110.
[17] FRANJOU V, PIRASHVILI T. Comparison of abelian categories recollements[J]. Documenta Mathematica, 2004, 9:41-56.
[18] BEILINSON A, BERNSTEIN J, DELIGNE P. Faisceaux pervers[J]. Astérisque, 1982, 100:5-172.
[19] 唐丽丹. 关于三角范畴及 Abelian 范畴 Recollement 若干问题的研究[D]. 福建:福建师范大学,2007.
TANG Lidan. Some researches on recollements of triangulated an abelian categories[D]. Fujian: Fujian Normal University, 2007.
[20] CHEN Qinghua, ZHENG Min. *K*-groups of trivial extensions and gluings of abelian categories[J]. Mathematics, 2021, 9(16):1864-1874.
[21] 佟文廷. 代数 K-理论[M]. 南京:南京大学出版社,2005:140-147.
TONG W T. Algebraic K-Theory[M]. Nanjing: Nanjing University Press, 2005:140-147.
[22] BALMER P, SCHLICHTING M. Idempotent completion of triangulated categories[J]. Journal of Algebra, 2001, 236:819-834.
[23] WANG Li, WEI Jiaqun, ZHANG Haicheng, et al. Idempotent completion of extriangulated categories[J]. Journal of Algebra and Its Applications, 2023, 22(4):2350095.

(编辑:陈丽萍)

(上接第 24 页)

[6] 王志华,李立斌. 一类 Hopf 代数的不可约表示[J]. 扬州大学学报(自然科学版),2013,16(2):1-3.
WANG Zhihua, LI Libin. On the irreducible representations of a class of Hopf algebras[J]. Journal of Yangzhou University (Natural Science Edition), 2013, 16(2):1-3.
[7] OSTRIK V. Module categories, weak Hopf algebras and modular invariants[J]. Transformation Groups, 2003, 8(2):177-206.
[8] BEHREND R, PEARCE P, PETKOV V, et al. Boundary conditions in rational conformal field theories[J]. Nuclear Physics, 1999, 579(B):707-773.
[9] BOOKER T, DAVYDOV A. Commutative algebras in Fibonacci categories[J]. Journal of Algebra, 2012, 355(1):176-204.
[10] FUCHS J, SCHWEIGERT C. Category theory for conformal boundary conditions[J]. Fields Institute Communications, 2003, 39(25):25-71.
[11] GANNON T. Boundary conformal field theory and fusion ring representations[J]. Nuclear Physics, 2002, 627(B):506-564.
[12] CHEN Zhichao, CAI Jiayi, MENG Lingchao, et al. Non-negative integer matrix representations of a $\mathbf{Z}_+$-ring[J]. Journal of Mathematical Study, 2021, 51(4):357-370.
[13] 苑呈涛. 近群融合环上的不可约 $\mathbf{Z}_+$-模的分类[D]. 扬州:扬州大学,2018.
YUAN Chengtao. The classification of the irreducible $\mathbf{Z}_+$-modules over near-group fusion rings[D]. Yangzhou: Yangzhou University, 2018.
[14] 周芯雨. 近群融合环上 $K(Q_8,n)$ 的 $\mathbf{Z}_+$-模的分类[D]. 扬州:扬州大学,2022.
ZHOU Xinyu. The classification of the irreducible $\mathbf{Z}_+$-modules over near-group fusion ring $K(Q_8,n)$[D]. Yangzhou: Yangzhou University, 2022.
[15] 陈勇. 一类环上的不可约 $\mathbf{Z}_+$-模[D]. 扬州:扬州大学,2024.
CHEN Yong. Irreducible $\mathbf{Z}_+$-modules over a class of domain[D]. Yangzhou: Yangzhou University, 2024.

(编辑:陈丽萍)