文章编号:1671-9352(2026)04-0117-06 DOI:10.6040/j.issn.1671-9352.0.2024.112

次线性薛定谔-泊松系统的弱解和集中性

成荣,王进水
(南京信息工程大学数学与统计学院, 江苏 南京 210044)

摘要:利用变分方法研究一类形式更一般的次线性薛定谔-泊松系统。在较弱的条件下,得到此类薛定谔-泊松系统非平凡弱解的存在性以及弱解序列的集中性,推广已有的结论。

关键词:变分方法;弱解;临界点;薛定谔-泊松系统;集中性
中图分类号:O175.14 **文献标志码**:A
引用格式:成荣,王进水. 次线性薛定谔-泊松系统的弱解和集中性[J]. 山东大学学报(理学版),2026,61(4):117-122.

Weak solutions and concentration of sublinear Schrödinger-Poisson system

CHENG Rong, WANG Jinshui
(School of Mathematics and Statistics, Nanjing University of Information Science and Technology, Nanjing 210044, Jiangsu, China)

Abstract: A class of sublinear Schrödinger-Poisson system with more general form is studied by using variational method. The existence of non-trivial weak solutions and the concentration of the weak solution sequence for such Schrödinger-Poisson systems are obtained under weaker conditions. The results generalize established conclusions.

Key words: variational methods; weak solution; critical point; Schrödinger-Poisson system; concentration

1 引言和主要结果

很多非线性物理现象在数学上都可以用下列方程表示:

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}=-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi+W(x)\psi-|\psi|^{p-2}\psi,\quad (t,x)\in\mathbf{R}\times\mathbf{R}^N,\tag{1}$$

方程(1)称为薛定谔方程,其中 $\hbar$ 为普朗克常数。方程(1)为描述微观粒子运动的非相对论性量子力学方程,是一个重要的非线性数学物理模型,可以应用于流体力学、非线性光学、非线性声学、量子凝聚、固体中的热脉冲等非线性不稳定现象。例如研究玻色爱因斯坦凝聚态时,方程(1)称为 Gross-Pitaevskii 方程,非线性项模拟了粒子间的作用。方程(1)也可以描述非线性波,例如具有折射率的介质中传播的光波以及水波等。方程(1)的一种常见的解称为驻波,即

$$\psi(t,x)=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Et/\hbar}\varphi(x),$$

代入方程(1),则方程(1)转化为

$$-\varepsilon^2\Delta\varphi+W(x)\varphi=E\varphi+|\varphi|^{p-2}\varphi,\tag{2}$$

其中, $\varepsilon^2=\dfrac{\hbar^2}{2m}$, E 为驻波的能量。令 $u(x)=\varepsilon^{-\frac{2}{p-2}}\varphi(x)$,则方程(2)可改写成

$$-\Delta u+V(x)u=|u|^{p-2}u,\tag{3}$$

其中 $V(x)=(W(x)-E)\varepsilon^{-2}$ 称为位势函数。方程(3)可以表示为更一般的形式

收稿日期:2024-04-07; **网络出版时间**:2025-04-02
基金项目:国家自然科学基金资助项目(12371171,12226412);江苏省自然科学基金项目(BK20221339);安徽省高等教育质量工程项目(2023ylyjh069);南京信息工程大学教改项目(2023XYBJG06)
第一作者:成荣(1977—),男,教授,博士,研究方向为非线性泛函分析. E-mail:mathchr@163.com

$$-\Delta u+V(x)u=f(x,u), \tag{4}$$

其中 $f(x,u)$ 称为非线性项。

薛定谔-泊松方程是一种特殊的非线性薛定谔方程,它结合了薛定谔方程和泊松方程的特性,用于描述具有特定势能和电荷分布的物理系统。这种方程重要特点之一是包含了非局部项。本文研究下列形式的薛定谔-泊松系统:

$$\begin{cases}-\Delta u+(V_0(x)+\lambda V(x))u+\varphi u=f(x,u), & x\in\mathbf{R}^3\\ -\Delta\phi=u^2, & x\in\mathbf{R}^3。\end{cases} \tag{5}$$

由于系统(5)的物理背景一直被许多专家学者关注和研究,尤其是针对具有超线性增长、临界增长的情形[1-5]。注意到非线性光学中也存在一些次线性的光学现象,研究系统(5)的非线性项是次线性的情形也是具有较重要的数学物理意义。近年来有很多学者对此问题进行了研究。Sun[6]考虑了 $F(x,u)=b(x)|u|^{p+1}$,其中 $F(x,u)$ 是 $f(x,u)$ 的首次积分且 $p\in(0,1)$。Zou[7]利用建立的临界点存在性结论得到系统(5)当 $V_0(x)=0$, $\lambda=1$ 时无穷多个解的存在性。文献[8-10]放宽 $F(x,u)$ 在无穷远处的增长条件, 去掉文献[6]中对 V 的设定条件(这个条件可能会导致 V 满足强制性性质),得到系统(5)当 $V_0(x)=0$, $\lambda=1$ 时无穷多个解的存在性。而文献[11-13]放宽 $F(x,u)$ 的增长性条件建立了系统(5)当 $V_0(x)=0$, $\lambda=1$ 时解的存在性结论,其中要求对 $|u|<\delta$ 时,$F(x,u)$ 满足超线性增长条件。

受到以上工作的启发,本文利用变分方法研究系统(5)为次线性情形时解的存在性和集中性问题。首先给出下列研究条件:

(V_1) $V_0(x)\in L^\infty(\mathbf{R}^3)$,$\alpha_0=\operatorname{essinf} V_0>0$, $V(x)\in C(\mathbf{R}^3,\mathbf{R})$, $\beta_0=\inf V>0$。

(V_2) 存在 $r>0$ 及 $M>0$,

$$\lim_{|y|\to\infty}(\operatorname{meas}(\{x\in\mathbf{R}^3,\ V(x)\leqslant M\})\cap B_r(y))=0$$

成立,其中,meas(·)表示 $\mathbf{R}^3$ 中的勒贝格测度,$B_r(y)$ 是以 y 为中心、r 为半径的球。

(V_3) $\Omega=\operatorname{int}(V^{-1}(0))\neq\varnothing$ 且具有光滑的边界,$\bar{\Omega}=V^{-1}(0)$。

(S_1) $f(x,u)\in C(\mathbf{R}^3\times\mathbf{R},\ \mathbf{R})$, 存在常数 $\tau_i\in(1,2)$ 及函数 $a_i(x)\in L^{\frac{2}{2-\tau_i}}(\mathbf{R}^3)$ $(i=1,2,\cdots,m)$ 使得

$$|f(x,u)|\leqslant\sum_{i=1}^{m}a_i(x)|u|^{\tau_i-1},\quad \forall\,(x,u)\in\mathbf{R}^3\times\mathbf{R}。$$

(S_2) 存在常数 $\gamma\in(1,2)$ 及无穷小数列 $\{t_k\}$,使得

$$F(x,t_ku)\geqslant b(x)|t_ku|^\gamma,$$

其中,$F(x,u)=\int_0^u f(x,t)\,\mathrm{d}t$, $x\in\Omega$,函数 $b(x)\in L^\infty(\Omega)$, $b_0=\inf b(x)>0$。

本文的主要结论如下, 这些结论建立了系统(5)的弱解的存在性和弱解序列的集中性。

定理 1 假设条件(V_1)、(S_1)和(S_2)成立,则对任意的 $\lambda>0$,系统(5)至少具有一个非平凡解 u_λ。

定理 2 假设条件(V_1)、(V_2)、(V_3)、(S_1)和(S_2)成立,设 $u_\lambda\in H^1(\mathbf{R}^3)$ 为定理 1 中得到的系统(5)的弱解,则当 $\lambda\to+\infty$ 时,$u_\lambda\to u_0$, 其中 $u_0\in H^1(\Omega)$ 是下列薛定谔-泊松系统的解:

$$\begin{cases}-\Delta u+V_0(x)u+\varphi u=f(x,u), & x\in\Omega,\\ -\Delta\phi=u^2, & x\in\Omega\end{cases} \tag{6}$$

注 1 Mao 等[8]研究了当 $V_0=1$ 时系统(5)的解存在性和集中性问题,其中假设存在 $M>0$,使得

$$\operatorname{meas}(\{x\in\mathbf{R}^3,\ V(x)\leqslant M\})<\infty, \tag{7}$$

易验证条件(7)可以推导出本文中的条件(V_2)。对函数 $F(x,u)$,Mao 等[8]假设存在常数 $\delta,\eta>0$ 以及 $\gamma_0\in(1,2)$,使得

$$F(x,u)\geqslant\eta|u|^{\gamma_0},\quad x\in\Omega,\quad |u|\leqslant\delta。 \tag{8}$$

易见本文的条件(S_2)是条件(8)的一个特殊情况。条件(8)中的 η 可以是一个有正下界的函数 $b(x)$。文献[9-13]没有考虑系统(5)解的集中性。本文研究的模型更为一般,减弱了一些研究条件并且考虑了解的集中性。因此,本文所得到的结果是对相关文献中相应结果的补充和推广。

2　变分结构和一些引理

设 $E=\{u\in H^1(\mathbf{R}^3):\int_{\mathbf{R}^3}(|\nabla u|^2+V(x)u^2)\mathrm{d}x<+\infty\}$,则 E 为一个 Hilbert 空间,内积为 $\langle u,v\rangle=\int_{\mathbf{R}^3}(\nabla u\nabla v+V(x)uv)\mathrm{d}x$,对应的范数为 $\|u\|=\sqrt{\langle u,u\rangle}$,等价于 $H^1(\mathbf{R}^3)$ 中的标准范数(由条件(V_1))。

记 $D^{1,2}(\mathbf{R}^3)=\{u\in L^6(\mathbf{R}^3):|\nabla u|^2\in L^2(\mathbf{R}^3)\}$,内积为 $\langle u,v\rangle_D=\int_{\mathbf{R}^3}\nabla u\nabla v\mathrm{d}x$,对应的范数为 $\|u\|_D=\sqrt{\langle u,u\rangle_D}$。

对 $\lambda>0$ 及任意的 $u,v\in E$,记 $\langle u,v\rangle_\lambda=\int_{\mathbf{R}^3}(\nabla u\nabla v+(V_0(x)+\lambda V(x))uv)\mathrm{d}x$,对应的范数为 $\|u\|_\lambda=\sqrt{\langle u,v\rangle_\lambda}$。记 $E_\lambda=(E,\|u\|_\lambda)$,由条件($V_1$)、($V_2$)得,存在 $c>0$,使得 $\|u\|\leqslant c\|u\|_\lambda$。

$L^p(\mathbf{R}^3)$ 中的范数当 $1\leqslant p<+\infty$ 时,记 $\|u\|_p=\left(\int_{\mathbf{R}^3}|u|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}$;当 $p=+\infty$ 时,范数记 $\|u\|_\infty=\mathrm{ess\ sup}_{x\in\mathbf{R}^3}|u(x)|$。

$c_i(i=0,1,\cdots)$表示各种正的常数,对 $p\in[2,6]$, $E_\lambda\to L^p(\mathbf{R}^3)$ 是连续的,对 $p\in[2,6)$, $E_\lambda\to L^p_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^3)$ 是紧的,存在常数 c_0, $c_1>0$,使得

$$\|u\|_p\leqslant c_0\|u\|\leqslant c_1\|u\|_\lambda。\tag{9}$$

对任意的 $u\in H^1(\mathbf{R}^3)$,由 Lax-Milgram 定理可得,存在唯一的 $\phi_u\in D^{1,2}(\mathbf{R}^3)$ 使得 $-\Delta\phi_u=u^2$。关于 ϕ_u 有下列一些性质,参见文献[14-15]。

引理 1　设 $\phi_u\in D^{1,2}(\mathbf{R}^3)$ 为方程 $-\Delta\phi_u=u^2$ 的唯一解,则下列结论成立:

(ⅰ) $\phi_u(x)\geqslant0$, $x\in\mathbf{R}^3$。

(ⅱ) 对任意的 $u\in H^1(\mathbf{R}^3)$, $\|\phi_u\|_{D^{1,2}(\mathbf{R}^3)}\leqslant c\|u\|^2_{\frac{12}{5}}$,其中 $c>0$ 为常数。

(ⅲ) 对 $u_n,u\in L^{\frac{12}{5}}(\mathbf{R}^3)$,如果 $u_n\to u$,则在 $D^{1,2}(\mathbf{R}^3)$ 中成立 $\phi_{u_n}\to\phi_u$。

(ⅳ) 若在 $H^1(\mathbf{R}^3)$ 有 $u_n\to u$,则在 $D^{1,2}(\mathbf{R}^3)$ 中成立 $\phi_{u_n}\to\phi_u$。

定义系统(5)对应的能量泛函为

$$I_\lambda(u)=\frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}^3}(|\nabla u|^2+(V_0(x)+\lambda V(x))u^2)\mathrm{d}x+\frac{1}{4}\int_{\mathbf{R}^3}\phi_u u^2\mathrm{d}x-\int_{\mathbf{R}^3}F(x,u)\mathrm{d}x。\tag{10}$$

首先验证 I_λ 具备的一些基本性质。

引理 2　假设条件(V_1)、(S_1)成立,则 $I_\lambda\in C^1(E_\lambda,\mathbf{R})$,且对任意的 $v\in H^1(\mathbf{R}^3)$,下式成立:

$$I'_\lambda(u)v=\int_{\mathbf{R}^3}(\nabla u\nabla v+(V_0(x)+\lambda V(x))uv)\mathrm{d}x+\int_{\mathbf{R}^3}\varphi_u uv\mathrm{d}x-\int_{\mathbf{R}^3}f(x,u)v\mathrm{d}x。\tag{11}$$

证明　由条件及引理 1,利用标准的方法可以验证 $I_\lambda\in C^1(E_\lambda,\mathbf{R})$,参见文献[6,10]。

注 2　由引理 2 可知,系统(5)的弱解对应于泛函 $I_\lambda(u)$ 在 E_λ 上的临界点。下面说明 $I_\lambda(u)$ 在 E_λ 上存在非平凡的临界点。

由 $I_\lambda(u)$ 的定义及定理 1 的条件,易得引理 3-4。

引理 3　在定理 1 的条件下,$I_\lambda(u)$ 是强制的且下有界,即当 $\|u\|_\lambda\to\infty$ 时,$I_\lambda(u)\to\infty$。

由引理 3,利用 Ekeland's 变分原理,存在 $I_\lambda(u)$ 的一个极小化序列 $\{u_n\}$ 使得当 $n\to\infty$ 时,$I_\lambda(u_n)\to\inf_{u\in E_\lambda}I_\lambda(u)$ 且 $I'_\lambda(u_n)\to0$。

引理 4　极小化序列 $\{u_n\}$ 有界。

下面验证极小化序列 $\{u_n\}$ 存在强收敛的子列,给出引理 5。

引理 5　极小化序列 $\{u_n\}$ 存在强收敛的子列。

证明　由引理 4 知 $\{u_n\}$ 有界,不妨假设 $\|u_n\|_\lambda\leqslant D_0$,并且存在一个子列(仍记为 $\{u_n\}$)使得 u_n 在 E_λ 中弱收敛于 u_λ,在 $L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^3)$ 中强收敛于 u_λ,在 $\mathbf{R}^3$ 中,$u_n(x)$ 几乎处处收敛于 $u_\lambda(x)$。注意到

$$\|u_n-u_\lambda\|^2_\lambda=(I'_\lambda(u_n)-I'_\lambda(u_\lambda))(u_n-u_\lambda)-\int_{\mathbf{R}^3}(\phi_{u_n}u_n-\phi_{u_\lambda}u_\lambda)(u_n-u_\lambda)\mathrm{d}x$$

$$+\int_{\mathbf{R}^3}(f(x,u_n)-f(x,u_\lambda))(u_n-u_\lambda)\mathrm{d}x, \tag{12}$$

由文献[6]可得

$$\int_{\mathbf{R}^3}(\phi_{u_n}u_n-\phi_{u_\lambda}u_\lambda)(u_n-u_\lambda)\mathrm{d}x\geqslant 0。 \tag{13}$$

由于 $a_i(x)\in L^{\frac{2}{2-\tau_i}}(\mathbf{R}^3)(i=1,2,\cdots m)$，对任意的 $\varepsilon>0$，存在 $R_\varepsilon>0$，使得

$$\left(\int_{\mathbf{R}^3\backslash B_{R_\varepsilon}(0)}|a_i(x)|^{\frac{2}{2-\tau_i}}\mathrm{d}x\right)^{\frac{2-\tau_i}{2}}<\varepsilon。 \tag{14}$$

因此由条件(S_1)，得到

$$\left|\int_{\mathbf{R}^3\backslash B_{R_\varepsilon}(0)}(f(x,u_n)-f(x,u_\lambda))(u_n-u_\lambda)\mathrm{d}x\right|\leqslant\sum_{i=1}^m\int_{\mathbf{R}^3\backslash B_{R_\varepsilon}(0)}a_i(x)(|u_n|^{\tau_i-1}+|u_\lambda|^{\tau_i-1})|u_n-u_\lambda|\mathrm{d}x$$
$$\leqslant c_4\sum_{i=1}^m\int_{\mathbf{R}^3\backslash B_{R_\varepsilon}(0)}a_i(x)(|u_n|^{\tau_i}+|u_\lambda|^{\tau_i})\mathrm{d}x\leqslant c_4\sum_{i=1}^m\left(\int_{\mathbf{R}^3\backslash B_{R_\varepsilon}(0)}|a_i(x)|^{\frac{2}{2-\tau_i}}\mathrm{d}x\right)^{\frac{\tau_i-2}{2}}(\|u_n\|_2^{\tau_i}+\|u_\lambda\|_2^{\tau_i})$$
$$\leqslant c_5\varepsilon\sum_{i=1}^m(\|u_n\|_\lambda^{\tau_i}+\|u_\lambda\|_\lambda^{\tau_i})\leqslant c_5\varepsilon\sum_{i=1}^m(D_0^{\tau_i}+\|u_\lambda\|_\lambda^{\tau_i})。 \tag{15}$$

在 $L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^3)$ 上，u_n 强收敛于 u_λ，所以

$$\left|\int_{B_{R_\varepsilon}(0)}(f(x,u_n)-f(x,u_\lambda))(u_n-u_\lambda)\mathrm{d}x\right|$$
$$\leqslant\left(\int_{B_{R_\varepsilon}(0)}|f(x,u_n)-f(x,u_\lambda)|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{B_{R_\varepsilon}(0)}|u_n-u_\lambda|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\to 0,\quad n\to\infty。 \tag{16}$$

结合式(12)、(13)、(15)、(16)，当 $n\to\infty$ 时，$\|u_n-u_\lambda\|_\lambda\to 0$，也就是$\{u_n\}$在 E_λ 中强收敛于 u_λ。

3 主要定理的证明

定理1的证明。由 $I_\lambda(u)$的连续性及引理5，当 $n\to\infty$ 时，$I_\lambda(u_n)\to I_\lambda(u_\lambda)=\inf_{E_\lambda}I_\lambda(u_\lambda)$ 且 $I'_\lambda(u_\lambda)=0$，所以 $u_\lambda\in E_\lambda$ 为系统(5)的一个解。下面说明 $u_\lambda\neq 0$。

取 $u\neq 0$，由条件(S_2)得

$$\begin{aligned}I_\lambda(t_ku)&=\frac{t_k^2}{2}\|u\|_\lambda^2+\frac{t_k^4}{4}\int_{\mathbf{R}^3}\phi_u u^2\mathrm{d}x-\int_{\mathbf{R}^3}F(x,t_ku)\mathrm{d}x\\&\leqslant\frac{t_k^2}{2}\|u\|_\lambda^2+\frac{t_k^4}{4}\int_{\mathbf{R}^3}\varphi_u u^2\mathrm{d}x-t_k^\gamma\int_\Omega b(x)|u|^\gamma\mathrm{d}x\\&\leqslant\frac{t_k^2}{2}\|u\|_\lambda^2+\frac{t_k^4}{4}\int_{\mathbf{R}^3}\varphi_u u^2\mathrm{d}x-t_k^\gamma b_0\int_\Omega|u|^\gamma\mathrm{d}x。\end{aligned} \tag{17}$$

注意到 $1<\gamma<2$，当 t_k 足够小时一定有 $I_\lambda(t_ku)<0$，得到 $\inf_{E_\lambda}I_\lambda(u)<0$，所以 $u_\lambda\neq 0$，定理1得证。

由定理1知，对任意的 $\lambda_n>0$，系统(5)存在一个非平凡解 $u_{\lambda_n}\neq 0$，得到系统(5)的一个非平凡解序列$\{u_{\lambda_n}\}$。为证明定理2，先给出几个引理。

引理6 $I_{\lambda_n}(u_{\lambda_n})<c^*<0$，其中 c^* 不依赖于 λ_n。

证明 令 $c^*=\inf_{H_0^1(\Omega)}I_\lambda$，则由定理1的证明可知，$c^*$ 可达到并且小于0。又由 $H_0^1(\Omega)\subset E_\lambda$，因此 $\inf_{E_\lambda}I_\lambda\leqslant\inf_{H_0^1(\Omega)}I_\lambda=c^*<0$。

引理7 假设条件(V_1)—(V_3)成立，则$\{u_n\}$在 $L^2(\mathbf{R}^3)$中强收敛。

证明 由引理4，$\{u_{\lambda_n}\}$有界，存在一个子列（不妨仍记为$\{u_{\lambda_n}\}$）使得 u_{λ_n} 在 E_λ 中弱收敛于 u_0，u_{λ_n} 在 $L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^3)$中强收敛于 u_0。

当 $x\in\mathbf{R}^3\backslash\Omega$ 时，$u_0=0$。由 $\lambda_n\to\infty$，可假设 $\lambda_n>1$，注意到$\{u_{\lambda_n}\}$有界，则由 Fatou 引理得到当 $n\to\infty$ 时，

$$\int_{\mathbf{R}^3\setminus\Omega} V(x)u_0^2\mathrm{d}x \leqslant \int_{\mathbf{R}^3} V(x)u_0^2\mathrm{d}x = \int_{\mathbf{R}^3\setminus\Omega} \liminf_{n\to\infty} V(x)u_{\lambda_n}^2\mathrm{d}x$$
$$\leqslant \liminf_{n\to\infty}\frac{\int_{\mathbf{R}^3}\lambda_n V(x)u_{\lambda_n}^2\mathrm{d}x}{\lambda_n} \leqslant \frac{\|u_{\lambda_n}\|_{\lambda_n}^2}{\lambda_n}\to 0。\tag{18}$$

注意到 $V(x)>\beta_0>0$,不等式(18)表明 $u_0=0,\ x\in\mathbf{R}^3\setminus\Omega$。

如果引理 7 的结论不成立,则由文献[16]可知,存在 $\delta>0,\ \rho>0$ 及一个序列 $\{y_n\}\subset\mathbf{R}^3$,使得

$$\int_{B_\rho(y_n)}|u_{\lambda_n}-u_0|^2\mathrm{d}x\geqslant\delta,\quad \forall n\in\mathbf{N},\tag{19}$$

而且当 $n\to\infty$ 时有 $y_n\to\infty$ 。记 $B_n=\{x\in B_\rho(y_n):V(x)\leqslant 1\}$,由文献[17]中的命题 2.4 可知

$$\int_{B_n}|u_{\lambda_n}-u_0|^2\mathrm{d}x\geqslant c_6\delta,\tag{20}$$

其中 $0<c_6<1$。由引理 7 条件、式(20)及 $u_0=0,\ x\in\mathbf{R}^3\setminus\Omega$,得到当 $n\to\infty$ 时,

$$\begin{aligned}\|u_{\lambda_n}\|_{\lambda_n}^2 &\geqslant \lambda_n\int_{B_\rho(y_n)\setminus B_n}u_{\lambda_n}^2\mathrm{d}x=\lambda_n\int_{B_\rho(y_n)\setminus B_n}|u_{\lambda_n}-u_0|^2\mathrm{d}x\\ &=\lambda_n\left(\int_{B_\rho(y_n)}|u_{\lambda_n}-u_0|^2\mathrm{d}x-\int_{B_n}|u_{\lambda_n}-u_0|^2\mathrm{d}x\right)\\ &\geqslant\lambda_n\left(\delta-\int_{B_n}|u_{\lambda_n}-u_0|^2\mathrm{d}x\right)\geqslant c_7\delta\lambda_n\to\infty,\end{aligned}\tag{21}$$

这与$\{u_{\lambda_n}\}$的有界性矛盾。因此,$\{u_{\lambda_n}\}$在 $L^2(\mathbf{R}^3)$中强收敛于 u_0。

定理 2 的证明。首先验证 u_0 为系统(5)的一个弱解。在 E_λ 上,$u_{\lambda_n}\to u_0$,对任意的 $\varphi\in C_0^\infty(\mathbf{R}^3)$,有 $I_{\lambda_n}(u_{\lambda_n})\varphi=0$,即

$$\int_{\mathbf{R}^3}(\nabla u_{\lambda_n}\nabla\varphi+(V_0(x)+\lambda_n V(x))u_{\lambda_n}\varphi)\mathrm{d}x+\int_{\mathbf{R}^3}\phi_{u_{\lambda_n}}u_{\lambda_n}\varphi\mathrm{d}x=\int_{\mathbf{R}^3}f(x,u_{\lambda_n})\varphi\mathrm{d}x。\tag{22}$$

限制 $x\in\Omega$,则式(22)变为

$$\int_\Omega(\nabla u_{\lambda_n}\nabla\varphi+u_{\lambda_n}\varphi)\mathrm{d}x+\int_\Omega\phi_{u_{\lambda_n}}u_{\lambda_n}\varphi\mathrm{d}x=\int_\Omega f(x,u_{\lambda_n})\varphi\mathrm{d}x。\tag{23}$$

又在 $L^2(\Omega)$上,$u_{\lambda_n}\to u_0,\ n\to\infty$,令 $n\to\infty$ 得到

$$\int_\Omega(\nabla u_0\nabla\varphi+u_{u_0}\varphi)\mathrm{d}x+\int_\Omega\phi_{u_0}u_0\varphi\mathrm{d}x=\int_\Omega f(x,u_0)\varphi\mathrm{d}x,\tag{24}$$

式(24)表明 u_0 为系统(5)的一个弱解。

最后只要验证 $u_0\neq 0$。为此,只要证明在 $H^1(\mathbf{R}^3)$上,u_{λ_n}强收敛到 u_0。由 u_{λ_n}在 $H^1(\mathbf{R}^3)$中弱收敛到 u_0 可得 $\|u_0\|\leqslant\liminf_{n\to\infty}\|u_{\lambda_n}\|$,下面验证$\limsup_{n\to\infty}\|u_{\lambda_n}\|\leqslant\|u_0\|$。

由 $I'_{\lambda_n}(u_{\lambda_n})u_{\lambda_n}=0$ 可得

$$\|u_{\lambda_n}\|_{\lambda_n}^2+\int_{\mathbf{R}^3}\phi_{u_{\lambda_n}}u_{\lambda_n}^2\mathrm{d}x=\int_{\mathbf{R}^3}f(x,u_{\lambda_n})u_{\lambda_n}\mathrm{d}x;\tag{25}$$

由 $I'_{\lambda_n}(u_{\lambda_n})u_0=0$ 可得

$$\langle u_{\lambda_n},u_0\rangle_{\lambda_n}+\int_{\mathbf{R}^3}\phi_{u_{\lambda_n}}u_{\lambda_n}u_0\mathrm{d}x=\int_{\mathbf{R}^3}f(x,u_{\lambda_n})u_0\mathrm{d}x。\tag{26}$$

由引理 7 可得,当 $n\to\infty$ 时

$$\begin{aligned}&\left|\int_{\mathbf{R}^3}\phi_{u_{\lambda_n}}u_{\lambda_n}^2\mathrm{d}x-\int_{\mathbf{R}^3}\phi_{u_{\lambda_n}}u_{\lambda_n}u_0\mathrm{d}x\right|=\int_{\mathbf{R}^3}\phi_{u_{\lambda_n}}u_{\lambda_n}(u_{\lambda_n}-u_0)\mathrm{d}x\\ &\leqslant\|\phi_{u_{\lambda_n}}\|_6\|u_{\lambda_n}-u_0\|_2\|u_{\lambda_n}\|_3\leqslant c_8\|u_{\lambda_n}\|_{\frac{12}{5}}^2\|u_{\lambda_n}-u_0\|_2\|u_{\lambda_n}\|_3\to 0。\end{aligned}\tag{27}$$

$$\begin{aligned}&\left|\int_{\mathbf{R}^3}f(x,u_{\lambda_n})u_{\lambda_n}\mathrm{d}x-\int_{\mathbf{R}^3}f(x,u_{\lambda_n})u_0\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_{\mathbf{R}^3}|f(x,u_{\lambda_n})||u_{\lambda_n}-u_0|\mathrm{d}x\\ &\leqslant\int_{\mathbf{R}^3}\sum_{i=1}^m a_i(x)|u_{\lambda_n}|^{\tau_i-1}|u_{\lambda_n}-u_0|\mathrm{d}x\leqslant\sum_{i=1}^m\|a_i\|_{\frac{2}{2-\tau_i}}\|u_{\lambda_n}\|_2^{\frac{2-\tau_i}{2}}\|u_{\lambda_n}-u_0\|_2\to 0。\end{aligned}\tag{28}$$

注意到 Ω 的定义,

$$
\begin{aligned}
\|u_0\|^2 &= \lim_{n\to\infty}\int_{\mathbf{R}^3}(\nabla u_{\lambda_n}\nabla u_0+u_{\lambda_n}u_0)\,\mathrm{d}x \\
&= \lim_{n\to\infty}\int_{\mathbf{R}^3}(\nabla u_{\lambda_n}\nabla u_0+(V_0(x)+\lambda_n V(x))u_{\lambda_n}u_0\,\mathrm{d}x \\
&= \lim_{n\to\infty}\langle u_{\lambda_n},u_0\rangle_{\lambda_n} = \lim_{n\to\infty}\|u_{\lambda_n}\|_{\lambda_n}^2 \geqslant \lim_{n\to\infty}\|u_{\lambda_n}\|^2。
\end{aligned}
\tag{29}
$$

结合式(25)—(29)可得,当 $n\to\infty$ 时,

$$
\|u_{\lambda_n}-u_0\|^2 = \|u_{\lambda_n}\|^2+\|u_0\|^2-2\int_{\mathbf{R}^3}(\nabla u_{\lambda_n}\nabla u_0+u_{\lambda_n}u_0)\,\mathrm{d}x\to 0。\tag{30}
$$

由式(30)及 $u_0=0$, $x\in\mathbf{R}^3\backslash\Omega$ 可得,当 $n\to\infty$ 时,

$$
I_{\lambda_n}(u_{\lambda_n})\to\frac{1}{2}\int_\Omega(|\nabla u_0|^2+V_0(x)u_0^2)\,\mathrm{d}x+\frac{1}{4}\int_\Omega\phi_{u_0}u_0^2\mathrm{d}x-\int_\Omega F(x,u_0)\,\mathrm{d}x。\tag{31}
$$

由引理6可得

$$
\frac{1}{2}\int_\Omega(|\nabla u_0|^2+V_0(x)u_0^2)\,\mathrm{d}x+\frac{1}{4}\int_\Omega\phi_{u_0}u_0^2\mathrm{d}x-\int_\Omega F(x,u_0)\,\mathrm{d}x\leqslant c^*<0,\tag{32}
$$

式(32)表明 $u_0\neq 0$,定理2证毕。

参考文献:

[1] BARTSCH T, WILLEM M. Infinitely many radial solutions of a semilinear elliptic problem on $\mathbf{R}^N$[J]. Archive for Rational Mechanics and Analysis, 1993, 124:261-276.

[2] YANG Mingbo. Ground state solutions for a periodic Schrödinger equation with superlinear nonlinearities[J]. Nonlinear Analysis, 2009, 72:2620-2627.

[3] CHEN Shangjie, TANG Chunlei. High energy solutions for the Schrödinger-Maxwell equations[J]. Nonlinear Analysis, 2009, 71:4927-4934.

[4] MAO Anmin, YANG Lijuan, QIAN Aixia, et al. Existence and concentration of solutions of Schrödinger-Poisson system[J]. Applied Mathematics Letters, 2017, 68:8-12.

[5] TANG Xianhua. Ground state solutions for superlinear Schrödinger equation[J]. Advanced Nonlinear Studies, 2014, 14:349-361.

[6] SUN Juntao. Infinitely many solutions for a class of sublinear Schrödinger-Maxwell equation[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2012, 390:514-522.

[7] ZOU Wenming. Variant fountain theorems and their applications[J]. Manuscripta Mathematics, 2001, 104:343-358.

[8] MAO Anmin, CHEN Yusong. Existence and concentration of solutions for sublinear Schrödinger-Poisson equations[J]. Indian Journal of Pure and Applied Mathematics, 2018, 49(2):339-348.

[9] LV Ying. Existence and multiplicity of solutions for a class of sublinear Schrödinger-Maxwell equations[J]. Boundary Value Problems, 2013, 2013:177.

[10] LIU Zhisu, GUO Shangjiang, ZHANG Ziheng. Existence and multiplicity of solutions for a class sublinear Schrödinger-Maxwell equations[J]. Taiwanese Journal of Mathematics, 2013, 17:857-872.

[11] ZHANG Qingye, WANG Qi. Multiple solutions for a class of sublinear Schrödinger equations[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2012, 389:511-518.

[12] CHEN Jing, TANG Xianhua. Infinitely many solutions for a class of sublinear Schrödinger equation[J]. Taiwanese Journal of Mathematics, 2015, 19:381-396.

[13] BAO Gui. Infinitely many small solutions for a sublinear Schrödinger-Poisson system with sign-changing potential[J]. Computers and Mathematics with Applications, 2016, 71:2082-2088.

[14] AMBROSETTI A, RUIZ D. Multiple bound states for the Schrödinger-Poisson problem[J]. Communications in Contemporary Mathematics, 2008, 10:391-404.

[15] BENCI V, FORTUNATO D. An eigenvalue problem for the Schrödinger-Maxwell equations[J]. Topological Methods in Nonlinear Analysis, 1998, 11:283-293.

[16] LIONS P L. The concentration-compactness principle in the calculus of variations, the local compact case part I[J]. Annales de l'Institut Henri Poincaré-Analyse Non Linéaire, 1984, 1:109-145.

[17] BARTSCH T, PANKOV A, WANG Z Q. Nonlinear Schrödinger equations with steep potential well[J]. Communications in Contemporary Mathematics, 2001, 3(4):549-569.

(编辑:陈丽萍)