山东大学学报(理学版)2026 年 4 月 第 61 卷 第 4 期
Journal of Shandong University (*Natural Science*), Vol.61, No.4, 2026 http://lxbwk.njournal.sdu.edu.cn

文章编号:1671-9352(2026)04-0062-07 DOI:10.6040/j.issn.1671-9352.0.2024.279

关于定向空间连续性的注记

王武
(天津理工大学中环信息学院, 天津 300380)

摘要:定向空间的交连续性与连续性是研究拓扑空间的重要性质,本文给出一步闭包和弱一步闭包的概念,并研究它们与交连续空间的关系。利用定向扩展概率幂空间给出连续空间的等价刻画。如果定向空间有一步闭包,则其是交连续空间,定向空间是有弱一步闭包的交连续空间当且仅当其有一步闭包。如果定向空间的定向扩展概率幂空间连续,则定向空间是交连续的,定向空间是连续空间当且仅当其定向扩展概率幂空间是连续空间。

关键词:定向空间;交连续空间;一步闭包;连续空间;定向扩展概率幂空间

中图分类号:O153; O189.1 **文献标志码**:A

引用格式:王武. 关于定向空间连续性的注记[J]. 山东大学学报(理学版),2026,61(4):62-68.

Notes on the continuity of directed spaces

WANG Wu
(Zhonghuan Information College Tianjin University of Technology, Tianjin 300380, China)

Abstract: The continuity and meet continuity of directed spaces are important properties to study topological space. We give the concepts of one-step closure and weak one-step closure, and study their relationship with meet continuous spaces. An equivalent characterization of a continuous space is given using the directed probability powerspace. If the directed space has a one-step closure, then it is meet continuous space. The directed space is an meet continuous space with a weak one-step closure if and only if it has a one-step closure. If the directed probability powerspace of a directed space is continuous, then it is meet continuous. Furthermore, a directed space is continuous if and only if its directed probability powerspace is continuous.

Key words: directed space; meet continuous space; one step closure; continuous space; directed probability powerspace

0 引言

Domain 理论是理论计算机与数学交叉产生的重要研究领域[1-5]。王武等[6]在 T_0 拓扑空间上借助网的收敛引入逼近关系,定义连续空间,并证明连续空间和 c-空间等价。作为定向完备偏序集的 Scott 空间的一种推广,俞月等[7]引入定向空间的概念,证明定向空间具有类似于定向完备偏序集(赋予 Scott 拓扑)的性质,特别地,定向空间范畴具有卡氏闭性。同时,车铭静等[8]在定向空间中,利用定向集的收敛给出连续空间的等价刻画,给出 c-空间的 Domain 式刻画。作为连续空间的推广,冯华容等[9]引入交连续空间和拟连续空间,研究它们与连续空间的关系。Saheb[10]给出向完备偏序集的概率幂 Domain 的定义,为具有概率选择的函数式编程的语义提供数学模型。Keimel[11]定义拓扑 cone,为概率特性和经典特性同时出现的非确定性语义提供了 Domain 理论工具,与定向完备偏序集的概率幂 Domain 类似,Chen 等[12]给出定向空间上的定向扩展概率幂空间,并证明连续空间的定向扩展概率幂空间是连续空间。那么自然的问题是:当定向空间的定向扩展概率幂空间是连续空间时,其是否为连续空间?

本文首先引入一步闭包和弱一步闭包的概念,并说明连续空间均有一步闭包,有一步闭包的定向空间均

收稿日期:2024-08-13; **网络出版时间**:2025-09-01
基金项目:天津市教委科研计划项目(2023KJ281)
作者简介:王武(1985—),男,副教授,硕士,研究方向为理论计算机、Domain 理论,模糊数学的研究. E-mail:wangwu2233@163.com

是交连续空间,证明具有弱一步闭包的交连续空间有一步闭包。定向空间有一步闭包当且仅当其是有弱一步闭包的交连续空间,证明当定向空间 X 的定向扩展概率幂空间是连续空间时,X 是交连续空间。当定向空间 X 的定向扩展概率幂空间是拟连续空间时,X 是拟连续空间,定向空间是连续空间当且仅当其定向扩展概率幂空间是连续空间。

1　预备知识

设 X 是 T_0 拓扑空间,定义 X 上由其拓扑诱导的偏序关系为 $x\leqslant y\Leftrightarrow x\in \mathrm{cl}\{y\}$,其中 $\mathrm{cl}\{y\}$ 为单点集 $\{y\}$ 在拓扑空间 X 中的闭包[12]。T_0 拓扑空间上的序关系总是按上述方式生成的特殊化序,T_0 拓扑空间 X 的每个定向集 D 可看成 X 的一个网,指标集 $J=D$。若 D 收敛到 x,即 x 的任意开邻域交 D 非空,记为 $D\to x$。易知,$\{y\}\to x$ 当且仅当 $x\leqslant y$。本文中拓扑空间 X 的开集格用 $\mathscr{O}(X)$ 表示。

定义 1[13]　设 X 是 T_0 拓扑空间,如果任意 $y\in U\in\mathscr{O}(X)$,存在 $x\in X$ 使得 $y\in \mathrm{int}(\uparrow x)\subseteq \uparrow x\subseteq U$,其中 $\mathrm{int}(\uparrow x)$ 表示 $\uparrow x$ 在拓扑空间 X 中的内部,则称 X 为 c-空间。

定义 2[13]　设 X 是 T_0 拓扑空间,$U\subseteq X$,如果任意定向集 $D\to x$, $x\in U$ 蕴含存在 $d\in D$ 使得 $d\in U$,即 $D\cap U\neq\varnothing$,则称 U 为定向开集。所有定向开集的集合记为 $d(X)$。显然,每个定向开集都是上集,所有开集都是定向开集,即 $\mathscr{O}(X)\subseteq d(X)$。如果 $\mathscr{O}(X)=d(X)$,则称 X 为定向空间。

易验证全体定向开集构成 X 上的一个拓扑,称为定向拓扑。偏序集上赋予 Scott 拓扑是定向空间,从而带有特殊化序的定向空间是比定向完备偏序集更一般的数学模型。

定义 3[13]　设 X 是 T_0 拓扑空间,$x,y\in X$,如果任意定向集 $D\subseteq X$, $D\to x$ 蕴含存在 $d\in D$ 使得 $x\leqslant d$,即 $D\cap\uparrow x\neq\varnothing$,则称 x 逼近 y,记为 $x\ll y$。

令 $\Uparrow x=\{y\in X:x\ll y\}$; $\Downarrow x=\{y\in X:y\ll x\}$,显然上述定义的逼近关系满足:(1) $x\ll y$ 蕴含 $x\leqslant y$;(2) $s\leqslant x\ll y\leqslant t$ 蕴含 $s\ll t$。

命题 1[13]　设 X 是 c-空间,则(1) 任意 $x,y\in X$, $x\ll y\Leftrightarrow y\in\mathrm{int}(\uparrow x)$;(2) $\{\Uparrow x:x\in X\}$ 是 X 的一组基;(3) 任意 $x,y\in X$, $x\ll y\Rightarrow \exists z\in X$, $x\ll z\ll y$。

命题 2[13]　设 X 是 T_0 拓扑空间,则下列等价:(1) X 是 c-空间;(2) X 是定向空间且任意 $x\in X$, $\Downarrow x$ 是定向的且作为网 $\Downarrow x\to x$;(3) X 是定向空间且任意 $x\in X$,存在定向集 $D\subseteq\Downarrow x$ 使得 $D\to x$。

由命题 2 知所有的 c-空间都是定向空间,再由命题 1 知在 c-空间中,$\{\Uparrow x:x\in X\}$ 是 $d(X)$ 的基。称满足命题 2 等价条件的拓扑空间为连续空间。

设 X 是 T_0 拓扑空间,G、H 是 X 的两个非空子集,如果 $H\subseteq\uparrow G$,则 $G\leqslant H$,称这种序关系为 Symth 序,Symth 序是一种预序关系。如果任意的定向集 $D\subseteq X$, $D\to x\in H$ 蕴含存在 $d\in D$ 使得 $d\in\uparrow G$,即 $D\cap\uparrow G\neq\varnothing$,则 $G\ll H$。设 X 是 T_0 拓扑空间,令 $\mathscr{P}^w(X)$ 表示 X 的非空有限子集的集族,设非空集族 $\mathscr{F}\subseteq\mathscr{P}^w(X)$,如果任给 $E,F\in\mathscr{F}$ 存在有限集 $H\in\mathscr{F}$ 使得 $\uparrow H\subseteq\uparrow E\cap\uparrow F$,则称 $\mathscr{F}$ 为定向集族。如果任意 $x\in U\in\mathscr{O}(X)$,存在 $F\in\mathscr{F}$ 使得 $\uparrow F\subseteq U$,则称定向集族 $\mathscr{F}$ 收敛到 x,记为 $\mathscr{F}\to x$。

任意 $x\in X$,记 $\mathrm{fin}(x)=\{F\in\mathscr{P}^w(X):F\ll x\}$,如果 X 是定向空间,$\mathrm{fin}(x)$ 是定向集族且 $\mathrm{fin}(x)\to x$,则称 X 是拟连续空间。设 X 是定向空间,若任意的 $x\in X$ 及定向集 $D\subseteq X$, $D\to x$ 蕴含 $x\in\mathrm{cl}(\downarrow D\cap\downarrow x)$,则称 X 为交连续空间。易知,定向空间是连续空间当且仅当其是交连续的拟连续空间[9]。

定义 4[14]　设 X 是拓扑空间,$\mu:\mathscr{O}(X)\to[0,+\infty)$ 为映射,则称映射 $\mu:\mathscr{O}(X)\to[0,+\infty)$ 为一个连续的赋值函数,如果它满足:(1) 严格性。$\mu(\varnothing)=0$;(2) 单调性。$V\subseteq U$ 可推出 $\mu(V)\leqslant\mu(U)$;(3) 模律。$\mu(V)+\mu(U)=\mu(V\cup U)+\mu(V\cap U)$;(4) 连续性。对每个定向集 $\mathscr{D}\subseteq\mathscr{O}(X)$, $\mu(\sup\mathscr{D})=\sup\{\mu(U):U\in\mathscr{D}\}$。

设 X 是拓扑空间,对 X 中任意元素 x,定义单点赋值函数 $\eta_x:\mathscr{O}(X)\to[0,+\infty)$,当 $x\in U$ 时,$\eta_x(U)=1$;当 $x\notin U$ 时,$\eta_x(U)=0$,称有限个单点赋值函数的线性组合 $\xi=\sum\limits_{b\in B}r_b\eta_b$ 为简单赋值函数,其中 $0<r_b<+\infty$,其定义为 $\xi(U)=\sum\limits_{b\in B\cap U}r_b$,称有限集 B 为 ξ 的支撑。

设 X 是定向空间,定向空间-cone 是定向空间 X 拥有零元 0,加法运算 $+:X\otimes X\to X$,和数乘运算 $\cdot:\mathbf{R}^+\otimes X\to X$(其中 $\mathbf{R}^+$ 在通常大小序下赋予 Scott 拓扑)使得加法和数乘都连续并且满足以下各条件:(1) $x+y=y+x$, $\forall x,y\in X$;(2) $(x+y)+z=x+(y+z)$, $\forall x,y,z\in X$;(3) $0+x=x$, $\forall x\in X$;(4) $(kl)\cdot x=k(l\cdot x)$, $\forall k,l\in\mathbf{R}^+$, $\forall x\in X$;(5) $(k+l)\cdot x=k\cdot x+l\cdot x$, $\forall k,l\in\mathbf{R}^+$, $\forall x\in X$;(6) $k\cdot(x+y)=k\cdot x+k\cdot y$, $\forall k\in\mathbf{R}^+$, $\forall x,y\in X$;(7) $1\cdot x=x$, $\forall x\in X$;(8) $k\cdot 0=0$, $\forall k\in\mathbf{R}^+$。假设$(X,+,\cdot)$,$(Y,\oplus,*)$是两个定向空间-cone, $f:(X,+,\cdot)\to(Y,\oplus,*)$为映射,如果 f 连续且 $\forall x,y\in X$, $\forall a\in R^+$, $f(x+y)=f(x)\oplus f(y)$, $f(a\cdot x)=a*f(x)$,则称 f 为 X 和 Y 之间的定向空间-cone 同态。

定义 5[14]　设 X,Z 是定向空间,如果 Z 满足:(1) Z 是定向空间-cone;(2) 存在连续映射设 $i:X\to Z$ 使得任意定向空间-cone$(Y,\oplus,*)$以及连续映射 $f:X\to Y$,都存在唯一的定向空间-cone 同态 $\bar{f}:(Z,+,\cdot)\to(Y,\oplus,*)$使得 $f=\bar{f}\circ i$,则称定向空间 Z 为 X 的定向扩展概率幂空间。

显然定向空间的定向扩展概率幂空间在同构意义下是唯一的,文献[13]也给出了定向扩展概率幂空间的构造方法。设 X 是定向空间,记 $\mathrm{SV}(X)$ 为 X 上所有简单赋值函数之集,在 $\mathrm{SV}(X)$ 上自然有如下点态序$\leqslant$:$\xi\leqslant\eta\Leftrightarrow\xi(U)\leqslant\eta(U)$, $\forall U\in\mathscr{O}(X)$。设 $\mathscr{D}=\{\xi_i\}_{i\in I}\subseteq\mathrm{SV}(X)$ 是一个定向集,$\xi=\sum\limits_{i=1}^{n}r_{b_i}\eta_{b_i}\in\mathrm{SV}(X)$。如果(1)任意 b_i 存在定向集 $D_i\subseteq X$ 使得 $D_i\to b_i$, $i=1,2,\cdots,n$;(2) $\forall(d_1,d_2,\cdots,d_n)\in\prod\limits_{i=1}^{n}D_i$, $\forall r'_{b_i}<r_{b_i}$, 都存在 $\xi'\in\mathscr{D}$,使得 $\sum\limits_{i=1}^{n}r'_{b_i}\eta_{d_i}\leqslant\xi'$, $i=1,2,\cdots,n$,则称 $\mathscr{D}\Rightarrow_P\xi$。设 $\mathscr{U}\subseteq\mathrm{SV}(X)$,如果任意的定向集 $\mathscr{D}\subseteq\mathrm{SV}(X)$以及 $\xi\in\mathrm{SV}(X)$, $\mathscr{D}\Rightarrow_P\xi\in\mathscr{U}$ 蕴含 $\mathscr{D}\cap\mathscr{U}\neq\varnothing$,则称 $\mathscr{U}$ 为$\Rightarrow_P$ 收敛开集。记所有$\Rightarrow_P$ 收敛开集为 $\mathscr{O}_{\Rightarrow_P}\mathrm{SV}(X)$。

命题 3[14]　设 X 是定向空间,则(1) $(\mathrm{SV}(X),\mathscr{O}_{\Rightarrow_P}\mathrm{SV}(X))$是定向空间,简记 $\mathrm{SV}(X)$。$\mathrm{SV}(X)$上的特殊化序等于$\leqslant$;(2) 定义$+$为$(\xi+\eta)=\xi(U)+\eta(U)$,数乘$\cdot$为$(a\cdot\xi)=a\cdot\xi(U)$,则 $\mathrm{SV}(X)$是一个定向空间-cone;(3) $\mathrm{SV}(X)$是 X 的定向扩展概率幂空间。

命题 4[14]　设 X 是连续空间,则 $\mathrm{SV}(X)$是连续空间。

涉及定向空间的定向扩展概率幂空间的基本概念及结论参考文献[14]。

命题 5[15]　设 X 是偏序集,$\mathscr{F}\subseteq\mathscr{P}^w(X)$是定向集族,则存在定向集 $D\subseteq\cup_{F\in\mathscr{F}}F$ 使得任意 $F\in\mathscr{F}$, $D\cap F\neq\varnothing$。

2　定向空间的交连续性与一步闭包

本章引入一步闭包和弱一步闭包的概念,并说明连续空间都有一步闭包,拟连续空间都有弱一步闭包,最后证明定向空间有一步闭包等且仅当其是有弱一步闭包的交连续性空间。

定义 6　设 X 是定向空间,$A\subseteq X$,定义 $A^{\downarrow\ll}=\{x\in X:x\in A,\ \Downarrow x\cap A\neq\varnothing\}$, $A^{\uparrow\ll}=\{x\in X:\Downarrow x\subseteq A\}$。

设 X 是定向空间,$a\in X$,则显然有下列结论:(1) $(\uparrow a)^{\downarrow\ll}=\Uparrow a$;(2) 任意上集 $A\subseteq X$, $x\in A^{\downarrow\ll}$当且仅当$\exists y\in X$, $y\ll x$。下面给出连续空间的等价刻画。

命题 6　设 X 是定向空间,$U\subseteq X$,如果 $U=U^{\downarrow\ll}$,则 U 是定向开集。

证明　设 $U\subseteq X$, $D\subseteq X$ 是定向集且 $D\to x\in U$,则 $x\in U^{\downarrow\ll}$,故$\Downarrow x\cap U\neq\varnothing$,因此存在 $u\in U$ 使得 $u\ll x$,由 $D\to x$ 知$\uparrow u\cap D\neq\varnothing$,从而 $U\cap D\neq\varnothing$, U 是定向开集。

命题 7　设 X 是定向空间,则下列等价:(1) X 是连续空间;(2) 任意上集 $A\subseteq X$, $\mathrm{int}(A)=A^{\downarrow\ll}$;(3) 任意下集 $A\subseteq X$, $\mathrm{cl}(A)=A^{\uparrow\ll}$。

证明　(1)$\Rightarrow$(2)。设 X 是连续空间,$x\in\mathrm{int}(A)$,则存在 $a\in\mathrm{int}(A)$使得 $a\ll x$,即$\Downarrow x\cap\mathrm{int}(A)\neq\varnothing$,从而$\Downarrow x\cap A\neq\varnothing$, $x\in A^{\downarrow\ll}$。如果 $x\in A^{\downarrow\ll}$,则$\Downarrow x\cap A\neq\varnothing$。令 $a\in\Downarrow x\cap A$,则 $x\in\Uparrow a\subseteq A$。因为$\Uparrow a$ 是开集,所以 $x\in\mathrm{int}(A)$。

(2)$\Rightarrow$(1)。任意 $x\in X$,令 $a,b\in\Downarrow x$,则 $x\in\Uparrow a\cap\Uparrow b$。因为$\Uparrow a=(\uparrow a)^{\downarrow\ll}=\mathrm{int}(\uparrow a)$, $\Uparrow b=(\uparrow b)^{\downarrow\ll}=\mathrm{int}(\uparrow b)$, $x\in\Uparrow a\cap\Uparrow b=\mathrm{int}(\uparrow a)\cap\mathrm{int}(\uparrow b)=\mathrm{int}(\uparrow a\cap\uparrow b)=(\uparrow a\cap\uparrow b)^{\downarrow\ll}$,因此$\Downarrow x\cap(\uparrow a\cap\uparrow b)\neq\varnothing$。

令 $c\in\Downarrow x\cap(\uparrow a\cap\uparrow b)$，则 $a,b\leqslant c$，$\Downarrow x$ 是定向集。设 $x\in U\in d(X)$，则 $U=U^{\downarrow\ll}$，$\Downarrow x\cap U\neq\varnothing$，故 $\Downarrow x\to x$。综上 X 是连续空间。

(2)$\Leftrightarrow$(3) 显然。

上述命题的直接推论是：设 X 是连续空间，$A\subseteq X$，$x\in X$，则 $x\in \mathrm{cl}(A)\Leftrightarrow\Downarrow x\subseteq\downarrow A$。设 X 是定向空间，$A\subseteq X$，令 $\bar{A}=\{x\in X:\exists$ 定向集 $D\subseteq\downarrow x\cap\downarrow A$，$D\to x\}$。容易验证 $A\subseteq\downarrow A\subseteq\bar{A}\subseteq \mathrm{cl}(A)$ 且 $\bar{A}\subseteq A^{\uparrow\ll}$。

定义 7　设 X 是定向空间，任意 $A\subseteq X$，如果 $\bar{A}=\mathrm{cl}(A)$，则称 X 有一步闭包。

命题 8　设 X 是定向空间，则：(1) 如果 X 是连续空间，则 X 有一步闭包；(2) 如果 X 有一步闭包，则 X 是交连续空间。

证明　(1) 如果 X 是连续空间，$A\subseteq X$，只须证明 $\mathrm{cl}(A)\subseteq\bar{A}$。设 $x\in \mathrm{cl}(A)$，则 $\Downarrow x\subseteq\downarrow A$。由连续性知 $\Downarrow x$ 是定向集且 $\Downarrow x\to x$，因此 $x\in\bar{A}$。

(2) 设 $D\subseteq X$ 是定向集且 $D\to x$。因为 X 有一步闭包，则 $x\in \mathrm{cl}(D)=\bar{D}$，所以存在定向集 $D'\subseteq\downarrow x\cap\downarrow D$ 使得 $D'\to x$。因为 $D'\subseteq(\downarrow x\cap\downarrow D)\cap\downarrow x$ 且 $D'\to x$，所以 $x\in\overline{\downarrow x\cap\downarrow D}=\mathrm{cl}(\downarrow x\cap\downarrow D)$，即 X 是交连续空间。

下面给出弱一部闭包的概念，并给出交连续空间与一步闭包之间的关系。

定义 8　设 X 是定向空间，任意 $A\subseteq X$，令 $\underline{A}=\{x\in X:\exists$ 定向集 $D\subseteq\downarrow A$，$D\to x\}$，如果 $\underline{A}=\mathrm{cl}(A)$，则称 X 有弱一步闭包。

命题 9　设 X 是定向空间，则：(1) 如果 X 是拟连续空间，则 X 有弱一步闭包；(2) 如果 X 有一步闭包，则 X 有弱一步闭包。

证明　(1) 只须证明任意 $A\subseteq X$，$\mathrm{cl}(A)\subseteq\underline{A}$。任意 $x\in \mathrm{cl}(A)$ 和 $F\in \mathrm{fin}(x)$，因为 $F\ll x$ 且 X 是拟连续空间，则 $x\in\Uparrow F\in d(X)$，故 $\Uparrow F\cap A\neq\varnothing$。任意 $F\in \mathrm{fin}(x)$，则 $\{F\cap\downarrow A:F\in \mathrm{fin}(x)\}$ 是定向集族，从而存在定向集 $D\subseteq\bigcup\limits_{F\in \mathrm{fin}(x)}F\cap\downarrow A$ 使得任意 $F\in \mathrm{fin}(x)$ 有 $D\cap F\cap\downarrow A\neq\varnothing$。任意 $x\in U\in d(X)$，存在 $F\in \mathrm{fin}(x)$ 和 $d\in D\cap F\cap\downarrow A$ 使得 $d\in\uparrow F\subseteq U$，从而 $D\to x$，X 有弱一步闭包。

(2) 显然。

定理 1　设 X 是定向空间，则 X 是有弱一步闭包的交连续空间当且仅当 X 有一步闭包。

证明　设 X 有一步闭包，由命题 9 知 X 是有弱一步闭包的交连续空间。反之，设 X 是有弱一步闭包的交连续空间，则 $\underline{A}=\mathrm{cl}(A)$。令 $x\in\underline{A}=\mathrm{cl}(A)$，则存在定向集向集 $D\subseteq\downarrow A$ 使得 $D\to x$。由交连续性知 $x\in \mathrm{cl}(\downarrow x\cap\downarrow D)=\underline{\downarrow x\cap\downarrow D}$，则存在定向集 $D'\subseteq\downarrow x\cap\downarrow D$ 使得 $D'\to x$。因为 $D'\subseteq\downarrow x\cap\downarrow D\subseteq\downarrow x\cap\downarrow A$，$x\in\bar{A}$，所以 X 有一步闭包。

3　定向扩展概率幂空间的连续性

设 X 是定向空间，$B\subseteq X$，如果任意 $x\in X$，$B\cap\Downarrow x$ 是定向集且 $B\cap\Downarrow x\to x$，则称 B 为 X 的基。显然，定向空间 X 有基当且仅当 X 是连续空间[16]。

3.1　定向扩展概率幂空间的基

本章首先研究连续空间的基与其定向扩展概率幂空间的关系。

命题 10　设 X 是定向空间，$\xi=\sum\limits_{i=1}^{n}r_{b_i}\eta_{b_i}\in \mathrm{SV}(X)$，如果任意的 $i=1,2,\cdots,n$，$a_i\ll b_i$，$r_{a_i}<r_{b_i}$，令 $\zeta=\sum\limits_{i=1}^{n}r_{a_i}\eta_{a_i}$，则 $\zeta\ll\xi$。

证明　设 $\mathscr{D}=\{\xi_i\}_{i\in I}\subseteq \mathrm{SV}(X)$ 是定向集，$\xi=\sum\limits_{i=1}^{n}r_{b_i}\eta_{b_i}\in \mathrm{SV}(X)$ 且 $\mathscr{D}\Rightarrow_P\xi$，对于任意 b_i，都存在定向集 $D_i\subseteq X$ 使得在 X 中 $D_i\to b_i$，任意的 i，因为 $a_i\ll b_i$ 且 $D_i\to b_i$，所以存在 $d_i\in D_i$ 使得 $a_i\leqslant d_i$。因为 $r_{a_i}<r_{b_i}$，所以存在 $\xi'\in\mathscr{D}$，使得 $\sum\limits_{i=1}^{n}r_{a_i}\eta_{d_i}\leqslant\xi'$，显然 $\eta_{a_i}\leqslant\eta_{d_i}$，$\zeta=\sum\limits_{i=1}^{n}r_{a_i}\eta_{a_i}\leqslant\sum\limits_{i=1}^{n}r_{a_i}\eta_{d_i}\leqslant\xi'$，则由定义 3 知 $\zeta\ll\xi$。

如果 X 是连续空间，则 X 有基且 $\mathrm{SV}(X)$ 是连续空间，进而 $\mathrm{SV}(X)$ 也有基。下面研究 X 的基与 $\mathrm{SV}(X)$

的基的关系。

定理 2 设 X 是连续空间,$B\subseteq X$ 为 X 的基,则 $\mathscr{B}=\{\sum_{i\in I} r_{b_i}\eta_{b_i}: b_i\in B,\ r_{b_i}\in Q, I$ 有限$\}$ 是 $\mathrm{SV}(X)$ 的基。

证明 设 $\xi=\sum_{i=1}^{n} r_{b_i}\eta_{b_i}\in \mathrm{SV}(X)$, $\mathscr{D}_\xi=\{\sum_{i=1}^{n} r_{a_i}\eta_{a_i}: a_i\in B\cap\Downarrow b_i,\ r_{a_i}\in Q,\ r_{a_i}<r_{b_i}\}$, 显然 $\mathscr{D}_\xi\subseteq\mathscr{B}$。$r_{a_i}<r_{b_i}$, $a_i\ll b_i$,由命题 10 知 $\mathscr{D}_\xi\subseteq\mathscr{B}\cap\Downarrow\xi$。任意 b_i,令 $D_i=B\cap\Downarrow b_i$,因为 B 为 X 的基,则 D_i 是定向集且 $D_i\to b_i$。$\forall(d_1,d_2,\cdots,d_n)\in\prod_{i=1}^{n} D_i$,对每一个 i,存在 $c_i\in B$ 使得 $d_i\ll c_i\ll b_i$, $\forall r'_{b_i}<r_{b_i}$,存在有理数 r_{a_i} 使得 $r'_{b_i}<r_{a_i}<r_{b_i}$,则 $\sum_{i=1}^{n} r'_{b_i}\eta_{d_i}\ll\sum_{i=1}^{n} r_{a_i}\eta_{c_i}\in\mathscr{D}_\xi$,因此 $\mathscr{D}_\xi\Rightarrow_P\xi$。下面证明 $\mathscr{D}_\xi$ 的定向性,设 $\sum_{i=1}^{n} r_{a_i}\eta_{a_i}$, $\sum_{i=1}^{m} r_{c_i}\eta_{c_i}\in\mathscr{D}_\xi$,设 $m<n$,设 $m<i\leqslant n$ 时,取 $c_i=a_i$,则任意 i,因为 $a_i, c_i\in D_i$,所以存在 $d_i\in D_i$ 使得 $a_i, c_i\leqslant d_i$。令 $r_{d_i}=r_{a_i}$, $m<i\leqslant n$, $r_{d_i}=\max\{r_{a_i}, r_{c_i}\}$, $i\leqslant m$,显然有 $\sum_{i=1}^{n} r_{a_i}\eta_{a_i}$, $\sum_{i=1}^{m} r_{c_i}\eta_{c_i}\leqslant\sum_{i=1}^{n} r_{d_i}\eta_{d_i}$,故 $\mathscr{D}_\xi$ 是定向集,因此 $\mathscr{B}=\{\sum_{i\in I} r_{b_i}\eta_{b_i}: b_i\in B,\ r_{b_i}\in Q, I$ 有限$\}$ 是 $\mathrm{SV}(X)$ 的基。

推论 1 设 X 是连续空间,$B\subseteq X$ 为 X 的可数基,则 $\mathscr{B}=\{\sum_{i\in I} r_{b_i}\eta_{b_i}: b_i\in B,\ r_{b_i}\in Q, I$ 有限$\}$ 是 $\mathrm{SV}(X)$ 的可数基且 $\{\Uparrow\sum_{i\in I} r_{b_i}\eta_{b_i}: b_i\in A,\ r_{b_i}\in Q\}$ 是 $\mathrm{SV}(X)$ 的可数拓扑基。

3.2 定向扩展概率幂空间的连续性

本章讨论当定向空间 X 的定向扩展概率幂空间 $\mathrm{SV}(X)$ 是连续空间时 X 的连续性,设 $\xi=\sum_{i=1}^{n} r_{b_i}\eta_{b_i}$,定义 $\mathrm{sport}(\xi)=\{a\in X: \forall U\in d(X),\ a\in U\Rightarrow\xi(U)>0\}$, $S(\eta_x)=\cup\{\mathrm{sport}(\xi):\xi\ll\eta_x\}$。

命题 11 设 X 是定向空间,$\mathrm{SV}(X)$ 是连续空间,则对任意 $x\in X$, $S(\eta_x)\subseteq\Downarrow x$。

证明 设 $a\in S(\eta_x)$,则存在 $\xi=\sum_{i=1}^{n} r_{b_i}\eta_{b_i}\in\mathrm{SV}(X)$ 使得 $\xi\ll\eta_x$ 且 $a\in\mathrm{sport}(\xi)$。设任意定向集 $D\subseteq X$, $D\to x$,令 $\mathscr{D}=\{\eta_d: d\in D\}$。显然 $\mathscr{D}$ 是定向集,且 $\mathscr{D}\Rightarrow_P\eta_x$。由于 $\xi\ll\eta_x$,因此存在 $d\in D$ 使得 $\xi\leqslant\eta_d$。由 $a\in\mathrm{sport}(\xi)$ 知 $\forall U\in d(X)$, $a\in U$ 蕴含 $\xi(U)>0$,因此 $\eta_d(U)>0$,即 $d\in U$,即 a 的开邻域都是 d 的开邻域,从而 $a\leqslant d$,故 $a\ll x$。

命题 12 设 X 是定向空间, $\mathrm{SV}(X)$ 是连续空间, $\xi\in\mathrm{SV}(X)$, $U\in d(X)$,如果 $\xi(U)>0$,则 $U\cap\mathrm{sport}(\xi)\neq\varnothing$。

证明 假设 $U\cap\mathrm{sport}(\xi)=\varnothing$,则 $\forall a\in U$, $\exists U_a\in d(X)$ 使得 $a\in U_a$ 且 $\xi(U_a)\ngtr 0$。令 $V_a=U\cap U_a$,定义 $\mathscr{F}=\{F: F\in P^w(U)\}$, $U_F=\bigcup_{a\in F} V_a$。$\{U_F: F\in\mathscr{F}\}$ 在包含序下是定向集,$U=\bigcup_{F\in\mathscr{F}} U_F$ 且 $\xi(U_F)=0$。由 ξ 的连续性知 $\xi(U)=\sup\{\xi(U_F): F\in\mathscr{F}\}=0$,矛盾,故 $U\cap\mathrm{sport}(\xi)\neq\varnothing$。

命题 13 设 X 是定向空间,$\mathrm{SV}(X)$ 是连续空间,则 $\mathrm{cl}(\Downarrow x)=\downarrow x$ 且 X 是交连续空间。

证明 由命题 12 知,要证 $\mathrm{cl}(\Downarrow x)=\downarrow x$,只须证明 $\mathrm{cl}(S(\eta_x))=\downarrow x$,即证明 $x\in\mathrm{cl}(S(\eta_x))$。设 $x\notin\mathrm{cl}(S(\eta_x))$,令 $U=X\backslash\mathrm{cl}(S(\eta_x))$,则 $x\in U$。因为 $\mathrm{SV}(X)$ 是连续空间且 $\eta_x\in\mathrm{SV}(X)$,所以 $\Downarrow\eta_x$ 是定向集且 $\Downarrow\eta_x\to\eta_x$。因为 $\eta_x(U)=1$,则一定存在 $\xi\in\Downarrow\eta_x$ 使得 $\xi(U)>0$,所以 $U\cap\mathrm{sport}(\xi)\neq\varnothing$, $U\cap S(\eta_x)\neq\varnothing$,与 $U=X\backslash\mathrm{cl}(S(\eta_x))$ 矛盾。

下证 X 是交连续空间。设 $D\subseteq X$ 是定向集且 $D\to x$,令 $\mathscr{D}=\{\eta_d: d\in D\}$,显然 $\mathscr{D}$ 是定向集,且 $\mathscr{D}\Rightarrow_P\eta_x$。任意 $\xi\ll\eta_x$,存在 $d\in D$ 使 $\xi\leqslant\eta_d$。如果开集 $U\subseteq X$, $\xi(U)>0$,则 $\eta_d(U)>0$ 且 $d\in U$, $\mathrm{sport}(\xi)\subseteq S(\eta_d)\subseteq\downarrow d$。由 ξ 的任意性知 $S(\eta_x)\subseteq\downarrow D$,由命题 12 知 $S(\eta_x)\subseteq\downarrow x\cap\downarrow D$。设 $x\in U\in O(X)$,因为 $\eta_x(U)=1$,存在 $\xi\ll\eta_x$ 使得 $\xi(U)>0$,所以 $U\cap\mathrm{sport}(\xi)\neq\varnothing$,即 $\downarrow x\cap\downarrow D\cap U\neq\varnothing$,从而 $x\in\mathrm{cl}(\downarrow x\cap\downarrow D)$,$X$ 是交连续空间。

推论 2 设 X 是拟连续空间,则 X 是连续空间当且仅当 $\mathrm{SV}(X)$ 是连续空间。

推论 2 条件中的拟连续性是否可以去掉？即当 $\mathrm{SV}(X)$ 是连续空间,X 是否是连续空间？下面证明拟连续空间的定向扩展概率幂空间是拟连续的,并给出上述问题的肯定回答。文献[9]证明了定向空间 X 是拟连续的当且仅当 $d(X)$ 是超连续分配格。

命题 14[17]　设 P,Q 是完备格,$g:P\to Q$ 和 $f:Q\to P$ 是保任意上确界的映射,且 $g\circ f=id_Q$,如果 P 是超连续分配格,则 Q 也是超连续分配格。

命题 15　设 X 是定向空间,(1) 定义映射 $\eta:X\to \mathrm{SV}(X)$ 为任意 $x\in X$, $\eta(x)=\eta_x$,则 η_x 是连续函数;(2) 定义映射 $f:d(X)\to \mathscr{O}_{\Rightarrow_P}\mathrm{SV}(X)$ 为 $f(U)=\{\xi:\xi(U)>0\}$,则 f 是保任意上确界的;(3) 定义 $g:\mathrm{SV}(X)\to d(X)$ 为 $g(\mathscr{U})=\{x\in X:\eta_x\in\mathscr{U}\}$,则 $g\circ f=id_{d(X)}$。

证明　(1) 只须证明 η 保定向集的收敛。设 $D\subseteq X$ 是定向集且 $D\to x$,任意的 $r<1$, $d\in D$, $r\eta_d\leqslant\eta_d$,则易知 $\eta(D)=\{\eta_d:d\in D\}\Rightarrow_P\eta_x$。

(2) 首先证明 f 是良定义的。任意 $U\in d(X)$,显然 $f(U)=\{\xi:\xi(U)>0\}$ 是上集。任意定向集 $\mathscr{D}\Rightarrow_P\xi\in f(U)$,设 $\xi=\sum\limits_{i=1}^{n}r_{b_i}\eta_{b_i}$,则任意 b_i 存在定向集 $D_i\subseteq X$ 使得在 X 中 $D_i\to b_i$。因为 $\xi(U)=\sum\limits_{i=1}^{n}r_{b_i}\eta_{b_i}(U)>0$,所以存在 b_i 使得 $\eta_{b_i}(U)>0$,即 $b_i\in U$。因为 $U\in d(X)$,所以存在 $d_i\in D_i$ 使得 $d_i\in U$。任意 $j=1,\cdots,i-1,i+1,\cdots,n$,任取 $d_j\in D_j$, $\forall r'_{b_i}<r_{b_i}$,则存在 $\xi'\in\mathscr{D}$ 使得 $\sum\limits_{i=1}^{n}r'_{b_i}\eta_{d_i}\leqslant\xi'$, $\xi'(U)\geqslant\sum\limits_{i=1}^{n}r'_{b_i}\eta_{d_i}(U)>0$, $\xi'\in\mathscr{D}\cap f(U)$,因此 f 是良定义的。

其次,显然 f 是保序的且 $f(\varnothing)=\varnothing$。设 $\{U_i:i\in I\}\subseteq d(X)$ 在包含序下是定向的,下证 $f(\bigcup\limits_{i\in I}U_i)\subseteq\bigcup\limits_{i\in I}f(U_i)$。任意 $\xi\in f(\bigcup\limits_{i\in I}U_i)$, $\xi=\sum\limits_{i=1}^{n}r_{b_i}\eta_{b_i}$,有

$$\xi(\bigcup_{i\in I}U_i)=\sum_{j=1}^{n}r_{b_j}\eta_{b_j}(\bigcup_{i\in I}U_i)=\sum_{j=1}^{n}r_{b_j},\ b_j\in(\bigcup_{i\in I}U_i)\Rightarrow\exists j,i\text{ 使得 }b_j\in U_i。$$

$\xi(U_i)>0$,则 $\xi\in\bigcup\limits_{i\in I}f(U_i)$。任意 $U,V\in d(X)$,下证 $f(U\cup V)=f(U)\cup f(V)$。因为 f 是保序,则 $f(U)\cup f(V)\subseteq f(U\cup V)$。任意 $\xi=\sum\limits_{i=1}^{n}r_{b_i}\eta_{b_i}\in f(U\cup V)$,设 $\xi\notin f(U)\cup f(V)$,则 $\xi(U)=\xi(V)=0$,则 $\xi(U\cap V)=0$,故 $\mu(V\cup U)=\mu(V)+\mu(U)-\mu(V\cap U)=0$,矛盾,因此 $f(U\cup V)=f(U)\cup f(V)$,综上 f 是保任意上确界的。

(3) 首先证明 g 是良定义的。任意 $\mathscr{U}\in\mathscr{O}_{\Rightarrow_P}\mathrm{SV}(X)$,显然 $g(\mathscr{U})=\{x\in X:\eta_x\in\mathscr{U}\}$ 是上集。任意定向集 $D\to x\in g(\mathscr{U})$,则 $\eta(D)=\{\eta_d:d\in D\}\Rightarrow_P\eta_x$,存在 $d\in D$ 使得 $\eta_d\in\mathscr{U}$,从而 $d\in g(\mathscr{U})$,即 $g(\mathscr{U})\in d(X)$,因此 g 是良定义的。

其次,显然 g 是保序的且 $g(\varnothing)=\varnothing$。设 $\{\mathscr{U}_i:i\in I\}\subseteq\mathscr{O}_{\Rightarrow_P}\mathrm{SV}(X)$ 在包含序下是定向的。任意 $x\in g(\bigcup\limits_{i\in I}\mathscr{U}_i)$,则 $\eta_x\in\bigcup\limits_{i\in I}\mathscr{U}_i\Rightarrow i\in I$, $\eta_x\in\mathscr{U}_i$, $x\in g(\mathscr{U}_i)$。任意 $\mathscr{U},\mathscr{V}\in\mathscr{O}_{\Rightarrow_P}\mathrm{SV}(X)$,显然 $g(\mathscr{U})\cup g(\mathscr{V})\subseteq g(\mathscr{U}\cup\mathscr{V})$。任意 $x\in g(\mathscr{U}\cup\mathscr{V})$, $\eta_x\in\mathscr{U}\cup\mathscr{V}$,设 $x\notin g(\mathscr{U})\cup g(\mathscr{V})$,则 $\eta_x\notin\mathscr{U}$, $\eta_x\notin\mathscr{V}$,与 $\eta_x\in\mathscr{U}\cup\mathscr{V}$ 矛盾。综上 g 是保任意上确界的。

任意 $U\in d(X)$, $a\in g\circ f(U)\Leftrightarrow\eta_a\in f(U)\Leftrightarrow\eta_a(U)\neq0\Leftrightarrow a\in U$,故 $g\circ f=id_{d(X)}$。

命题 16　设 X 是定向空间,如果 $\mathrm{SV}(X)$ 是拟连续空间,则 X 是拟连续空间。

证明　因为 $\mathrm{SV}(X)$ 是拟连续空间,所以 $\mathscr{O}_{\Rightarrow_P}\mathrm{SV}(X)$ 是超连续分配格。由命题 14 知 $d(X)$ 是超连续分配格,因此 X 是拟连续空间。

定理 3　设 X 是定向空间,则 X 是连续空间当且仅当 $\mathrm{SV}(X)$ 是连续空间。

参考文献:

[1] GOUBAULT L J. Isomorphism theorems between models of mixed choice[J]. Mathematical Structures in Computer Science, 2017, 27(6):1032-1067.

[2] GOUBAULT L J, JIA Xiaodong. Algebras of the extended probabilistic powerdomain monad[J]. Electronic Notes in Theoretical Computer Science, 2019, 345:37-61.

[3] LI Gaolin, XU Luoshan. QFS-domains and their lawson compactness[J]. Order, 2013, 30(1):233-248.

[4] HECKMANN R, KEIMEL K. Quasicontinuous domains and the smyth powerdomain[J]. Electronic Notes in Theory Computer Science, 2013, 298:215-232.

[5] KEIMEL K, PLOTKIN G D, PLOTKIN P. Predicate transformers for extended probability and non-determinism[J]. Mathematical Structures in Computer Science, 2009, 19(3):501-539.

[6] 王武,寇辉. T_0 拓扑空间的逼近结构[J]. 四川大学学报(自然科学版),2014,51(4):681-683.
WANG Wu, KOU Hui. Approximation structures on T_0 topological space[J]. Journal of Sichuan University (Natural Science Edition), 2014, 51(4):681-683.

[7] 俞月,寇辉. 由 T_0 空间的特殊化序定义的定向空间[J]. 四川大学学报(自然科学版),2015,52(2):217-222.
YU Yue, KOU Hui. Directed spaces defined through T_0 spaces with specialization order[J]. Journal of Sichuan University (Natural Science Edition), 2015, 52(2):217-222.

[8] 车铭静,寇辉. c-空间范畴的一个 Cartesian 闭满子范畴[J]. 四川师范大学学报(自然科学版),2020,43(6):756-762.
CHE Mingjing, KOU Hui. A Cartesian closed full subcategory of c-space[J]. Journal of Sichuan Normal University(Natural Science), 2020, 43(6):756-762.

[9] 冯华容,寇辉. T_0 拓扑空间的拟连续性与交连续性[J]. 四川大学学报(自然科学版),2017,54(5):905-910.
FENG Huarong, KOU Hui. Quasicontinuity and meet-continuity of T_0 spaces[J]. Journal of Sichuan University (Natural Science Edition), 2017, 54(5):905-910.

[10] SAHEB D N. Cpo's of measures for nondeterminism[J]. Theoretical Computer Science, 1980, 12(1):19-37.

[11] KEIMEL K. Topological cones: functional analysis in a T_0-setting[J]. Semigroup Forum, 2008, 77(1):109-142.

[12] CHEN Yuxu, KOU Hui, LYU Zhenchao, et al. A construction of free dcpo-cones[J]. Mathematical Structures in Computer Science, 2024, 34:63-79.

[13] XIE Xiaolin, KOU Hui. The cartesian closedness of c-spaces[J]. AIMS Mathematics, 2022, 7(9):16315-16327.

[14] 谢晓林. 定向空间的幂结构及相关问题研究[D]. 成都:四川大学,2022.
XIE Xiaolin. The Powerstructures of directed spaces and related problems[D]. Chengdu: Sichuan University, 2022.

[15] GIERZ G, HOFMANN K H, LAWSON J D, et al. Continuous lattices and domains[J]. Cambridge: Cambridge University Press, 2003.

[16] 王武,张国丽,王颖. 定向空间的 way below 基[J]. 系统科学与数学,2022,42(4):1060-1066.
WANG Wu, ZHANG Guoli, WANG Ying. The way below bases of sirected spaces[J]. Journal of Systems Science and mathematical Sciences, 2022, 42(4):1060-1066.

[17] LYU Zhenchao, KOU Hui. The probabilistic powerdomain from a topological viewpoint[J]. Topology and Its Applications, 2018, 237:26-36.

(编辑:陈丽萍)

(上接第 61 页)

[15] BARDAKOV V G, SINGH M. Extensions and automorphisms of Lie algebras[J]. Journal of Algebra and Its Applications, 2017, 16(9):1-15.

[16] HAZRA S K, HABIB A. Wells exact sequence and automorphisms of extensions of Lie superalgebras[J]. Journal of Lie Theory, 2020, 30(1):179-199.

[17] GOSWAMI S, MISHRA S K, MUKHERJEE G. Automorphisms of extensions of Lie-Yamaguti algebras and inducibility problem[J]. Journal of Algebra, 2024, 641:268-306.

[18] XU Senrong. Cohomology, derivations and abelian extensions of 3-Lie algebras[J]. Journal of Algebra and Its Applications, 2019, 18(7):1-26.

[19] LIU J, MAKHLOUF A, SHENG Y. A new approach to representations of 3-Lie algebras and abelian extensions[J]. Algebra Representation Theory, 2017, 20(6):1415-1431.

[20] ZHANG Tao. Cohomology and deformations of 3-Lie colour algebras[J]. Linear and Multilinear Algebra, 2015, 63(4):651-671.

(编辑:陈丽萍)