

基于多火源燃烧连通度的网络抗毁性分析

白月蓉,魏宗田,王德莉

(西安建筑科技大学理学院,陕西西安710055)

摘要:给出几类笛卡尔积图的多火源燃烧连通度,分析多火源燃烧连通度与图结构的关系,提出多火源燃烧连通度的反问题:给定正数 m ,确定火源,使得最多在 m 步内将图燃烧为不连通或空集,且所含顶点数尽可能地少(最小火源)。最后,给出一个求图的最小火源的算法。

关键词:图;抗毁性;多火源燃烧连通度;笛卡尔积图;算法

中图分类号:O157.5 **文献标志码:**A

引用格式:白月蓉,魏宗田,王德莉.基于多火源燃烧连通度的网络抗毁性分析[J].山东大学学报(理学版),2026,61(4):102-108.

Analysis of network invulnerability based on the multi-fire source burning connectivity

BAI Yuerong, WEI Zongtian, WANG Deli

(Department of Mathematics, Xi'an University of Architecture and Technology, Xi'an 710055, Shaanxi, China)

Abstract: The multi-fire source burning connectivity is given for several types of Cartesian product graphs. The relationship between multi-fire source burning connectivity and graph structure is analyzed, and the inverse problem of multi-fire source burning connectivity is proposed, that is, given a positive number m , determine the fire source such that the graph is burned as disconnected or empty within m steps at most, and contains as few vertices as possible (the minimum fire source). Finally, an algorithm of the minimum fire source of graphs is designed.

Key words: graph; invulnerability; multi-fire source burning connectivity; Cartesian product graphs; algorithm

0 引言

抗毁性衡量的是从结构上破坏一个网络的难度,连通度是最早的抗毁性参数,它刻画破坏通讯网络的难易程度^[1]。图燃烧是 Bonato 等^[2]为模拟社会网络的传播而引入的,文献[3]提出多火源燃烧连通度的概念。

定义 1^[3] 设 $G=(V,E)$ 是一个连通图,第 1 步,选择 $V(G)$ 的一个非空真子集 B 作为燃烧的火源,以后不再增加火源。若第 i 步被燃烧的顶点集为 B_i ,则在第 $i+1$ 步, B_i 中每个点的未燃烧的邻点都将被燃烧。设经过 m 步燃烧后的剩余子图为 G_m ,则称使得 G_m 不连通或为空集的最小的 m 为 G 的多火源燃烧连通度,记为 $b'_c(G)$,其中 $l=|B|$ 为整数,且 $1 \leq l \leq \kappa(G)$ 。与 $b'_c(G)$ 对应的火源称为最佳火源(可能不唯一),记为 B^* 。

多火源燃烧连通度将连通度与图燃烧相结合,多火源燃烧连通度是一个度量网络抗毁性的新参数,它的基本问题是确定火源,使得图燃烧到不连通或为空集所需的步数最少。若给定燃烧步数的上限,则找出使得图燃烧到不连通或为空集的最小火源,即多火源燃烧连通度的反问题。

本文研究几类笛卡尔积图的多火源燃烧连通度、参数与图结构的关系和图的最小火源算法等问题,分析

多火源燃烧连通度意义下的网络抗毁性。所涉及的图均为简单连通无向图,未定义的概念和术语参见文献[4-5]。

1 几类笛卡尔积图的多火源燃烧连通度

本章讨论路与路、路与圈、圈与圈以及 n 个完全图 K_2 的笛卡尔积的多火源燃烧连通度的计算问题,并给出参数计算公式。

定义 2^[6] 设 G 和 H 是 2 个不交的图,则 G 和 H 的笛卡尔积 $G \times H$ 定义为 $V(G \times H) = V(G) \times V(H)$,并且对 $v_1, u_1 \in V(G), v_2, u_2 \in V(H), ((v_1, v_2), (u_1, u_2)) \in E(G \times H) \Leftrightarrow$ 或者 $v_1 = u_1$ 且 $(v_2, u_2) \in E(H)$ 或者 $v_2 = u_2$ 且 $(v_1, u_1) \in E(G)$ 。

引理 1^[3] 对任意的连通图 G ,当 $l_1 > l_2$ 时,都有 $b_c^{l_1}(G) \leq b_c^{l_2}(G)$ 。

引理 2^[3] 设 G 是一个连通图,则有 $b_c^l(G) \geq 1$ 。

定理 1^[3] 设 C_n 是 $n (\geq 3)$ 阶圈,则

$$b_c^l(C_n) = \begin{cases} \lceil \frac{n+1}{2} \rceil, & l=1, \\ 2, & l=2, \text{ 且 } n=3, \\ 1, & l=2, \text{ 且 } n \geq 4. \end{cases}$$

定理 2 设 $G = P_s \times P_n (s, n \geq 2)$ 是路和路的笛卡尔积,则

$$b_c^l(G) = \begin{cases} 3, & l=1, \text{ 且 } s=n=2, \\ 2, & l=1, \text{ 且 } s, n \text{ 不同时为 } 2, \\ 1, & l=2. \end{cases}$$

证明 设顶点集为 $V(G) = \{(i, j) | 1 \leq i \leq s, 1 \leq j \leq n\}$,当 $l=1, s=n=2$ 时, $P_2 \times P_2$ 即 C_4 ,由定理 1,可得 $b_c^1(G) = 3$ 。当 s, n 不同时为 2 时,任选 1 点为火源,都有 G_1 是连通的,所以 $b_c^1(G) \geq 2$ 。选择 $(2, 2)$ 、 $(2, n-1)$ 、 $(s-1, 2)$ 或 $(s-1, n-1)$ 中 1 点作为火源,如图 1(a) (红点表示 1 个最佳火源),有 G_2 不连通,所以 $b_c^1(G) \leq 2$,因此, $b_c^1(G) = 2$ 。

当 $l=2$ 时,如图 1(b),任选 1 个 2 度点,将它所有的邻点作为火源,则 G_1 不连通,所以 $b_c^2(G) \leq 1$,又由引理 2, $b_c^2(G) \geq 1$,因此 $b_c^2(G) = 1$ 。

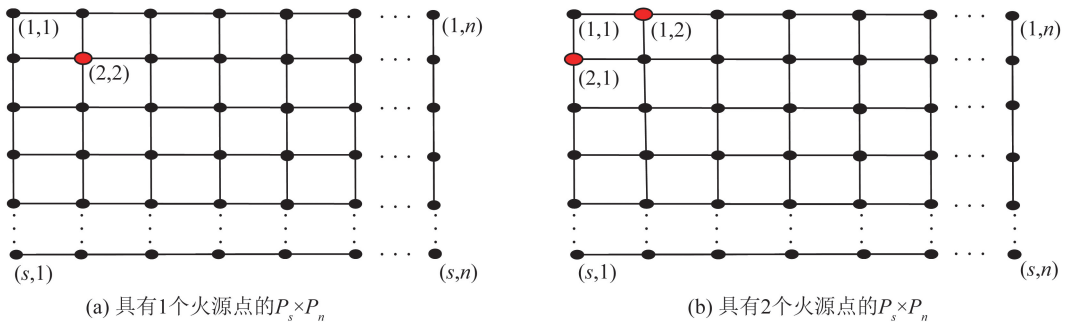


图 1 路与路的笛卡尔积 Fig.1 The Cartesian product $P_s \times P_n$

定理 3 设 $G = P_s \times C_n (s, n \geq 3)$ 是路和圈的笛卡尔积,则

$$b_c^l(G) = \begin{cases} \lceil \frac{n+1}{2} \rceil, & l=1, \\ 2, & l=2, \\ 1, & l=3. \end{cases}$$

证明 设顶点集 $V(G) = \{(i, j) | 1 \leq i \leq s, 1 \leq j \leq n\}$,当 $l=1$ 时,任选 1 点为火源,由定义 1 中燃烧规则可知, $m \leq \lceil \frac{n+1}{2} \rceil - 1$ 时,剩余子图 G_m 依然连通。选择满足 $2 \leq i \leq s-1, 1 \leq j \leq n$ 的点 (i, j) 作为火源,如图 2

(a), 当 $m = \lceil \frac{n+1}{2} \rceil$ 时, G_m 不连通, 因此 $b_c^l(G) = \lceil \frac{n+1}{2} \rceil$ 。

当 $l=2$ 时, 任选 2 点为火源, 都有 $m=1$ 时, G_1 是连通的, 所以 $b_c^2(G) \geq 2$ 。 $s=n=3$ 时, 选择点 $(2, j)$ 、 $(2, j+1)$ 作为火源。 s, n 不同时为 3 时, 如图 2(b), 选择点 (i, j) 、 $(i+2, j+2)$ 作为火源, 以上都有 $m=2$ 时, G_2 不连通, 所以 $b_c^2(G) \leq 2$, 因此 $b_c^2(G) = 2$ 。

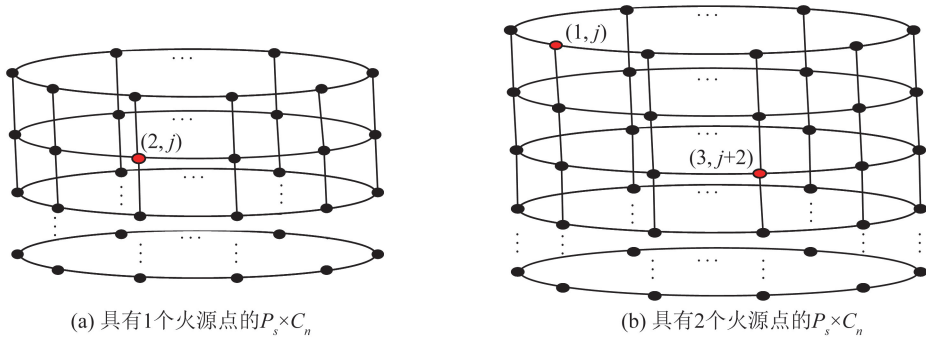


图2 路与圈的笛卡尔积
Fig.2 The Cartesian product $P_s \times C_n$

当 $l=3$ 时, 任选 1 个 3 度点, 将它所有的邻点作为火源, G_1 不连通, 所以 $b_c^3(G) \leq 1$, 又由引理 2, $b_c^3(G) \geq 1$, 因此 $b_c^3(G) = 1$ 。

定理 4 设 $G = C_s \times C_n (s, n \geq 3)$ 是圈和圈的笛卡尔积, 则

$$b_c^l(G) = \begin{cases} \lceil \frac{s+1}{2} \rceil + \lceil \frac{n}{2} \rceil, & l=1, \\ 3, & l=2, \text{ 且 } s=n=3, \\ 2, & l=3 \text{ 或 } l=2, \text{ 且 } s, n \text{ 不同时为 } 3, \\ 1, & l=4. \end{cases}$$

证明 设顶点集 $V(G) = \{(i, j) | 1 \leq i \leq s, 1 \leq j \leq n\}$, 当 $l=1$ 时, 由结构对称性, 任意 1 点均为火源。易知, 当 $m \leq \lceil \frac{s+1}{2} \rceil + \lceil \frac{n}{2} \rceil - 1$ 时, 剩余子图 G_m 是连通的, 当 $m = \lceil \frac{s+1}{2} \rceil + \lceil \frac{n}{2} \rceil$ 时, $G_m = \emptyset$, 因此 $b_c^l(G) = \lceil \frac{s+1}{2} \rceil + \lceil \frac{n}{2} \rceil$ 。

当 $l=2, s=n=3$ 时, 以任意 2 点为火源, G_2 是 1 个孤立点, G_3 为 \emptyset , 因此 $b_c^2(G) = 3$ 。当 s, n 不同时为 3 时, 以任意 2 点为火源, G_1 是连通的, 所以 $b_c^2(G) \geq 2$ 。选择点 (i, j) 、 $(i+2, j+2)$ 作为火源, G_2 不连通, 所以 $b_c^2(G) \leq 2$, 因此 $b_c^2(G) = 2$ 。

当 $l=3$ 时, 任选 3 点为火源, 都有 $m=1$ 时, G_1 是连通的, 所以 $b_c^3(G) \geq 2$ 。 $s=n=3$ 时, 选择点 $(i, 1)$ 、 $(i, 2)$ 、 $(i, 3)$ 作为火源。 s, n 不同时为 3 时, 选择点 (i, j) 、 $(i, j+2)$ 、 $(i+2, j+2)$ 作为火源, 以上都有当 $m=2$ 时, G_2 不连通, 所以 $b_c^3(G) \leq 2$, 因此 $b_c^3(G) = 2$ 。

当 $l=4$ 时, 任选 1 个 4 度点, 将它所有的邻点作为火源, G_1 不连通, 所以 $b_c^4(G) \leq 1$, 又由引理 2, $b_c^4(G) \geq 1$, 因此 $b_c^4(G) = 1$ 。

定义 3^[4] n 维超立方体, 记为 Q_n , 其中 $V(Q_n) = \{x_1 x_2 \cdots x_n : x_i \in \{0, 1\}, 1 \leq i \leq n\}$, 并且若 $x = x_1 x_2 \cdots x_n, y = y_1 y_2 \cdots y_n \in V(Q_n)$, 则 $xy \in E(Q_n) \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n |x_i - y_i| = 1$ 。一般地, $Q_n = K_2 \times Q_{n-1} = \underbrace{K_2 \times K_2 \times \cdots \times K_2}_n$ 。

定理 5^[4] n 维超立方体 Q_n 是 n 正则等 2 部图。

定理 6 设 $G = Q_n$ 是 n 维超立方体, 则

- (1) $b_c^1(G) = n+1$,
- (2) $b_c^n(G) = 1$,
- (3) 当 $2 \leq l \leq n-1$ 时, $1 \leq b_c^l(G) \leq n+1$ 。

证明 (1) 由定理 5 以及 Q_n 的结构对称性, 以任意 1 点为火源, 当 $m < n$ 时, G_m 是连通的且阶大于 1。当 $m = n$ 时, G_m 为 1 个孤立点。当 $m = n+1$ 时, $G_m = \emptyset$, 因此 $b_c^1(G) = n+1$ 。

(2) 显然 Q_n 是 n 正则的,且 $\kappa(Q_n)=n$ 。以 Q_n 的任意 1 个最小点割为火源, G_1 不连通,所以 $b_c^n(G) \leq 1$,又由引理 2, $b_c^n(G) \geq 1$,因此 $b_c^n(G) = 1$ 。

(3) 由引理 1 可知,当 $2 \leq l \leq n-1$ 时, $1 \leq b_c^l(G) \leq n+1$ 。

2 多火源燃烧连通度与图的结构

由上文的结论可以看出,图的多火源燃烧连通度与图的结构有密切关系,下面讨论图中删掉一点(边)或添加一条边后该参数的变化情况。

定理 7^[3] 设 P_n 是 $n(\geq 3)$ 阶路,则 $b_c^l(G) = 1$ 。

定理 8 设 C_n 是 $n(\geq 4)$ 阶圈,则有 $b_c^l(C_n - v) < b_c^l(C_n)$,其中 $C_n - v$ 表示在 C_n 中删掉 1 点后得到的子图。

证明 显然,从 C_n 中删掉任 1 点都有 $C_n - v = P_{n-1}$ 。由定理 1、7 可知, $1 = b_c^l(C_n - v) < b_c^l(C_n)$ 。

注 1 因为 $\kappa(C_n - v) = 1$,所以只讨论 $l=1$ 的情形。

定理 9^[3] 设 $W_{1,n}$ 是 $n+1(\geq 4)$ 阶轮图,则

$$b_c^l(W_{1,n}) = \begin{cases} 2, & l=1, 2 \text{ 或 } l=3, \text{ 且 } n=3, \\ 1, & l=3, \text{ 且 } n \geq 4. \end{cases}$$

定理 10 设 $W_{1,n}$ 是 $n+1(\geq 4)$ 阶轮图,则有

$$\begin{cases} b_c^1(W_{1,n} - v) \geq b_c^1(W_{1,n}), \\ b_c^2(W_{1,n} - v) \leq b_c^2(W_{1,n}). \end{cases}$$

其中 $W_{1,n} - v$ 表示在 $W_{1,n}$ 中删掉 1 点后得到的子图。

证明 设 u 为 $W_{1,n}$ 的中心点,根据删掉点的不同,下面分 2 种情形讨论。

情形 1 当 $v=u$ 时,有 $W_{1,n} - v = C_n$ 。由定理 1、9 可知,当 $l=1$ 时, $b_c^1(W_{1,n} - v) \geq b_c^1(W_{1,n})$ 。当 $l=2$ 时, $b_c^2(W_{1,n} - v) \leq b_c^2(W_{1,n})$ 。

情形 2 当 $v \neq u$, $l=1$ 时,如图 3,任选 1 点为火源, G_1 是连通的,所以 $b_c^1(W_{1,n} - v) \geq 2$ 。选择点 u 作为火源, $G_2 = \emptyset$,所以 $b_c^2(W_{1,n} - v) \leq 2$,因此, $b_c^1(W_{1,n} - v) = 2 = b_c^1(W_{1,n})$ 。当 $l=2$, $n=3$ 时,易知 $b_c^2(W_{1,n} - v) = 2 = b_c^2(W_{1,n})$ 。 $n \geq 4$ 时,对于图 $W_{1,n} - v$,任选 1 个 2 度点,将它所有的邻点作为火源, G_1 不连通,所以 $b_c^2(W_{1,n} - v) \leq 1$,又由引理 2, $b_c^2(W_{1,n} - v) \geq 1$,因此, $1 = b_c^2(W_{1,n} - v) < b_c^2(W_{1,n})$ 。由上述证明可得 $b_c^2(W_{1,n} - v) \leq b_c^2(W_{1,n})$ 。

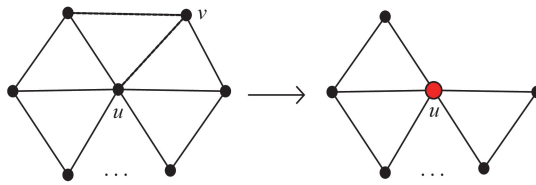


图 3 $W_{1,n}$ 删除点 v 后的子图
Fig.3 The subgraph of deleting vertex v of $W_{1,n}$

定理 11 设 C_n 是 $n(\geq 3)$ 阶圈,则有 $b_c^l(C_n - e) < b_c^l(C_n)$,其中 $C_n - e$ 表示删掉 C_n 中的边 e 后得到的子图。

证明 因为 $C_n - e = P_n$,由定理 1、7 可知, $b_c^l(C_n - e) < b_c^l(C_n)$ 。

定理 12 设 $W_{1,n}$ 是 $n+1(\geq 4)$ 阶轮图,则有

$$\begin{cases} b_c^1(W_{1,n} - uv) \geq b_c^1(W_{1,n}), \\ b_c^2(W_{1,n} - uv) < b_c^2(W_{1,n}). \end{cases}$$

其中 $W_{1,n} - uv$ 表示删掉 $W_{1,n}$ 中的点 u, v 之间的边后得到的子图。

证明 根据删掉边的不同,下面分 2 种情形讨论。

情形 1 删掉如图 4(a) 中的边。当 $l=1$, $n=3$ 时,由定理 9,显然有 $b_c^1(W_{1,n} - uv) = 2 = b_c^1(W_{1,n})$ 。 $n \geq 4$

时,任选1点为火源,有 $m \leq 2$ 时, G_m 是连通的或为孤立点,选择点 u 作为火源,有 $G_3 = \emptyset$, 所以 $3 = b_c^1(W_{1,n} - uv) > b_c^1(W_{1,n})$, 因此, $b_c^1(W_{1,n} - uv) \geq b_c^1(W_{1,n})$ 。当 $l=2$ 时,选择点 v 的邻点作为火源, G_1 不连通,因此 $1 = b_c^2(W_{1,n} - uv) < b_c^2(W_{1,n})$ 。

情形 2 删掉如图 4(b)中的边。当 $l=1$ 时,显然有 $b_c^1(W_{1,n} - uv) = 2 = b_c^1(W_{1,n})$ 。当 $l=2$ 时,选择 1 个 2 度点,将它的所有邻点作为火源, G_1 不连通,因此 $1 = b_c^2(W_{1,n} - uv) < b_c^2(W_{1,n})$ 。

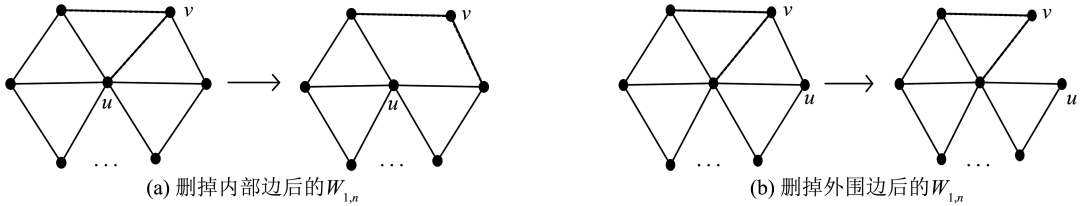


图 4 $W_{1,n}$ 的删边 uv 子图
Fig.4 The subgraph of deleting edge uv of $W_{1,n}$

定理 13 设 P_n 是 $n (\geq 3)$ 阶路,则有 $b_c^l(P_n + uv) \geq b_c^l(P_n)$, 其中 $P_n + uv$ 表示在 P_n 的任意不相邻的点 u, v 之间添加 1 条边得到的图。

证明 根据 u, v 度的大小,下面分 2 种情形讨论。

情形 1 若 $d(u) = d(v) = 1$,显然有 $P_n + uv = C_n$,由定理 1,7 可得 $b_c^l(P_n + uv) > b_c^l(P_n)$ 。

情形 2 若 $\max\{d(u), d(v)\} = 2$,显然 $b_c^1(P_n + uv) = 1 = b_c^1(P_n)$ 。

定理 14 设 C_n 是 $n (\geq 4)$ 阶圈,则有 $b_c^l(C_n + uv) \leq b_c^l(C_n)$, 其中 $C_n + uv$ 表示在 C_n 的任意不相邻的点 u, v 之间添加 1 条边得到的图。

证明 当 $l=1$ 时,如图 5(a),显然有 $b_c^1(C_n + uv) \leq b_c^1(C_n)$ 。若 $d(u, v) > 2$,如图 5(b),选择点 u 或 v 作为火源, G_2 不连通,因此 $2 = b_c^2(C_n + uv) < b_c^2(C_n)$ 。

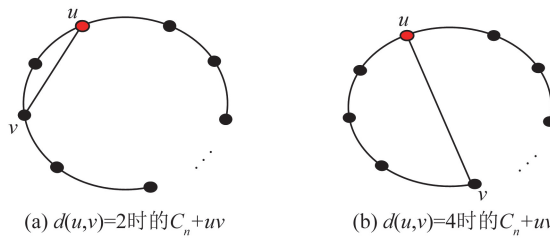


图 5 添加边 uv 后的 C_n
Fig.5 The graph of adding edge uv to C_n

当 $l=2$ 时,显然 $b_c^2(C_n + uv) = 1 = b_c^2(C_n)$ 。

若点 u, v 都不在 G 的最佳火源中,由定理 13 的情形 1,有 $b_c^l(P_n + uv) > b_c^l(P_n)$,而对于图 6,有 $b_c^1(G) = 4$, $b_c^1(G + uv) = 3$,即 $b_c^1(G + uv) < b_c^1(G)$ 。以上两个例子表明,在 G 中的不相邻点 u, v (都不在最佳火源中)之间添加 1 条边后,多火源燃烧连通度的变化没有明显规律,故定理 15 中只讨论 u, v 中至少有 1 点在最佳火源中的情形。

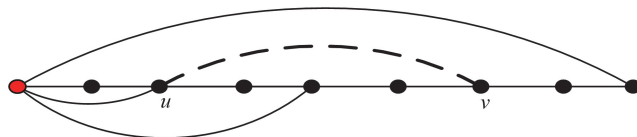


图 6 G 添加边 uv 后得到的图
Fig.6 The graph of adding edge uv to G

定理 15 设 G 是 n 阶连通图,则 $b_c^l(G + uv) \leq b_c^l(G)$, 其中 $G + uv$ 表示在 G 的不相邻的点 u, v (至少有 1 点在最佳火源中)之间添加 1 条边得到的图。

证明 设火源顶点数为 l 时 G 的最佳火源为 B^* , G 中第 $m (\geq 2)$ 步燃烧的点集为 B_m , $G + uv$ 中第 m 步燃烧的点集为 B'_m 。若 u, v 至少有 1 点在最佳火源 B^* 中,则对于 $G + uv$,由定义 1 中燃烧规则可知, $|B'_m| \geq$

$|B_m|$,因此 $b_c^l(G+uv) \leq b_c^l(G)$ 。

对于一般的图,文献[3]中给出了多火源燃烧连通度的一个下界,以下讨论该参数的上界。

定义 4^[7] 设 G 是连通图, $v \in V(G)$, 称 $e_G(v) = \max \{d_G(u, v) : v \in V(G)\}$ 为 v 的离心率, $\text{rad}(G) = \min \{e_G(v) : v \in V(G)\}$ 被称为 G 的半径。

定理 16 设 G 是一个半径为 r 的 n 阶连通图, 则有 $b_c^l(G) \leq r+1$ 。

证明 以 G 的中心点为火源, 经过 $m=r+1$ 步燃烧, 剩余子图 G_m 为 \emptyset , 即 $b_c^l(G) \leq r+1$, 又由引理 1, 显然, $b_c^l(G) \leq r+1$, 定理 16 得证。

对于 $n(\geq 3)$ 阶圈 C_n , 等号成立, 这表明, 定理 16 中上界可以达到。

定理 17 设 G 是 n 阶 k 正则连通图, 则有 $b_c^l(G) \leq n-k+1$ 。

证明 设 $l=1$ 时, 以 G 中任意 1 点为火源, 燃烧序列为 B_1, B_2, \dots, B_m 。因为 G 是 k 正则图, 所以有 $|B_1|=1, |B_2|=k$, 若剩余子图 G_2 仍然连通, 则剩余点的个数为 $n-k-1$, 因此, 至少经过 $m=n-k+1$ 步, 有 $G_m = \emptyset$, 即 $b_c^l(G) \leq n-k+1$, 又由引理 1, 有 $b_c^l(G) \leq n-k+1$, 定理 17 得证。

对于完全图 K_n , 等号成立, 这表明, 定理 17 中上界可以达到。

3 多火源燃烧连通度的反问题

这一部分提出多火源燃烧连通度的反问题, 并设计了求图的最小火源算法。

问题 对于给定的非完全连通图 G 和整数 $m(\geq 1)$, 找出火源 S , 使得图 G 至多经过 m 步燃烧后剩余子图 $G_m = \emptyset$ 或不连通, 且 S 所含顶点数尽可能少, 称满足上述条件的火源为最小火源, 记为 S^* (可能不唯一), 所含顶点数为 $l^*(G, m)$, 即 $l^*(G, m) = |S^*|$ 。

对于非完全连通图 G , 显然有: (i) 当 $m_2 \geq m_1$ 时, $l^*(G, m_2) \leq l^*(G, m_1)$; (ii) 当 $m=1$ 时, G 的最小点割即为 S^* , 且 $l^*(G, 1) = \kappa(G) = |S^*|$, 故以下算法针对 $m \geq 2$ 的情形。由 (i) 可知, 求最小火源只需考虑点数不超过 $\kappa(G)$ 的 $V(G)$ 的 (非空) 子集。

求图的最小火源算法。

输入 连通图 $G=(V, E)$, 正整数 $m(\geq 2)$ 。

输出 G 的最小火源 S^*, l^* 。

- (1) 计算 $V(G)$ 的所有包含 i 个点的子集的集合, 记为 $\mathcal{R}_i, i=1, 2, \dots, \kappa$ 。
- (2) 置 $i:=1, j:=1, S^* := \emptyset$
- (3) while $S^* = \emptyset$
- (4) while $\mathcal{R}_i \neq \emptyset$ do
- (5) 选择 \mathcal{R}_i 中的 X_{ij}
- (6) if $\omega(G_m(i, j)) \geq 2$ 或 $G_m(i, j) = \emptyset$, then
- (7) $l_{ij} = i, S^* = X_{ij}$
- (8) end if
- (9) $j:=j+1$
- (10) end while
- (11) $i:=i+1$
- (12) end while
- (13) return $l_{ij} = l^*, S^*$

注 2 $\kappa = \kappa(G)$ 。 $X_{ij} \in \mathcal{R}_i, j=1, 2, \dots, C_n^i$ 。 $G_m(i, j)$ 表示以 X_{ij} 为火源, 燃烧 m 步后的剩余子图。

例 1 求图 7 中图 G 的最小火源。

记 $V(G)$ 的所有包含 $i(\leq 4)$ 个点的集合为 $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_3, \mathcal{R}_4$ 。当 $m=2$ 时, 选择集合 $\mathcal{R}_1, G_2(1, j)$ 是连通的, 其中 $j=1, 2, \dots, 8$ 。选择集合 $\mathcal{R}_2, G_2(2, j)$ 是 1 个孤立点或为空集, 其中, $j=1, 2, \dots, 28$, 因此 $l^*(G, 2) = 2$,

任意不相邻的 2 点均为最小火源。

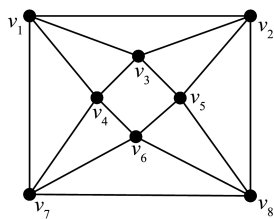


图 7 图 G

Fig.7 The graph G

当 $m=3$ 时,选择集合 $\mathcal{X}_1, G_3(1, j) = \emptyset$, 其中 $j=1, 2, \dots, 8$, 因此, $l^*(G, 3) = 1$, 任意 1 点均为最小火源。

4 结论

本文考虑了几类笛卡尔积图的多火源燃烧连通度的计算,通过删掉一点(边)或添加一条边后多火源燃烧连通度大小的变化,以及参数上界的估计,讨论多火源燃烧连通度与图结构的关系。一般情形下,点数和边数的变化会引起参数的变化,而且没有确定性的规律。在多数情形下,边数的增加不会使参数值减小。多火源燃烧连通度反映了图结构上的差异,是一个区分度较好的网络抗毁性参数。

从网络攻击者的角度考虑,最佳火源是一个在火源中的点数(代表破坏的成本)给定条件下的“最佳破坏策略”,因此,提出的多火源燃烧连通度的反问题,具有一定的实际意义:正数 m 可以代表破坏目标,最小火源则是此目标下的“最佳破坏策略”。破坏目标和最小火源两个参数可以推广到赋权图,与实际情形更贴近。

参考文献:

- [1] 魏宗田,刘勇,杨威,等. 网络抗毁性[M]. 西安:西安交通大学出版社,2015:34-35.
WEI Zongtian, LIU Yong, YANG Wei, et al. Network invulnerability[M]. Xi'an: Xi'an Jiaotong University Press, 2015:34-35.
- [2] BONATO A, JANSSEN J, ROSHANBIN E. How to burn a graph[J]. Internet Mathematics, 2016, 12(1/2):85-100.
- [3] 白月蓉,魏宗田. 图的多火源燃烧连通度[J]. 纯粹数学与应用数学,2026,42(1):78-85.
BAI Yuerong, WEI Zongtian. Multi-fire source burning connectivity of graphs[J]. Pure and Applied Mathematics, 2026, 42(1):78-85.
- [4] 徐俊明. 图论及其应用[M]. 4版. 合肥:中国科学技术大学出版社,2018.
XU Junming. Theory and applications of graphs[M]. 4th ed. Hefei: University of Science and Technology of China Press, 2018.
- [5] BONDY J A, MURTY U S R. Graph theory[M]. London: Springer, 2008.
- [6] 梅银珍,符惠芬. 四类运算图的 Sombor 指数[J]. 山东大学学报(理学版),2024,59(6):56-63.
MEI Yinzhen, FU Huifeng. Sombor index on four operation graphs[J]. Journal of Shandong University(Natural Science), 2024, 59(6):56-63.
- [7] 薛睿滢,魏宗田,翟美娟. 图的限制性燃烧连通度[J]. 山东大学学报(理学版),2024,59(2):91-99.
XUE Ruiying, WEI Zongtian, ZHAI Meijuan. Restricted burning connectivity of graphs[J]. Journal of Shandong University(Natural Science), 2024, 59(2):91-99.

(编辑:陈丽萍)