山东大学学报(理学版)2026 年 4 月 第 61 卷 第 4 期
Journal of Shandong University(Natural Science), Vol.61, No.4, 2026 http://lxbwk.njournal.sdu.edu.cn

文章编号:1671-9352(2026)04-0019-06 DOI:10.6040/j.issn.1671-9352.0.2024.189

群代数 kA_4 的表示环的 $\mathbf{Z}_+$-模分类

孙华,王伟*,殷泽涛
(扬州大学数学科学学院, 江苏 扬州 225009)

摘要:设 k 是代数闭域,且 char$(k)\nmid 12$,记 $r(kA_4)$ 为群代数 kA_4 的表示环,本文对 $r(kA_4)$ 上所有的不可约 $\mathbf{Z}_+$-模分类,证明在等价意义下共有 9 个不可约 $\mathbf{Z}_+$-模。

关键词:群代数 kA_4;不可约 $\mathbf{Z}_+$-模;表示环;矩阵方程
中图分类号:O156 **文献标志码**:A
引用格式:孙华,王伟,殷泽涛. 群代数 kA_4的表示环的 $\mathbf{Z}_+$-模分类[J]. 山东大学学报(理学版),2026,61(4):19-24,36.

Classification of $\mathbf{Z}_+$-modules over the representation ring of group algebra kA_4

SUN Hua, WANG Wei*, YIN Zetao
(School of Mathematical Science, Yangzhou University, Yangzhou 225009, Jiangsu, China)

Abstract: Let k be an algebraically closed field with char$(k)\nmid 12$, denoted $r(kA_4)$ the representation ring of group algebra $r(kA_4)$. All irreducible $\mathbf{Z}_+$-modules over $r(kA_4)$ are classified. We prove that there are 9 non-equivalent irreducible $\mathbf{Z}_+$-modules.

Key words: group algebra kA_4; irreducible $\mathbf{Z}_+$-module; representation ring; matrix equation

0 引言

Heinz Hopf 在研究紧致 Lie 群的同调性质时提出的 Hopf 代数的概念,它是同时具有代数和余代数结构的代数系统。Hopf 代数的表示范畴是张量范畴,其表示环(Green 环,Grothendieck 环)是张量范畴中重要的不变量。对表示环性质的研究有助于张量范畴的分类。文献[1]研究群代数 kA_4 及其 Drinfeld double $D(kA_4)$的表示及其表示环,文献[2-4]研究群代数 Hopf-Ore 扩张的表示及表示环,文献[5-6]研究一类秩为 1 的 pointed Hopf 代数的表示和 Hopf 代数 A_τ 的有限维不可约表示。

Hopf 代数的表示环是一类环,而 $\mathbf{Z}_+$-环的表示,称之为 $\mathbf{Z}_+$-模。近期 $\mathbf{Z}_+$-模的研究也取得相当大的发展,如文献[7]证明对于给定的有限秩的 $\mathbf{Z}_+$-环,存在有限个互不等价的不可约 $\mathbf{Z}_+$-模。文献[8-11]证明一个具有固定 $\mathbf{Z}_+$-基的环的 $\mathbf{Z}_+$-模可以表示为一些非负整数矩阵,文献[12]研究一类 $\mathbf{Z}_+$-环的非负整数矩阵表示。本文则在文献[1]的基础上对 char$(k)\nmid 12$ 分类时,群代数 kA_4 表示环 $r(kA_4)$的 $\mathbf{Z}_+$-模。

本文通过将 $r(kA_4)$上不可约的 $\mathbf{Z}_+$-模等价于矩阵方程的非负整数矩阵解方式,发现 $n\leqslant 4$ 时的不可约 $\mathbf{Z}_+$-模可计算分类,且 $n\geqslant 5$ 时矩阵方程的无非负整数矩阵解,进而证明 $n\geqslant 5$ 时所有的 $\mathbf{Z}_+$-模都是可约的。本文先利用矩阵的方法对 $r(kA_4)$上的 $\mathbf{Z}_+$-模的秩 n 进行分类,分别求出 $n=1,2,3,4$ 时所有互不等价的不可约 $\mathbf{Z}_+$-模,然后通过分析 $\mathbf{Z}_+$-模结构的方式,得到 $M(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$仅可能有的 3 种模结构,证明 $n\geqslant 5$ 时所有的 $\mathbf{Z}_+$-模都是可约的,而文献[12-15]中利用矩阵计算等方式判断 $\mathbf{Z}_+$-模可约考虑的情形过多且无法完成本文中不可约的 $\mathbf{Z}_+$-模的分类,此技巧大大减少考虑的情形,优化之前已有的分类方法。

收稿日期:2024-05-28; **网络出版时间**:2025-09-01
基金项目:国家自然科学基金资助项目(12201545)
第一作者:孙华(1989—),男,讲师,博士研究生,研究方向为 Hopf 代数. E-mail:huasun@yzu.edu.cn
*通信作者:王伟(1999—),男,硕士研究生,研究方向为 Hopf 代数. E-mail:863551808@qq.com

1 预备知识

$\mathbf{N}$ 表示自然数集,$\mathbf{Z}_+$ 表示非负整数集,$M_n(\mathbf{N})$ 表示所有元素都为自然数的 n 阶方阵。设矩阵 $\boldsymbol{A}\in M_n(\mathbf{N})$,此时称 $\boldsymbol{A}$ 为非负整数矩阵,若 $\boldsymbol{A}$ 中每个元素都大于 0,称 $\boldsymbol{A}$ 为正矩阵。本文中的交错群 A_4 定义为 $A_4=\langle a,b\mid a^2=b^3=(ab)^3=1\rangle$。

定义 1[12] 设 $\mathfrak{R}$ 是一个环,作 $\mathbf{Z}_+$-模自由,则

(1) $\mathfrak{R}$ 的 $\mathbf{Z}_+$-是 $\beta=\{b_i\}_{i\in I}$,满足 $b_ib_j=\sum c_{ij}^k b_k$, $c_{ij}^k\in\mathbf{Z}_+$;

(2) $\mathbf{Z}_+$-环是一个具有固定 $\mathbf{Z}_+$-基的环,其单位元 1 是基元素的非负线性组合。

定义 2[12] 设 $\mathfrak{R}$ 是一个基为 $\{\|b_i\}_{i\in I}$ 的 $\mathbf{Z}_+$-环,则 $\mathfrak{R}$ 上的一个 $\mathbf{Z}_+$-模是一个具有固定 $\mathbf{Z}_+$-基 $\{m_l\}_{l\in J}$ 的 $\mathfrak{R}$-模 M,满足 $b_im_l=\sum\limits_k a_{il}^k m_k$,其中 a_{il}^k 为非负整数。

定义 3[12] 设 $\mathfrak{R}$ 是一个基为 $\{b_i\}_{i\in I}$ 的 $\mathbf{Z}_+$-环,且 $b_ib_j=\sum c_{ij}^k b_k$,对于 $\mathfrak{R}$ 上的一个 $\mathbf{Z}_+$-模 M,b_i 在基 $\{m_l\}_{l\in J}$ 下的矩阵记为 $\boldsymbol{M}_i$,则有 $\boldsymbol{M}_i\boldsymbol{M}_j=\sum\limits_k c_{il}^k\boldsymbol{M}_k$, $\mathfrak{R}$ 中的单位元对应恒等矩阵,$\mathbf{Z}_+$-模 M 的秩等于 $\boldsymbol{M}_i$ 的阶数。

定义 4[12] 设 $\boldsymbol{A}$ 是一个 n 阶方阵,如果存在一个 n 阶置换矩阵 $\boldsymbol{P}$ 满足 $\boldsymbol{PAP}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{A}_2 & \boldsymbol{A}_3\end{pmatrix}$,其中 $\boldsymbol{A}_1$ 是 k 阶方阵,$\boldsymbol{A}_3$ 是 $(n-k)$ 阶矩阵,则称 $\boldsymbol{A}$ 是可约矩阵。对于两个同阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$,若存在一个 n 阶置换矩阵 $\boldsymbol{P}$,满足

$$\boldsymbol{PAP}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{A}_2 & \boldsymbol{A}_3\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{PBP}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}_1 & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{B}_2 & \boldsymbol{B}_3\end{pmatrix},$$

其中,$\boldsymbol{A}_1$ 与 $\boldsymbol{B}_1$ 具有相同的阶数,$\boldsymbol{A}_3$ 与 $\boldsymbol{B}_3$ 具有相同的阶数,则称 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 同时可约。

定义 5[1] 群代数 kA_4 的表示环为 $r(kA_4)$,当 $\mathrm{char}(k)\nmid 12$ 时,群代数 kA_4 的表示环 $r(kA_4)$ 同构于 $\mathbf{Z}[x,y]/I$,其中 $I=(x^3-1,xy-y,y^2-1-x-x^2-2y)$。容易知道 $\{1,x,x^2,y\}$ 是 $r(kA_4)$ 的一组 $\mathbf{Z}_+$-基。由定义 4 可知当 $\mathrm{char}(k)\nmid 12$ 时,群代数 kA_4 的表示环 $r(kA_4)$ 的 $\mathbf{Z}_+$-模可由如下方式描述:

$$\begin{cases}\boldsymbol{A}^3=\boldsymbol{E},\\ \boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{B},\\ \boldsymbol{B}^2-\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^2-2\boldsymbol{B}=0,\end{cases}\tag{$*$}$$

$(*)$ 的非负整数矩阵解为 $M(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$,则 $r(kA_4)$ 上不可约的 $\mathbf{Z}_+$-模等价于 $(*)$ 的不可约 $M(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$。在接下来的讨论中,用 $(*)$ 的非负整数矩阵解表示 $r(kA_4)$ 的 $\mathbf{Z}_+$-模,记 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}^2$, $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}=(b_{ij})\in M_n(\mathbf{N})$。

定义 6[12] 设 $M(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$ 和 $M(\boldsymbol{A}',\boldsymbol{B}')$ 为 $r(kA_4)$ 的两个 $\mathbf{Z}_+$-模,若存在一个 n 阶置换矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使得 $\boldsymbol{PAP}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}'$, $\boldsymbol{PBP}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}'$,称 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{A}'$ 等价且 $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{B}'$ 等价,此时也称 $\mathbf{Z}_+$-模 $M(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$ 与 $M(\boldsymbol{A}',\boldsymbol{B}')$ 等价。

2 $n\leqslant 4$ 的不可约 $\mathbf{Z}_+$-模

本章将分类出 $\mathbf{Z}_+$-模的阶数 $n=1,2,3,4$ 时,$r(kA_4)$ 所有的不可约 $\mathbf{Z}_+$-模。

(Ⅰ) 当 $n=1$ 时的不可约 $\mathbf{Z}_+$-模:

设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in M_1(\mathbf{N})$ 是 $(*)$ 的解,此时 $r(kA_4)$ 的不可约 $\mathbf{Z}_+$-模为 $M_1(\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{B}_1)$,其中 $\boldsymbol{A}_1=1$, $\boldsymbol{B}_1=3$。

(Ⅱ) 当 $n=2$ 时的不可约 $\mathbf{Z}_+$-模:

设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in M_2(\mathbf{N})$ 是 $(*)$ 的解,根据 $\boldsymbol{A}^3=\boldsymbol{I}$,可知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$,记为 $\boldsymbol{A}_2$。令 $\boldsymbol{B}=(b_i)\in M_2(\mathbf{N})$,其中 $b_i\in\mathbf{N}$,$i=1,2,3,4$,满足

$$\begin{cases} b_1^2+b_2b_3=2b_1+3, \\ (b_1+b_4-2)b_2=0, \\ (b_1+b_4-2)b_3=0, \\ b_3b_2+b_4^2=2b_4+3。\end{cases} \tag{$**$}$$

情形 1　若 $b_1+b_4-2=0$，则 $b_1=b_4=1$，$b_1=0$，$b_4=2$ 或 $b_1=2$，$b_4=0$。

再由($**$)求得此时 $r(kA_4)$ 的不可约 $\mathbf{Z}_+$-模为 $M_2(\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{B}_2)$，$M_2(\boldsymbol{A}_2,\overline{\boldsymbol{B}}_2)$，$M_2(\boldsymbol{A}_2,\overline{\overline{\boldsymbol{B}}}_2)$，其中，$\boldsymbol{B}_2=\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}$，$\overline{\boldsymbol{B}}_2=\begin{pmatrix}0&3\\1&2\end{pmatrix}$，$\overline{\overline{\boldsymbol{B}}}_2=\begin{pmatrix}0&1\\3&2\end{pmatrix}$。

情形 2　若 $b_1+b_4-2\neq0$，$b_2=b_3=0$，则由文献[12]的定理 2.1 证明此时没有不可约解。

命题 1　当 $n=2$ 时，$r(kA_4)$ 的不可约 $\mathbf{Z}_+$-模为 $M_2(\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{B}_2)$，$M_2(\boldsymbol{A}_2,\overline{\boldsymbol{B}}_2)$，$M_2(\boldsymbol{A}_2,\overline{\overline{\boldsymbol{B}}}_2)$。

证明　由上述讨论可知，只须证明 $M_2(\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{B}_2)$，$M_2(\boldsymbol{A}_2,\overline{\boldsymbol{B}}_2)$，$M_2(\boldsymbol{A}_2,\overline{\overline{\boldsymbol{B}}}_2)$ 两两互不等价。因为 $\boldsymbol{B}_2$ 为对称矩阵，$\overline{\boldsymbol{B}}_2$ 与 $\overline{\overline{\boldsymbol{B}}}_2$ 为非对称矩阵，所以 $M_2(\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{B}_2)$ 与 $M_2(\boldsymbol{A}_2,\overline{\boldsymbol{B}}_2)$ 不等价，且 $M_2(\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{B}_2)$ 与 $M_2(\boldsymbol{A}_2,\overline{\overline{\boldsymbol{B}}}_2)$ 不等价。

因为 $\overline{\boldsymbol{B}}_2$ 与 $\overline{\overline{\boldsymbol{B}}}_2$ 均为 2 阶矩阵，而 2 阶置换矩阵只有 $\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$。显然，$\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\overline{\boldsymbol{B}}_2\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\neq\overline{\overline{\boldsymbol{B}}}_2$，所以 $M_2(\boldsymbol{A}_2,\overline{\boldsymbol{B}}_2)$ 与 $M_2(\boldsymbol{A}_2,\overline{\overline{\boldsymbol{B}}}_2)$ 不等价。证毕。

(Ⅲ) 当 $n=3$ 时的不可约 $\mathbf{Z}_+$-模：

设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in M_3(\mathbf{N})$ 是($*$)的解，由 $\boldsymbol{A}^3=\boldsymbol{I}$ 可知 $\boldsymbol{A}$ 在等价的意义下有两种情形：

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} \text{ 或 } \begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix},$$

分别记为 $\boldsymbol{A}_3$ 和 $\boldsymbol{A}_3'$。

情形 1　当 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}_3$ 时，根据($*$)的关系式，得 $\boldsymbol{B}$ 的所有不可约解为

$$\boldsymbol{B}_3=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\2&2&1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}_3'=\begin{pmatrix}0&1&1\\2&1&2\\1&1&0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}_3''=\begin{pmatrix}1&2&2\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix},$$

$$\overline{\boldsymbol{B}}_2=\begin{pmatrix}0&1&2\\1&0&2\\1&1&1\end{pmatrix},\quad \overline{\overline{\boldsymbol{B}}}_2=\begin{pmatrix}0&2&1\\1&1&1\\1&2&0\end{pmatrix},\quad \overline{\overline{\overline{\boldsymbol{B}}}}_3=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&0&1\\2&1&0\end{pmatrix}。$$

由此得 6 个互不等价的 $\mathbf{Z}_+$-模，分别记为 $M(\boldsymbol{A}_3,\boldsymbol{B}_3)$、$M(\boldsymbol{A}_3,\boldsymbol{B}_3')$、$M(\boldsymbol{A}_3,\boldsymbol{B}_3'')$、$M(\boldsymbol{A}_3,\overline{\boldsymbol{B}}_2)$、$M(\boldsymbol{A}_3,\overline{\overline{\boldsymbol{B}}}_2)$、$M(\boldsymbol{A}_3,\overline{\overline{\overline{\boldsymbol{B}}}}_3)$。

命题 2　(1) 不可约 $\mathbf{Z}_+$-模 $M(\boldsymbol{A}_3,\boldsymbol{B}_3)$、$M(\boldsymbol{A}_3,\boldsymbol{B}_3')$、$M(\boldsymbol{A}_3,\boldsymbol{B}_3'')$ 相互等价；

(2) 不可约 $\mathbf{Z}_+$-模 $M(\boldsymbol{A}_3,\overline{\boldsymbol{B}}_3)$、$M(\boldsymbol{A}_3,\overline{\overline{\boldsymbol{B}}}_3)$、$M(\boldsymbol{A}_3,\overline{\overline{\overline{\boldsymbol{B}}}}_3)$ 相互等价。

证明　(1) 令 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{P}\boldsymbol{B}_3\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}_3'$。因此，$M(\boldsymbol{A}_3,\boldsymbol{B}_3)$ 与 $M(\boldsymbol{A}_3,\boldsymbol{B}_3'')$ 等价。

令 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{P}\boldsymbol{B}_3\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}_3'$。因此，$M(\boldsymbol{A}_3,\boldsymbol{B}_3)$ 与 $M(\boldsymbol{A}_3,\boldsymbol{B}_3'')$ 等价。

令 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{P}\boldsymbol{B}_3'\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}_3''$。因此，$M(\boldsymbol{A}_3,\boldsymbol{B}_3')$ 与 $M(\boldsymbol{A}_3,\boldsymbol{B}_3'')$ 等价。

(2) 可类似证明。证毕。

情形 2　当 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}_3'$ 时，此时根据 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{B}$，可设 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}m&m&m\\m&m&m\\m&m&m\end{pmatrix}$，$m\in\mathbf{N}$，将 $\boldsymbol{B}$ 代入等式 $\boldsymbol{B}^2=\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{B}$

并比较矩阵元素，得 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$，记为 $\hat{\boldsymbol{B}}_3$。

命题 3 当 $n=3$ 时，$r(kA_4)$ 的不可约 $\mathbf{Z}_+$-模为 $M_3(\boldsymbol{A}_3,\boldsymbol{B}_3)$，$M_3(\boldsymbol{A}_3,\overline{\boldsymbol{B}}_3)$，$M_3(\boldsymbol{A}'_3,\hat{\boldsymbol{B}}_3)$。

证明 由命题 2、情形 2 的讨论可知，只须证明 $M_3(\boldsymbol{A}_3,\boldsymbol{B}_3)$、$M_3(\boldsymbol{A}_3,\overline{\boldsymbol{B}}_3)$、$M_3(\boldsymbol{A}'_3,\hat{\boldsymbol{B}}_3)$ 互不等价。显然，$M_3(\boldsymbol{A}_3,\boldsymbol{B}_3)$ 与 $M_3(\boldsymbol{A}_3,\hat{\boldsymbol{B}}_3)$ 不等价且 $M_3(\boldsymbol{A}_3,\overline{\boldsymbol{B}}_3)$ 与 $M_3(\boldsymbol{A}'_3,\hat{\boldsymbol{B}}_3)$ 不等价。3 阶置换矩阵有 6 个，分别为

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}。$$

容易验证对任何的 3 阶置换矩阵 $\boldsymbol{P}$，$\boldsymbol{P}\boldsymbol{B}_3\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\neq\overline{\boldsymbol{B}}_3$。因此，$M_3(\boldsymbol{A}_3,\boldsymbol{B}_3)$、$M_3(\boldsymbol{A}_3,\overline{\boldsymbol{B}}_3)$、$M_3(\boldsymbol{A}'_3,\hat{\boldsymbol{B}}_3)$ 两两互不等价。证毕。

（Ⅳ）当 $n=4$ 时的不可约 $\mathbf{Z}_+$-模。

设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in M_4(\mathbf{N})$ 是（$*$）的解，根据 $\boldsymbol{A}^3=\boldsymbol{I}$ 可知 $\boldsymbol{A}$ 在等价的意义下有两种可能：

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}\text{ 或 }\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},$$

分别记为 $\boldsymbol{A}_4$ 和 $\boldsymbol{A}'_4$。

情形 1 当 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}_4$ 时，设 $B=(b_{ij})\in M_4(\mathbf{N})$，由等式 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{B}$，得

$$\begin{cases}b_{12}=b_{13}=b_{14},\\b_{21}=b_{31}=b_{41},\\b_{22}=b_{23}=b_{24}=b_{32}=b_{33}=b_{34}=b_{42}=b_{43}=b_{44},\end{cases}$$

代入 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{B}$，得

$$\begin{cases}b_{11}^2+b_{12}b_{21}+b_{13}b_{31}+b_{14}b_{41}-2b_{11}=3, & (1)\\b_{21}b_{12}+b_{22}^2+b_{23}b_{32}+b_{24}b_{42}-2b_{22}=1, & (2)\\b_{31}b_{13}+b_{32}b_{23}+b_{33}^2+b_{34}b_{43}-2b_{33}=1, & (3)\\b_{41}b_{14}+b_{42}b_{24}+b_{43}b_{34}+b_{44}^2-2b_{44}=1, & (4)\end{cases}$$

由式(1)可知 b_{11} 可能的取值为 0、1、2、3。

若 $b_{11}=0$，由式(1)可知 $3b_{12}b_{21}=3$，得 $b_{12}=b_{13}=b_{14}=b_{21}=b_{31}=b_{41}=1$，将其代入方程(2)得，解得 $b_{22}=\dfrac{2}{3}$，与 $b_{22}\in\mathbf{N}$ 矛盾，故 $b_{11}\neq1$。

若 $b_{11}=1$，同情形 1 的计算方法，得 $b_{12}b_{21}=\dfrac{4}{3}$，这与 $b_{12},b_{21}\in\mathbf{N}$ 矛盾 。

若 $b_{11}=2$，由式(1)可知 $3b_{12}b_{21}=3$，得 $b_{12}=b_{13}=b_{14}=b_{21}=b_{31}=b_{41}=1$，代入方程(2)得 $b_{22}=b_{23}=b_{24}=b_{32}=b_{33}=b_{34}=b_{42}=b_{43}=b_{44}=0$，则

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&1&1&1\\1&0&0&0\\1&0&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix},$$

记为 $\boldsymbol{B}_4$。

若 $b_{11}=3$ 时，式(1)可化为 $b_{12}b_{21}=0$，有 $b_{12}=b_{13}=b_{14}=0$ 或者 $b_{21}=b_{31}=b_{41}=0$ 二者之一成立，即有 $\boldsymbol{B}$ 为如下情况：

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}3&0&0&0\\ b_{21}&b_{22}&b_{23}&b_{24}\\ b_{31}&b_{32}&b_{33}&b_{34}\\ b_{41}&b_{42}&b_{43}&b_{44}\end{pmatrix}\text{或}\begin{pmatrix}3&b_{12}&b_{13}&b_{14}\\ 0&b_{22}&b_{23}&b_{24}\\ 0&b_{32}&b_{33}&b_{34}\\ 0&b_{42}&b_{43}&b_{44}\end{pmatrix},$$

分别记为 $\boldsymbol{B}_4'$ 和 $\boldsymbol{B}_4''$。

注意到 $(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{B}_4')^3=\begin{pmatrix}48&0&0&0\\ *&*&*&*\\ *&*&*&*\\ *&*&*&*\end{pmatrix}$，$(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{B}_4'')^3=\begin{pmatrix}48&*&*&*\\ 0&*&*&*\\ 0&*&*&*\\ 0&*&*&*\end{pmatrix}$,则 $M(\boldsymbol{A}_4,\boldsymbol{B}_4')$,$M(\boldsymbol{A}_4,\boldsymbol{B}_4'')$ 都是可约的,舍弃。

情形 2　当 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}_4'$ 时,同理可知此时的不可约解 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&1&1&1\\ 1&0&1&1\\ 1&1&0&1\\ 1&1&1&0\end{pmatrix}$,记为 $\overline{\boldsymbol{B}}_3$。

命题 4　当 $n=4$ 时,$r(kA_4)$ 的不可约 $\mathbf{Z}_+$-模为 $M_4(\boldsymbol{A}_4,\boldsymbol{B}_4)$,$M_4(\boldsymbol{A}_4',\overline{\boldsymbol{B}}_3)$。

证明　因为 $\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}_4)=1$, $\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}_4')=4$,所以 $M_4(\boldsymbol{A}_4,\boldsymbol{B}_4)$ 与 $M_4(\boldsymbol{A}_4',\overline{\boldsymbol{B}}_3)$ 不等价。证毕。

3　$n\geqslant 5$ 时的不可约 $\mathbf{Z}_+$-模

本节主要讨论 $n\geqslant 5$ 时 $r(kA_4)$ 上的不可约 $\mathbf{Z}_+$-模。

命题 5　当 $n\geqslant 5$ 时,所有的 $\mathbf{Z}_+$-模均是可约的。

证明　假设 $M(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$ 是 $r(kA_4)$ 上的一个不可约 $\mathbf{Z}_+$-模,因为 $\mathbf{Z}\mathbf{Z}_3=\mathbf{Z}1\oplus\mathbf{Z}x\oplus\mathbf{Z}x^2$ 是 $r(kA_4)$ 的一个 $\mathbf{Z}_+$-子环,则 $M(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$ 可视为 $\mathbf{Z}\mathbf{Z}_3$ 上的一个 $\mathbf{Z}_+$-子模,而 $\mathbf{Z}\mathbf{Z}_3$ 只有两个不可约模(不可分解模)$\mathbf{Z}1$ 和 $\mathbf{Z}\mathbf{Z}_3$,对 $M(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$ 结构做如下讨论。

情形 1　若 $M(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})\cong\underbrace{\mathbf{Z}1\oplus\mathbf{Z}1\oplus\cdots\oplus\mathbf{Z}1}_{n个}$(作为 $\mathbf{Z}\mathbf{Z}_3$ 的 $\mathbf{Z}_+$-模)。此时 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}_n$,并假设 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})\in M_n(\mathbf{N})$, $1\leqslant i, j\leqslant n$。由 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{I}_n$ 且 $b>0$, 有 $b_{ij}>0(i\neq j)$。由矩阵方程 $\boldsymbol{B}^2=\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{B}$,可得

$$\sum_{i=1}^{k}b_{si}b_{is'}=2b_{ss'}+\delta_{ss'}。$$

当 $s=s'$ 时,$b_{ss}^2+\sum\limits_{i\neq s}b_{si}b_{is}=2b_{ss}+3$,从而 $n<5$。

情形 2　若 $M(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})\cong\underbrace{\mathbf{Z}\mathbf{Z}_3\oplus\mathbf{Z}\mathbf{Z}_3\oplus\cdots\oplus\mathbf{Z}\mathbf{Z}_3}_{n个}$(作为 $\mathbf{Z}\mathbf{Z}_3$ 的 $\mathbf{Z}_+$-模)。

令 $\boldsymbol{I}'=\begin{pmatrix}0&0&1\\ 1&0&0\\ 0&1&0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{I}''=\begin{pmatrix}0&1&0\\ 0&0&1\\ 1&0&0\end{pmatrix}$,此时 $\boldsymbol{CA}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}'&\boldsymbol{O}&\boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O}&\ddots&\boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O}&\boldsymbol{O}&\boldsymbol{I}'\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{A}^2=\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}''&\boldsymbol{O}&\boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O}&\ddots&\boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O}&\boldsymbol{O}&\boldsymbol{I}''\end{pmatrix}$。

令 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}_{11}&\cdots&\boldsymbol{B}_{1n}\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ \boldsymbol{B}_{n1}&\cdots&\boldsymbol{B}_{nn}\end{pmatrix}$,根据 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{B}$,可知 $\boldsymbol{B}_{ij}=a_{ij}\boldsymbol{\Delta}$, $1\leqslant i, j\leqslant n$,其中 $\boldsymbol{\Delta}=\begin{pmatrix}1&1&1\\ 1&1&1\\ 1&1&1\end{pmatrix}$, $a_{ij}\in\mathbf{N}$。由 $b>0$ 可知 $\boldsymbol{B}_{ij}>0(i\neq j)$,即 $a_{ij}>0(i\neq j)$。考虑 $\sum\limits_{i=1}^{k}\boldsymbol{B}_{si}\boldsymbol{B}_{is'}=2\boldsymbol{B}_{ss'}+\boldsymbol{\Delta}_{ss'}$,其中 $\boldsymbol{\Delta}_{ss'}=\begin{cases}\boldsymbol{\Delta}, & s=s'\\ \boldsymbol{O}, & s\neq s'\end{cases}$。当 $s=s'$ 时,则

$$(\boldsymbol{B}_{ss})^2+\sum_{i\neq s}\boldsymbol{B}_{si}\boldsymbol{B}_{is}=2\boldsymbol{B}_{ss}+\boldsymbol{\Delta}_{ss}。$$

考虑该矩阵方程左右各个位置分量的值,得

$$3a_{ss}^2+3\sum_{i\neq s}a_{si}a_{is}=2a_{ss}+1。$$

因为 a_{ss} 是正整数，所以 $n=1$。

情形 3　若 $M(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})\cong\underbrace{\mathbf{Z}1\oplus\mathbf{Z}1\oplus\cdots\oplus\mathbf{Z}1}_{k_1个}\oplus\underbrace{\mathbf{ZZ}_3\oplus\mathbf{ZZ}_3\oplus\cdots\oplus\mathbf{ZZ}_3}_{k_2个}$（作为 $\mathbf{ZZ}_3$ 的 $\mathbf{Z}_+$-模），满足 $n=k_1+k_2$。

此时 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_{k_1} & \boldsymbol{O} & \cdots & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I}' & \cdots & \boldsymbol{O}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \cdots & \boldsymbol{I}'\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_{k_1} & \boldsymbol{O} & \cdots & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I}'' & \cdots & \boldsymbol{O}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \cdots & \boldsymbol{I}''\end{pmatrix}$，根据等式 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{B}$，有 $\boldsymbol{B}_{ij}=a_{ij}\boldsymbol{\Delta}$，$2\leqslant i, j\leqslant n$，其中 $\boldsymbol{\Delta}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$，$a_{ij}\in\mathbf{N}$。由 $b>0$，得

（1）$\boldsymbol{B}_{11}$ 的非对角线元素都是正整数；

（2）对于任意的 $1\leqslant i\neq j\leqslant k$，$\boldsymbol{B}_{ij}$ 都是正矩阵，即 $\boldsymbol{B}_{ij}>0$。

考虑矩阵方程 $\boldsymbol{B}^2=\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{B}$ 左右两边第 s 行 s' 列的分块，得

$$\sum_{i=1}^{k}\boldsymbol{B}_{si}\boldsymbol{B}_{is'}=2\boldsymbol{B}_{ss'}+\boldsymbol{\delta}_{ss'},\tag{5}$$

其中 $\boldsymbol{\delta}_{ss'}=\begin{cases}3\boldsymbol{I}, & s=s'=1\\ \boldsymbol{I}, & s=s'\neq 1\\ \boldsymbol{O}, & s\neq s'\end{cases}$。

当 $s=s'\neq 1$ 时，式(5)变为 $(\boldsymbol{B}_{ss})^2+\sum\limits_{i\neq s}\boldsymbol{B}_{si}\boldsymbol{B}_{is}=2\boldsymbol{B}_{ss}+\boldsymbol{I}$，其第 1 行第 1 列的元素满足 $3a_{ss}^2+3\sum\limits_{i\neq s}a_{si}a_{is}=2a_{ss}+1$。若 $k_2\geqslant 2$，则等式左边 $\geqslant 3a_{ss}^2+3>2a_{ss}+1$ 矛盾，故 $k_2=1$。

当 $s=s'=1$ 时，式(5)变为

$$(\boldsymbol{B}_{11})^2+\sum_{i\neq s}\boldsymbol{B}_{1i}\boldsymbol{B}_{i1}=2\boldsymbol{B}_{11}+3\boldsymbol{I}。\tag{6}$$

设 $\boldsymbol{B}_{11}=(b_{ij})\in M_{k_1}(\mathbf{N})$ 是一个 k_1 阶方阵，则

（1）如果 $k_1\geqslant 3$，考虑式(6)两边第 1 行第 1 列元素，得 $k_1\leqslant 2$。

（2）如果 $k_1=2$，考虑式(6)两边第 1 行第 1 列元素，得 $b_{11}=b_{12}=b_{21}=1$。

考虑式(6)两边第 1 行第 2 个元素，得左边 $=b_{11}b_{12}+b_{12}b_{22}+3=4+b_{22}$，右边 $=2$，显然左边 $>$ 右边，矛盾。综上，$k_1=1$，从而 $n<5$。证毕。

定理 1　群代数 kA_4 的表示环 $r(kA_4)$ 上的所有互不等价的不可约 $\mathbf{Z}_+$-模为

$$M_1(\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{B}_1), M_2(\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{B}_2), M_2(\boldsymbol{A}_2,\overline{\boldsymbol{B}}_2), M_2(\boldsymbol{A}_2,\overline{\overline{\boldsymbol{B}}}_2), M_3(\boldsymbol{A}_3,\boldsymbol{B}_3), M_3(\boldsymbol{A}_3,\overline{\boldsymbol{B}}_3),$$
$$M_3(\boldsymbol{A}_3',\hat{\boldsymbol{B}}_3), M_4(\boldsymbol{A}_4,\boldsymbol{B}_4), M_4(\boldsymbol{A}_4',\overline{\boldsymbol{B}}_4)。$$

证明　由命题 1、2、3、4、5 可得。证毕。

参考文献：

[1] 叶舒依. 量子偶 $D(kA_4)$ 的表示环[D]. 扬州：扬州大学，2020.
YE Shuyi. The representation rings of Drinfeld double $D(kA_4)$[D]. Yangzhou: Yangzhou University, 2020.

[2] SUN Hua, CHEN Huixiang. Green ring of the category of weight modules over the Hopf-Ore extensions of group algebras[J]. Communications in Algebra, 2018, 47(11):4441-4461.

[3] SUN Hua, CHEN Huixiang. Tensor product decomposition rules for weight modules over the Hopf-Ore extensions of group algebras[J]. Communications in Algebra, 2018, 46(4):1586-1613.

[4] SUN Hua, CHEN Huixiang, ZHANG Yinhuo. Representations of Hopf-Ore extensions of group algebras[J]. Algebra and Represent Theory, 2023, 26(5):1441-1463.

[5] WANG Zhihua, LI Libin, ZHANG Yinhuo. Green rings of pointed rank one Hopf algebras of nilpotent type[J]. Algebra and Represent Theory, 2014, 17(6):1901-1924.

（下转第 36 页）