山东大学学报(理学版)2026 年 4 月 第 61 卷 第 4 期
Journal of Shandong University(*Natural Science*), Vol.61, No.4, 2026 http://lxbwk.njournal.sdu.edu.cn

文章编号:1671-9352(2026)04-0013-06 DOI:10.6040/j.issn.1671-9352.0.2024.158

n-外角范畴的泛扩张

何健[1],何婧[2],周潘岳[3*]
(1.兰州理工大学理学院, 甘肃 兰州 730050; 2.湖南工商大学数学与统计学院, 湖南 长沙 410205; 3.长沙理工大学数学与统计学院, 湖南 长沙 410114)

摘要:假设($\mathscr{C}$,E,s)是 n-外角范畴,给出半泛扩张和泛扩张的定义,证明 $\mathscr{C}$ 中半泛扩张总是存在的,对于泛扩张的存在性给出一个充分必要条件,推广外部三角范畴中的相关结论。
关键词:n-外角范畴;半泛扩张;泛扩张;投射盖
中图分类号:O154 **文献标志码**:A
引用格式:何健,何婧,周潘岳.n-外角范畴的泛扩张[J]. 山东大学学报(理学版),2026,61(4):13-18.

Universal extensions in n-exangulated categories

HE Jian[1], HE Jing[2], ZHOU Panyue[3*]
(1. School of Science, Lanzhou University of Technology, Lanzhou 730050, Gansu, China; 2. School of Mathematics and Statistics, Hunan University of Technology and Business, Changsha 410205, Hunan, China; 3. School of Mathematics and Statistics, Changsha University of Science and Technology, Changsha 410114, Hunan, China)

Abstract: Let ($\mathscr{C}$,E,s) be an n-exangulated category. The notions of semi-universal extensions and universal extensions are introduced. It is shown that semi-universal extensions always exist. A necessary and sufficient condition of the existence of universal extensions is given. The results generalize some conclusions in extriangulated categories.
Key words: n-exangulated category; semi-universal extension; universal extension; projective cover

0 引言

作为外部三角范畴[1]的高维版本, Herschend 等[2]给出 n-外角范畴的定义,(n+2)-角范畴和 n-正合范畴都是 n-外角范畴;胡江胜等[3]通过 n-真类构造 n-外角范畴的例子;Herschend 等[4]通过 n-丛倾斜子范畴构造 n-外角范畴的例子;说明不是(n+2)-角范畴也不是 n-正合范畴的 n-外角范畴是大量存在的。陈小伍[5]在阿贝尔范畴中引入泛扩张的定义,研究泛扩张和特殊的 Auslander 双射之间的关系。陈浩等[6]在外部三角范畴中引入泛扩张的定义,并研究泛扩张相关性质。本文将文献[6]中的部分结果推广至高维情形——n-外角范畴的框架,不仅覆盖外部三角范畴的相关结果,而且应用到(n+2)-角范畴和 n-阿贝尔范畴并得到一些新的结论。

1 预备知识

n-外角范畴的相关定义参考文献[2]。假设 $\mathscr{C}$ 是加法范畴,Ab 是阿贝尔群范畴,E:$\mathscr{C}^{\mathrm{op}}\times\mathscr{C}\to$Ab 是加法

收稿日期:2024-05-07; **网络出版时间**:2025-07-09
基金项目:甘肃省青年科技基金资助项目(23JRRA825); 湖南省教育厅科学研究项目优秀青年基金资助项目(24B0573); 湖南省教育厅科学研究项目重点资助项目(24A0221); 国家自然科学基金资助项目(12401045)
第一作者:何健(1991—),男,副教授,博士,研究方向为同调代数. E-mail:jianhe30@163.com
* **通信作者**:周潘岳(1986—),男,教授,博士,研究方向为代数表示论. E-mail:panyuezhou@163.com

双函子,对于任意对象 $A,C\in\mathscr{C}$,称 $\delta\in E(C,A)$ 为 E-扩张(简称扩张)。对于任意的 $a\in\mathscr{C}(A,A')$, $c\in\mathscr{C}(C',C)$,有交换图

$$\begin{array}{ccc} E(C,A) & \xrightarrow{E(C,a)} & E(C,A') \\ \downarrow E(c,A) & \searrow^{E(c,a)} & \downarrow E(c,A') \\ E(C',A) & \xrightarrow{E(C',a)} & E(C',A'), \end{array}$$

$a_*\delta$ 和 $c^*\delta$ 分别表示 $E(C,a)(\delta)$ 和 $E(c,A)(\delta)$。

假设${}_A\delta_C$ 和${}_{A'}\delta_{C'}$是 E-扩张,$a\in\mathscr{C}(A,A')$, $c\in\mathscr{C}(C',C)$。若满足 $a_*\delta=c^*\delta'$,则称$(a,c):\delta\to\delta'$为 E-扩张之间的态射,由 E 的函子性推出 $E(c,a)(\delta)=a_*(c^*\delta)=c^*(a_*\delta)$。

定义 1[2] 假设 $C_{\mathscr{C}}$ 是 $\mathscr{C}$ 上的复形范畴,$C_{\mathscr{C}}^{n+2}$ 表示 $C_{\mathscr{C}}$ 的满子范畴,对象是形如下面的复形

$$X^\bullet=\{X_i,d_i^X\}:X_0\xrightarrow{d_0^X}X_1\xrightarrow{d_1^X}X_2\xrightarrow{d_2^X}\cdots\longrightarrow X_{n-1}\xrightarrow{d_{n-1}^X}X_n\xrightarrow{d_n^X}X_{n+1},$$

$f^\bullet=(f^0,f^1,\cdots,f^{n+1})$简记态射$f^\bullet:X^\bullet\to Y^\bullet$。

定义 2[2] 假设 s 是 E 的一个正合实现,则有

(1) 若 n-外角$\langle X^\bullet,\delta\rangle$满足 $s(\delta)=[X^\bullet]$,则称 $X^\bullet$ 是 s-distinguished n-外角(简称为 distinguished n-外角)。

(2) 若对象$X^\bullet\in C_{\mathscr{C}}^{n+2}$对应某个扩张 $\delta\in E(C,A)$,则称 $X^\bullet$ 是一个 s-conflation(简称为 conflation)。

(3) 若 $\mathscr{C}$ 中的态射 f 诱导出某个 conflation $X^\bullet\in C_{\mathscr{C}}^{n+2}$ 满足 $d_X^0=f$,则称 f 是一个 s-inflation(简称为 inflation)。

(4) 若 $\mathscr{C}$ 中的态射 f 诱导出某个 conflation $X^\bullet\in C_{\mathscr{C}}^{n+2}$ 满足 $d_X^n=g$,则称 g 是一个 s-deflation(简称为 deflation)。

定义 3[2] 假设 $\mathscr{C}$是加法范畴,$E:\mathscr{C}^{\mathrm{op}}\times\mathscr{C}\to\mathrm{Ab}$ 是加法双函子,s 是 E 的正合实现,若三元组$(\mathscr{C},E,s)$满足如下条件,则称$(\mathscr{C},E,s)$是 n-外角范畴:

(EA1) 假设 $A\xrightarrow{f}B\xrightarrow{g}C$ 是 $\mathscr{C}$ 中的态射序列,若 f 和 g 是 inflations,那么 $g\circ f$ 也是 inflation。对偶地,若 f 和 g 是 deflations,那么 $g\circ f$ 也是 deflation。

(EA2) 假设 $\rho\in E(D,A)$, $c\in\mathscr{C}(C,D)$, ${}_A\langle X^\bullet,c^*\rho\rangle_C$ 和${}_A\langle Y^\bullet,\rho\rangle_D$ 是 2 个 distinguished n-外角,那么(id_A,c)有一个 good 提升 $f^\bullet$,映射锥$\langle M_f^\bullet,(d_0^X)_*\rho\rangle$是一个 distinguished n-外角。

(EA2$^{\mathrm{op}}$) 对偶于(EA2)。

注 1 (1) 当 $n=1$ 时,$(\mathscr{C},E,s)$是 1-外角范畴当且仅当它是外部三角范畴。

(2) 由文献[2]知,$(n+2)$-角范畴和 n-正合范畴都是 n-外角范畴,也存在既不是$(n+2)$-角范畴也不是 n-正合范畴的 n-外角范畴的例子,参考文献[3-4,7-8]。

2 主要结果

若没特别说明,总假设$(\mathscr{C},E,s)$是 n-外角范畴,对于任意 $C\in\mathscr{C}$, $\Gamma(C)$表示 C 的自同态环$\mathrm{End}_{\mathscr{C}}(C)$。

2.1 n-外角范畴中半泛扩张

假设 $X,Y\in\mathscr{C}$,易知$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(Y,X)$具有自然的 $\Gamma(X)$-模结构,$E(Y,X)$也是 $\Gamma(X)$-模,其中模结构通过 $f\cdot\delta:=f_*\delta=E(Y,f)(\delta)$给出。

任意 E-扩张 $\delta\in E(Y,X)$诱导出一个自然变换$\delta^\#:\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X,-)\to E(Y,-)$。特别地,对于任意的 $Z\in\mathscr{C}$,存在一个 $\Gamma(Z)$-模之间的态射$\delta^\#:\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X,Z)\to E(Y,Z):f\mapsto f_*\delta$,因此 $\mathrm{Im}\,\delta_Z^\#$ 是 $E(Y,Z)$的 $\Gamma(Z)$-子模。

易知$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(-,X):\mathrm{add}\,X\to\Gamma(X)$-proj 是一个等价,其中 add X 表示由 X 的有限直和的直和项构成的 $\mathscr{C}$ 的满子范畴,$\Gamma(X)$-proj 表示有限生成投射 $\Gamma(X)$-模构成的子范畴。对于任意的 $X\in\mathrm{add}\,Z$,存在自然同构

$$E(Y,X)\to\mathrm{Hom}_{\Gamma(Z)}(\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X,Z),E(Y,Z)):\delta\mapsto\delta_z^\#,\tag{1}$$

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(Y,X)\to\mathrm{Hom}_{\Gamma(Z)}(\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X,Z),\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(Y,Z)):f\mapsto\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(f,Z)。\tag{2}$$

引理 1　假设 K, Y 是 $\mathscr{C}$ 中对象，对于 distinguished n-外角

$$K_0 \to K_1 \to K_2 \to \cdots \to K_{n-1} \to K_n \xrightarrow{\alpha_1} Y \xrightarrow{\delta_1},$$
$$N_0 \to N_1 \to N_2 \to \cdots \to N_{n-1} \to N_n \xrightarrow{\alpha_2} Y \xrightarrow{\delta_2},$$

考虑条件(1) 存在态射 $v: K_n \to N_n$，使得 $\alpha_1 = \alpha_2 v$；(2) 存在态射 $u: K_0 \to N_0$，使得 $\delta_2 = u_* \delta_1$；

(3) $\operatorname{Im} \delta_{2K}^{\#} \subseteq \operatorname{Im} \delta_{1K}^{\#}$，那么(1)$\Leftrightarrow$(2)$\Rightarrow$(3)，如果 $N_0 \in \operatorname{add} K$，那么(3)$\Rightarrow$(2)。

证明　(1)$\Rightarrow$(2)。假设存在态射 $v: K_n \to N_n$，使得 $\alpha_1 = \alpha_2 v$。由文献[2]中命题 3.6 的对偶性得交换图

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
K_0 & \to & K_1 & \to & K_2 & \to \cdots \to & K_{n-1} & \to & K_n & \xrightarrow{\alpha_1} & Y & \xrightarrow{\delta_1} & \\
\downarrow u & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow v & & \| & & \\
N_0 & \to & N_1 & \to & N_2 & \to \cdots \to & N_{n-1} & \to & N_n & \xrightarrow{\alpha_2} & Y & \xrightarrow{\delta_2} & ,
\end{array}$$

因此 $\delta_2 = u_* \delta_1$。

(2)$\Rightarrow$(1)。假设存在态射 $u: K_0 \to N_0$，使得 $\delta_2 = u_* \delta_1$，那么 $\mathrm{id}_Y^* \delta_2 = u_* \delta_1$，因此$(u, \mathrm{id}_Y)$是 δ_1 到 δ_2 的一个态射，通过(EA2$^{\mathrm{op}}$)得交换图

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
K_0 & \to & K_1 & \to & K_2 & \to \cdots \to & K_{n-1} & \to & K_n & \xrightarrow{\alpha_1} & Y & \xrightarrow{\delta_1} & \\
\downarrow u & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow v & & \| & & \\
N_0 & \to & N_1 & \to & N_2 & \to \cdots \to & N_{n-1} & \to & N_n & \xrightarrow{\alpha_2} & Y & \xrightarrow{\delta_2} & ,
\end{array} \tag{3}$$

因此 $\alpha_1 = \alpha_2 v$。

(2)$\Rightarrow$(3)。应用 $\operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(-, K)$ 作用在交换图(3)上，得交换图

$$\begin{array}{ccc}
\operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(K_0, K) & \xrightarrow{\delta_{1K}^{\#}} & E(Y, K) \\
\operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(u, K) \uparrow & & \| \\
\operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(N_0, K) & \xrightarrow{\delta_{2K}^{\#}} & E(Y, K),
\end{array}$$

因此 $\operatorname{Im} \delta_{2K}^{\#} \subseteq \operatorname{Im} \delta_{1K}^{\#}$。

(3)$\Rightarrow$(2)。考虑行正合的交换图

$$\begin{array}{ccccc}
\operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(K_0, K) & \xrightarrow{\delta_{1K}^{\#}} & \operatorname{Im} \delta_{1K}^{\#} & \to & 0 \\
 & & \uparrow & & \\
\operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(N_0, K) & \xrightarrow{\delta_{2K}^{\#}} & \operatorname{Im} \delta_{2K}^{\#} & \to & 0,
\end{array}$$

若 $N_0 \in \operatorname{add} K$，则 $\operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(N_0, K) \in \Gamma(K)$-投射，得交换图

$$\begin{array}{ccccc}
\operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(K_0, K) & \xrightarrow{\delta_{1K}^{\#}} & \operatorname{Im} \delta_{1K}^{\#} & \to & 0 \\
\uparrow \omega & & \uparrow & & \\
\operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(N_0, K) & \xrightarrow{\delta_{2K}^{\#}} & \operatorname{Im} \delta_{2K}^{\#} & \to & 0,
\end{array}$$

由(2)可知，存在 $u \in \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(K_0, N_0)$，使得 $\operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(u, K) = \omega$，故 $\delta_{2K}^{\#} = \delta_{1K}^{\#} \cdot \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(u, K)$，因此对任意 $f \in \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(N_0, K)$，$f^* \delta_2 = \delta_{2K}^{\#}(f) = (\delta_{1K}^{\#} \cdot \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(u, K))(f) = \delta_{1K}^{\#}(fu) = (fu)_* \delta_1 = f_* u_* \delta_1$。注意到 $N_0 \in \operatorname{add} K$，那么存在态射 $l_i: N_0 \to K$ 和 $p_i: K \to N_0$，$1 \leqslant i \leqslant n$，使得 $\mathrm{id}_{N_0} = \sum_{i=1}^{n} p_i l_i$，故得 $\delta_2 = \mathrm{id}_{N_0 *} \delta_2 = (\sum_{i=1}^{n} p_i l_i)_* \delta_2 = \sum_{i=1}^{n} p_{i*} l_{i*} \delta_2 = \sum_{i=1}^{n} p_{i*} l_{i*} u_* \delta_1 = (\sum_{i=1}^{n} p_i l_i)_* u_* \delta_1 = \mathrm{id}_{N_0 *} u_* \delta_1 = u_* \delta_1$。

命题 1　假设

$$K_0 \to K_1 \to K_2 \to \cdots \to K_{n-1} \to K_n \xrightarrow{\alpha_1} Y \xrightarrow{\delta_1},$$
$$N_0 \to N_1 \to N_2 \to \cdots \to N_{n-1} \to N_n \xrightarrow{\alpha_2} Y \xrightarrow{\delta_2}$$

是两个 distinguished n-外角，则下面结论成立：

(1) 如果 α_1 和 α_2 是右等价的，那么对于任意的 $Z \in \mathscr{C}$，$\operatorname{Im} \delta_{1Z}^{\#} = \operatorname{Im} \delta_{2Z}^{\#}$；

(2) 假设 $K_0, N_0 \in \operatorname{add} Z$，那么 α_1 和 α_2 是右等价的当且仅当对于任意的 $Z \in \mathscr{C}$，$\operatorname{Im} \delta_{1Z}^{\#} = \operatorname{Im} \delta_{2Z}^{\#}$。

证明　(1) 由引理 1 中(1)⇒(3)和其对偶得到。

(2) 由引理 1 中(1)⇔(3)和其对偶得到。

定义 4　假设 F 是 $E(Y,X)$ 的一个有限生成 $\Gamma(X)$-子模，$\delta\in E(Y,X_1)$，如果 $X_1\in \mathrm{add}\ X$ 并且 $\mathrm{Im}\ \delta_X^\#=F$，则称 E-扩张 δ 是 Y 通过 X 的一个半泛 F-扩张。

如果 $E(Y,X)$ 是一个有限生成 $\Gamma(X)$-模，则称一个半泛 $E(Y,X)$-扩张是 Y 通过 X 的一个半泛扩张。

注 2　当$(\mathscr{C},E,s)$是外三角范畴时，定义 4 和文献[6]中定义 3.4 是一致的。

下面定理证明半泛 F-扩张总是存在的。

定理 1　假设 F 是 $E(Y,X)$ 的有限生成 $\Gamma(X)$-子模，那么存在下面的 distinguished n-外角

$$X_0\to X_1\to X_2\to\cdots\to X_{n-1}\to X_n\to Y\xrightarrow{\delta},$$

满足 $X_0\in \mathrm{add}\ X$ 并且 $\mathrm{Im}\ \delta_X^\#=F$。

证明　F 是有限生成的，存在态射 $f:\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X_0,X)\to E(Y,X)$ 满足 $X_0\in\mathrm{add}\ X$ 并且 $\mathrm{Im}\ f=F$。由自然同构(1)，存在 E-扩张 $\delta\in E(Y,X_0)$ 满足 $\delta_X^\#=f$。假设 δ 对应的 distinguished n-外角

$$X_0\to X_1\to X_2\to\cdots\to X_{n-1}\to X_n\to Y\xrightarrow{\delta},$$

那么 $\mathrm{Im}\ \delta_X^\#=\mathrm{Im}\ f=F$。

注 3　假设

$$X_0\to X_1\to X_2\to\cdots\to X_{n-1}\to X_n\xrightarrow{\alpha}Y\xrightarrow{\delta},$$
$$X_0'\to X_1'\to X_2'\to\cdots\to X_{n-1}'\to X_n'\xrightarrow{\alpha'}Y\xrightarrow{\delta'}$$

是 2 个 distinguished n-外角，δ 是 Y 通过 X 的一个半泛 F-扩张，$X_0'\in\mathrm{add}\ X$。

(1) 据引理 1，α 通过 α' 分解当且仅当 $\mathrm{Im}\ \delta'^\#_X\subseteq F$。

(2) 如果 δ' 也是 Y 通过 X 的一个半泛 F-扩张，那么 α 和 α' 是右等价的，即存在态射 $u\in\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X_0,X_0')$，$u'\in\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X_0',X_0)$ 使得 $\delta'=u_*\delta$，$\delta=u'_*\delta'$，存在 distinguished n-外角的交换图

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
X_0 & \to & X_1 & \to & X_2 & \to\cdots\to & X_{n-1} & \to & X_n & \xrightarrow{\alpha} & Y & \xrightarrow{\delta} & \\
\downarrow u & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow v & & \| & & \\
X_0' & \to & X_1' & \to & X_2' & \to\cdots\to & X_{n-1}' & \to & X_n' & \xrightarrow{\alpha'} & Y & \xrightarrow{\delta'} & \\
\downarrow u' & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow v' & & \| & & \\
X_0 & \to & X_1 & \to & X_2 & \to\cdots\to & X_{n-1} & \to & X_n & \xrightarrow{\alpha} & Y & \xrightarrow{\delta} & 。
\end{array}$$

由注记 1、2，得下面推论。

推论 1[6]　假设$(\mathscr{C},E,s)$是外部三角范畴，F 是 $E(Y,X)$ 的有限生成 $\Gamma(X)$-子模，存在下面的 s-三角

$$X_0\to X_1\to Y\xrightarrow{\delta}$$

满足 $X_0\in\mathrm{add}\ X$ 并且 $\mathrm{Im}\ \delta_X^\#=F$。

2.2　n-外角范畴中泛扩张

对于 $E(Y,X)$ 的有限生成 $\Gamma(X)$-子模 F，引入泛 F-扩张的概念。假设 $\alpha:Z\to Y$ 是一个态射，如果 $\beta\in\mathrm{End}_{\mathscr{C}}(C)$ 满足 $\alpha\beta=\alpha$，那么 β 是自同构，则称 α 是右极小的。

引理 2　假设 $X_0\to X_1\to X_2\to\cdots\to X_{n-1}\to X_n\xrightarrow{\alpha}X_{n+1}\xrightarrow{\delta}$ 是一个 distinguished n-外角，下列说法等价：

(1) 若态射 $u\in\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X_0,X_0)$，满足 $u_*\delta=\delta$，那么 u 是自同构；

(2) $\Gamma(X_0)$-模之间的态射 $\delta_{X_0}^\#:\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X_0,X_0)\to E(X_{n+1},X_0)$ 是右极小的；

(3) 假设 $X_0\in\mathrm{add}\ X$，$\Gamma(X)$-模之间的态射 $\delta_X^\#:\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X_0,X)\to E(X_{n+1},X)$ 是右极小的。

证明　(1)⇒(2)。假设交换图

$$\begin{array}{ccc}
 & & \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X_0,X_0) \\
 & \swarrow\omega & \downarrow \delta_{X_0}^\# \\
\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X_0,X_0) & \xrightarrow{\delta_{X_0}^\#} & E(X_{n+1},X_0)
\end{array}$$

成立，由(2)知存在 $u\in\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X_0,X_0)$，使得 $\omega=\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(u,X_0)$，因此 $\delta_{X_0}^\#\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(u,X_0)=\delta_{X_0}^\#$，故得 $u_*\delta=\delta_{X_0}^\#(u)=(\delta_{X_0}^\#\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(u,X_0))(\mathrm{id}_{X_0})=\delta_{X_0}^\#(\mathrm{id}_{X_0})=\mathrm{id}_{X_0\,*}\delta=\delta$，由引理 2(1) 知 u 是自同构，因此 $\omega=\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(u,X_0)$ 也是自同

构,故 $\delta_{X_0}^{\#}$是右极小的。

(2)⇒(1)。假设态射 $u\in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X_0,X_0)$, 满足 $u_*\delta=\delta$。那么对任意 $f\in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X_0,X_0)$,有 $(\delta_{X_0}^{\#}\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(u,X_0))(f)=\delta_{X_0}^{\#}(\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(u,X_0)(f))=\delta_{X_0}^{\#}(fu)=(fu)_*\delta=f_*u_*\delta=f_*\delta=\delta_{X_0}^{\#}(f)$,因此 $\delta_{X_0}^{\#}\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(u,X_0)=\delta_{X_0}^{\#}$,由引理 2(2)知 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(u,X_0)$是自同构,因此 u 是自同构。

(1)⇒(3)。假设交换图

$$\begin{array}{ccc} & & \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X_0,X) \\ & \swarrow\omega & \downarrow\delta_X^{\#} \\ \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X_0,X) & \xrightarrow{\delta_X^{\#}} & E(X_{n+1},X)\end{array}$$

成立,由(2)知存在 $u\in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X_0,X_0)$,使得 $\omega=\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(u,X)$,因此对任意 $f\in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X_0,X)$,有 $f_*u_*\delta=(fu)_*\delta=\delta_X^{\#}(\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(u,X)f)=(\delta_X^{\#}\omega)(f)=(\delta_X^{\#})(f)=f_*\delta$。因为$X_0\in \mathrm{add}\ X$,所以存在态射 $l_i:X_0\to X$ 和 $p_i:X\to X_0$, $1\leqslant i\leqslant n$,使得 $\mathrm{id}_{X_0}=\sum\limits_{i=1}^{n}p_il_i$,得

$$\delta=\mathrm{id}_{X_0*}\delta=(\sum_{i=1}^{n}p_il_i)_*\delta=\sum_{i=1}^{n}p_{i*}(l_{i*}\delta)=\sum_{i=1}^{n}p_{i*}(l_{i*}u_*\delta)=(\sum_{i=1}^{n}p_il_i)_*u_*\delta_1=\mathrm{id}_{X_0*}u_*\delta_1=u_*\delta,$$

因此由引理 2(1)得 u 是自同构,那么 ω 是自同构,故 $\delta_X^{\#}$ 是右极小的。

(3)⇒(1)。假设态射 $u\in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X_0,X_0)$,满足 $u_*\delta=\delta$,那么对任意 $f\in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X_0,X)$,有 $(\delta_X^{\#}\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(u,X))(f)=\delta_X^{\#}(\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(u,X)(f))=\delta_X^{\#}(fu)=(fu)_*\delta=f_*u_*\delta=f_*\delta=\delta_X^{\#}(f)$,因此 $\delta_X^{\#}\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(u,X)=\delta_X^{\#}$。由引理 2(3)知 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(u,X)$是自同构,因此 u 是自同构。

注 4　假设$(\mathscr{C},E,s)$是外部三角范畴,$X_0\to X_1\xrightarrow{\alpha}Y\xrightarrow{\delta}$是一个 s-三角,引理 2 中的等价条件和 α 是右极小的是等价的。事实上,若态射 $u\in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X_0,X_0)$,满足 $u_*\delta=\delta$,那么 $u_*\delta=\mathrm{id}_Y^*\delta$,有 s-三角的交换图

$$\begin{array}{ccccccc} X_0 & \to & X_1 & \xrightarrow{\alpha} & Y & \xrightarrow{\delta} & \\ \downarrow u & & \downarrow v & & \| & & \\ X_0 & \to & X_1 & \xrightarrow{\alpha} & Y & \xrightarrow{\delta} & \end{array}$$

因此 $\alpha=\alpha v$。若 α 是右极小的,那么 v 是自同构,故 u 也是自同构。反之,对于任意态射 $v\in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X_1,X_1)$,满足 $\alpha v=\alpha$,那么有 s-三角的交换图

$$\begin{array}{ccccccc} X_0 & \to & X_1 & \xrightarrow{\alpha} & Y & \xrightarrow{\delta} & \\ \downarrow u & & \downarrow v & & \| & & \\ X_0 & \to & X_1 & \xrightarrow{\alpha} & Y & \xrightarrow{\delta} & \end{array}$$

说明 $u_*\delta=\delta$。若 u 是自同构,那么 v 是自同构,故 α 是右极小的。

定义 5　假设 F 是 $E(Y,X)$的一个有限生成 $\Gamma(X)$-子模,若一个 distinguished n-外角

$$(X^{\bullet},\delta):X_0\to X_1\to X_2\to\cdots\to X_{n-1}\to X_n\xrightarrow{\alpha}Y\xrightarrow{\delta}$$

满足条件

(1) $X_0\in \mathrm{add}\ X$,

(2) $\mathrm{Im}\ \delta_X^{\#}=F$,

(3) $\Gamma(X)$-模之间的态射$\delta_X^{\#}:\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X_0,X)\to E(Y,X)$是右极小的,

则称 δ 是 Y 通过 X 的一个泛 F-扩张。

如果 $E(Y,X)$是一个有限生成 $\Gamma(X)$-模,那么一个泛 $E(Y,X)$-扩张是 Y 通过 X 的一个扩张。

注 5　(1) 假设 F 是 $E(Y,X)$的一个有限生成 $\Gamma(X)$-子模,

$$(X_{\bullet},\delta):X_0\to X_1\to X_2\to\cdots\to X_{n-1}\to X_n\xrightarrow{\alpha}Y\xrightarrow{\delta}$$

是一个 distinguished n-外角,下列等价:

(ⅰ) δ 是 Y 通过 X 的一个泛 F-扩张;

(ⅱ) δ 是 Y 通过 X 的一个半泛 F-扩张,且 $\Gamma(X)$-模之间的态射$\delta_X^{\#}:\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X_0,X)\to E(Y,X)$是右极小的。

(2) 由注 4 知,当($\mathscr{C},E,s$)是外三角范畴时,定义 5 和文献[6]中定义 3.8 是一致的。

对于泛 F-扩张的存在性,定理 2 给了一个充分必要条件。

定理 2　假设 F 是 $E(Y,X)$ 的有限生成 $\Gamma(X)$-子模,那么泛 F-扩张是存在的当且仅当 $\Gamma(X)$-模 F 有投射盖。

证明　$\Rightarrow$。假设 $X_0 \to X_1 \to X_2 \to \cdots \to X_{n-1} \to X_n \xrightarrow{\alpha} Y \xrightarrow{\delta}$ 是 Y 通过 X 的一个泛 F-扩张,$X_0 \in \operatorname{add} X$ 说明态射 $\operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(X_0,X)$ 是一个投射 $\Gamma(X)$-模,$\operatorname{Im} \delta_X^{\#} = F$ 说明 $\delta_X^{\#}: \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(X_0,X) \to F$ 是满的,$\delta_X^{\#}: \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(X_0,X) \to E(Y,X)$ 是右极小的,故 $\operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(X_0,X) \to F$ 是右极小的,表明 $\operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(X_0,X)$ 是 F 的投射盖。

$\Leftarrow$。假设 F 有投射盖,因为 F 是 $E(Y,X)$ 的有限生成 $\Gamma(X)$-子模,所以取 $\Gamma(X)$-模之间的态射 $\omega: \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(X_0,X) \to E(Y,X)$,满足 $X_0 \in \operatorname{add} X$, $\operatorname{Im} \delta_X^{\#} = F$,且满态射 $\omega: \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(X_0,X) \to F$ 是 F 的投射盖。特别地,ω 是右极小的,由(1)知存在 E-扩张 $\delta \in E(Y,X_0)$ 使得 $\omega = \delta_X^{\#}$。假设 $X_0 \to X_1 \to X_2 \to \cdots \to X_{n-1} \to X_n \xrightarrow{\alpha} Y \xrightarrow{\delta}$ 是上述 E-扩张 δ 所对应的 distinguished n-外角,Y 通过 X 的泛 F-扩张。

由注 1、5 得到推论 2。

推论 2[6]　如果($\mathscr{C},E,s$)是外部三角范畴,F 是 $E(Y,X)$ 的有限生成 $\Gamma(X)$-子模,那么泛 F-扩张是存在的当且仅当 $\Gamma(X)$-模 F 有投射盖。

参考文献:

[1] NAKAOKA H, PALU Y. Extriangulated categories, Hovey twin cotorsion pairs and model structures[J]. Cahiers de Topologie et Géométrie Différentielle Catégoriques, 2019, 60(2):117-193.

[2] HERSCHEND M, LIU Y, NAKAOKA H. n-exangulated categories (Ⅰ): Definitions and fundamental properties[J]. Journal of Algebra, 2021, 570:531-586.

[3] HU Jiangsheng, ZHANG Dongdong, ZHOU Panyue. Two new classes of n-exangulated categories[J]. Journal of Algebra, 2021, 568:1-21.

[4] HERSCHEND M, LIU Y, NAKAOKA H. n-exangulated categories (Ⅱ): constructions from n-cluster tilting subcategories [J]. Journal of Algebra, 2022, 594:636-684.

[5] CHEN Xiaowu. The Auslander bijections and universal extensions[J]. Arkiv for Matematik, 2017, 55:41-59.

[6] 谭玲玲,柯圆圆,赵体伟. 外三角范畴中的泛扩张[J]. 纯粹数学与应用数学,2025,41(4):657-669.
TAN Lingling, KE Yuanyuan, ZHAO Tiwei. Universal extensions in extriangulated categories[J]. Pure Mathematics and Applied Mathmatics, 2025, 41(4):657-669.

[7] LIU Yu, ZHOU Panyue. Frobenius n-exangulated categories[J]. Journal of Algebra, 2020, 559:161-183.

[8] HE Jian, ZHOU Panyue. n-exact categories arising from n-exangulated categories[J]. Acta Mathematica Sinica, English Series, 2023, 39(9):1781-1794.

(编辑:陈丽萍)