

非线性 Sobolev-Galpern 型方程的超收敛分析

李素丽,谢华朝*

(河南财经政法大学数学与信息科学学院,河南 郑州 450046)

摘要:用低阶混合有限元($Q_{11}+Q_{01}\times Q_{10}$)研究非线性 Sobolev-Galpern 型方程。利用双线性元 Q_{11} 及 $Q_{01}\times Q_{10}$ 元的高精度结果和平均值技巧,得到方程半离散格式的 $O(h^2)$ 阶超收敛结果。对于方程线性化的全离散格式,得到具有 $O(h^2+\tau^2)$ 阶的超收敛结果,其中 h 是空间剖分参数, τ 是时间步长。最后,通过数值算例证实理论分析的正确性。

关键词:非线性 Sobolev-Galpern 型方程;混合有限元;线性化格式;超收敛分析

中图分类号:O242.21 **文献标志码:**A

引用格式:李素丽,谢华朝. 非线性 Sobolev-Galpern 型方程的超收敛分析[J]. 山东大学学报(理学版),2026,61(4):133-142.

Superconvergence analysis of nonlinear Sobolev-Galpern equations

LI Suli, XIE Huazhao*

(School of Mathematics and Information Science, Henan University of Economics and Law, Zhengzhou 450046, Henan, China)

Abstract: The nonlinear Sobolev-Galpern equations are studied with low order mixed finite element ($Q_{11}+Q_{01}\times Q_{10}$). By utilizing the high precision results of the finite element $Q_{11}+Q_{01}\times Q_{10}$, and mean-value technique, the superconvergence results of order $O(h^2)$ are obtained for the semi-discrete scheme of the equations. For the linearized fully discrete scheme, the superconvergence results of order $O(h^2+\tau^2)$ are also derived, here h is the subdivision parameter, τ is the time step. Finally, a numerical example is provided to confirm our theoretical analysis.

Key words: nonlinear Sobolev-Galpern equations; mixed finite element; linearized scheme; superconvergence analysis

0 引言

研究如下非线性 Sobolev-Galpern 型方程:

$$\begin{cases} d(t)u_t - \operatorname{div}(a(u)\nabla u_t + b(u)\nabla u) + e(t)\cdot\nabla u = f(u), & (X,t) \in \Omega \times (0,T], \\ u(X,t) = 0, & (X,t) \in \partial\Omega \times (0,T], \\ u(X,0) = u_0(X), & X \in \Omega, \end{cases} \quad (1)$$

式中:空间变量 $X=(x,y)$; Ω 是 \mathbf{R}^2 中边界为 $\partial\Omega$ 的有界凸区域; $u_0(X)$ 是已知的函数;非线性函数 $a(u)$ 、 $b(u)$ 和 $f(u)$ 都关于 u 满足 Lipschitz 条件;标量函数 $d(t)$ 和矢量函数 $e(t)$ 都是关于 t 的有界函数。存在正常数 a_0 、 a 、 b_0 、 b 、 d_0 、 d 、 e_0 ,使得

$$a_0 \leq a(u) \leq a, \quad b_0 \leq b(u) \leq b, \quad d_0 \leq d(t) \leq d, \quad |e(t)| \leq e_0.$$

Sobolev-Galpern 型方程在液体的渗透、土壤的湿气迁移、介质的热传导、黏土的加固理论等数学物理问题中都有广泛的应用。对于问题(1)的半线性情形,施德明^[1]用不动点理论得到解的存在唯一性。文献[2-3]用非协调有限元得到一些解的误差估计和超逼近结果。

混合有限元方法^[4]是求解偏微分方程数值解的有效方法之一。陈绍春等^[5]对二阶椭圆问题,给出一种

收稿日期:2024-01-08;网络出版时间:2025-04-02

基金项目:国家自然科学基金资助项目(11671369)

第一作者:李素丽(1982—),女,讲师,硕士,研究方向为偏微分方程数值解. E-mail:20140097@huel.edu.cn

*通信作者:谢华朝(1982—),男,教授,博士,研究方向为偏微分方程及其应用. E-mail:hzhxie@126.com

自由度少且能够满足 B-B 条件的混合有限元格式,并得到的最优误差估计。石东洋等^[6]进一步给出其超收敛分析。文献[7]又将该格式应用于 Sobolev 方程的超收敛性分析。对非线性 Sobolev 方程, Shi 等[8]用混合元建立一个时间离散系统,得到无网格比的超逼近和超收敛结果。文献[9-11]用 H^1 -Galerkin 混合有限元方法研究相关方程解的数值性质。当时间步长和空间剖分参数有关时,文献[12-15]得到一些有网格比的最优误差估计。为了去掉网格比的条件限制,在文献[16-17]中,利用分裂技巧,得到无条件最优误差估计结果。

研究非线性问题的(超)收敛性,一般需要与一个超接近函数进行比较。超接近函数是插值算子 $I_h u$ 、 $\Pi_h \mathbf{p}$,也可以是一个线性化问题的有限元解。但无论哪种方法,最后都有二次余项出现。为了消除这些二次余项,可以使用嵌入定理和逆估计。本文研究非线性方程(1)的半离散格式和线性化的全离散格式的超收敛性质,利用 $Q_{11}+Q_{01} \times Q_{10}$ 有限元,引入中间变量 $\mathbf{p} = a(u) \nabla u_t + b(u) \nabla u$,建立混合元逼近格式。利用 2 个单元高精度结果^[18-19],得到半离散格式 $O(h^2)$ 阶的超收敛结果。对于线性化的全离散格式,利用预估校正等技巧,得到原始变量 u 和中间变量 \mathbf{p} 具有 $O(h^2 + \tau^2)$ 阶的超收敛估计。

本文 $W^{m,q}(\Omega)$ 表示通常的 Sobolev 空间,其半范和范数分别记为 $|\cdot|_{m,q}$ 和 $\|\cdot\|_{m,q}$ 。特别地, $q=2$ 时, $W^{m,2}(\Omega)$ 简记为 $H^m(\Omega)$,相应的半范和范数简记为 $|\cdot|_m$ 和 $\|\cdot\|_m$,记

$$\|\varphi\|_{L^\infty(0,T;H^k(\Omega))} \triangleq \sup_{0 \leq t \leq T} \|\varphi\|_{H^k(\Omega)}, \quad \|\varphi\|_{L^2(a,b;H^k(\Omega))}^2 \triangleq \int_a^b \|\varphi\|_{H^k(\Omega)}^2 dt.$$

文中出现的 C 均表示与剖分尺寸无关的常数,在不同的地方取值不相等。

1 混合有限元的构造及性质

假设 Ω 是边界分别平行于 x 轴与 y 轴的矩形区域, T_h 是 Ω 中的正则矩形剖分族。设 $K \in T_h$, 它的中心点是 (x_k, y_k) , 平行于 x 轴与 y 轴的边长度分别为 $2h_{x,k}, 2h_{y,k}$, 4 个顶点为

$$\begin{aligned} a_1(x_k - h_{x,k}, y_k - h_{y,k}), \\ a_2(x_k + h_{x,k}, y_k - h_{y,k}), \\ a_3(x_k + h_{x,k}, y_k + h_{y,k}), \\ a_4(x_k - h_{x,k}, y_k + h_{y,k}), \end{aligned}$$

4 条边为 $l_i = \overline{a_i a_{i+1}}, i=1, 2, 3, 4(\text{mod } 4)$, 记 $h_K = \max\{x_k, y_k\}, h = \max_{K \in T_h} \{h_K\}$ 。

定义有限元空间为

$$\begin{aligned} V_h = \{v: v|_K \in Q_{11}(K), \forall K \in T_h\}, \quad V_h^0 = \{v: v \in V_h, v|_{\partial\Omega} = 0\}, \\ W_h = \{\mathbf{w} = (w_1, w_2) \in (L^2(\Omega))^2; \mathbf{w}|_K \in Q_{01}(K) \times Q_{10}(K), K \in T_h\}. \end{aligned}$$

其中, $Q_{mm} = \text{span}\{x^i y^j, 0 \leq i \leq m, 0 \leq j \leq n\}$ 。

定义插值算子 $I_h u$ 和 $\Pi_h \mathbf{p}$ 分别为

$$\begin{aligned} I_h: v \in H^2(\Omega) \rightarrow I_h v \in V_h, \quad I_h|_K \in I_K, \quad I_K v(a_i) = v(a_i), \quad i=1, \dots, 4, \\ \Pi_h: \mathbf{p} \in (H^1(\Omega))^2 \rightarrow \Pi_h \mathbf{p} \in W_h, \quad \Pi_h|_K \in \Pi_K, \quad \int_{l_i} (\mathbf{p} - \Pi_h \mathbf{p}) \cdot \mathbf{n}_i ds = 0, \end{aligned}$$

其中 \mathbf{n}_i 是 l_i 的单位切向量。

引理 1^[19] 假设 $u \in H^3(\Omega), \mathbf{p} = (p^1, p^2) \in (H^2(\Omega))^2, v \in V_h, \varphi \in V_h^0, \mathbf{w} \in W_h$, 则有

$$(\nabla(u - I_h u), \nabla v) \leq Ch^2 |u|_3 \|v\|_1, \tag{2}$$

$$(\mathbf{p} - \Pi_h \mathbf{p}, \mathbf{w}) \leq Ch^2 |\mathbf{p}|_2 \|\mathbf{w}\|_0, \tag{3}$$

$$(\mathbf{p} - \Pi_h \mathbf{p}, \nabla \varphi) \leq Ch^2 |\mathbf{p}|_2 \|\nabla \varphi\|_0. \tag{4}$$

定义 Ritz 投影算子 $R_h: u \in H_0^1(\Omega) \rightarrow R_h u \in V_h^0$, 满足

$$(\nabla R_h u, \nabla v) = (\nabla u, \nabla v), \quad v \in V_h^0. \tag{5}$$

对于 $u \in H_0^1(\Omega) \cap H^3(\Omega)$, 有

$$\|u - R_h u\|_0 + h \|\nabla(u - R_h u)\|_0 \leq Ch^2 \|u\|_2, \quad \|I_h u - R_h u\|_1 \leq Ch^2 \|u\|_3. \quad (6)$$

插值算子 $I_h u$ 和 $\Pi_h \mathbf{p}$ 在超收敛理论中称为超接近函数, 因为插值算子和有限元解 $I_h u - U$ (对二阶椭圆算子) 及 $\Pi_h \mathbf{p} - \mathbf{P}$ (对函数的 L^2 逼近) 有整体的超收敛精度, 这里 U 和 \mathbf{P} 分别是 u 和 \mathbf{p} 的有限元解, 所以误差 $u - U = (u - I_h u) + (I_h u - U)$ 中, $u - I_h u$ 的分析是已知的, ($\mathbf{p} - \mathbf{P} = \mathbf{p} - \Pi_h \mathbf{p} + \Pi_h \mathbf{p} - \mathbf{P}$ 的分析类似)。它们在方程中将成为高阶量 (对于二次算子 $I_h u$, 余项 $u - I_h u$ 有 Gauss-Lobatto 结构, 即在 3 阶的 Lobatto 点 (包括角节点) 上有 4 阶精度, 梯度在 2 阶 Gauss 点上有 3 阶精度)。于是下面的超收敛分析中把问题归为估计 $I_h u - U$ 和 $\Pi_h \mathbf{p} - \mathbf{P}$ 。

2 半离散格式下的超收敛分析

令 $\mathbf{p} = a(u) \nabla u_t + b(u) \nabla u$, 则问题 (1) 化为

$$\begin{cases} \mathbf{p} = a(u) \nabla u_t + b(u) \nabla u, & (X, t) \in \Omega \times (0, T], \\ d(t) u_t - \operatorname{div}(\mathbf{p}) + e(t) \cdot \nabla u = f(u), & (X, t) \in \Omega \times (0, T], \\ u(X, t) = 0, & (X, t) \in \partial\Omega \times (0, T], \\ u(X, 0) = u_0(X), & X \in \Omega. \end{cases} \quad (7)$$

与方程 (7) 对应的变分形式为: 求 $(u, \mathbf{p}) : [0, T] \rightarrow H_0^1(\Omega) \times (L^2(\Omega))^2$, 使得

$$\begin{cases} L_1(u, v) = d(t)(u_t, v) + (\mathbf{p}, \nabla v) + e(t)(\nabla u, v) - (f(u), v) = 0, & v \in H_0^1(\Omega), \\ L_2(\mathbf{p}, \mathbf{w}) = (a(u) \nabla u_t, \mathbf{w}) + (b(u) \nabla u, \mathbf{w}) - (\mathbf{p}, \mathbf{w}) = 0, & \mathbf{w} \in (L^2(\Omega))^2. \end{cases} \quad (8)$$

与 (8) 对应的半离散逼近格式为: 求 $(u_h, \mathbf{p}_h) : [0, T] \rightarrow V_h \times W_h$, 满足

$$\begin{cases} L_1(u_h, v) = d(t)(u_{ht}, v) + (\mathbf{p}_h, \nabla v) + e(t)(\nabla u_h, v) - (f(u_h), v) = 0, & \forall v \in V_h^0, \\ L_2(\mathbf{p}_h, \mathbf{w}) = (a(u_h) \nabla u_{ht}, \mathbf{w}) + (b(u_h) \nabla u_h, \mathbf{w}) - (\mathbf{p}_h, \mathbf{w}) = 0, & \mathbf{w} \in W_h, \\ u_h(X, 0) = R_h u_0(X), & X \in \Omega. \end{cases} \quad (9)$$

根据微分方程理论^[20], 问题 (9) 的解存在且唯一。在下面的分析中, 把误差分成

$$\begin{aligned} u - u_h &= (u - R_h u) + (R_h u - u_h) \triangleq \eta + \xi, \\ \mathbf{p} - \mathbf{p}_h &= (\mathbf{p} - \Pi_h \mathbf{p}) + (\Pi_h \mathbf{p} - \mathbf{p}_h) \triangleq r + \theta. \end{aligned}$$

定理 1 设 (u, \mathbf{p}) 和 (u_h, \mathbf{p}_h) 分别是 (8) 和 (9) 的解, $u, u_t \in H^3(\Omega)$, $\mathbf{p} \in (H^2(\Omega))^2$, 则有

$$\|I_h u - u_h\|_1 + \|\theta\|_0 = O(h^2). \quad (10)$$

证明 对任意的 $v \in V_h^0$, $\mathbf{w} \in W_h$, 计算 $L_1(u, v) - L_1(u_h, v)$, $L_2(\mathbf{p}, \mathbf{w}) - L_2(\mathbf{p}_h, \mathbf{w})$, 得误差方程

$$\begin{cases} d(t)(\eta_t + \xi_t, v) + (r + \theta, \nabla v) + e(t)(\nabla \eta + \nabla \xi, v) = (f(u) - f(u_h), v), \\ (\theta, \mathbf{w}) - (a(u_h) \nabla \xi_t, \mathbf{w}) - (b(u_h) \nabla \xi, \mathbf{w}) = -(r, \mathbf{w}) + (a(u) \nabla \eta_t, \mathbf{w}) \\ \quad + ((a(u) - a(u_h)) \nabla R_h u_t, \mathbf{w}) + ((b(u) - b(u_h)) \nabla R_h u, \mathbf{w}) + (b(u) \nabla \eta, \mathbf{w}). \end{cases} \quad (11)$$

在方程 (11) 中, 令 $v = \xi_t$, $\mathbf{w} = \nabla \xi_t$, 有

$$\begin{aligned} d(t) \|\xi_t\|_0^2 + (a(u_h) \nabla \xi_t, \nabla \xi_t) &= -(b(u_h) \nabla \xi, \nabla \xi_t) - (a(u) \nabla \eta_t, \nabla \xi_t) - ((a(u) - a(u_h)) \nabla R_h u_t, \nabla \xi_t) \\ &\quad - ((b(u) - b(u_h)) \nabla R_h u, \nabla \xi_t) - (b(u) \nabla \eta, \nabla \xi_t) - d(t)(\eta_t, \xi_t) \\ &\quad - e(t)(\nabla \xi, \xi_t) - e(t)(\nabla \eta, \xi_t) + (f(u) - f(u_h), \xi_t) \triangleq \sum_{i=1}^9 A_i. \end{aligned}$$

记 $k = \min\{a_0, d_0\}$, 那么

$$k \|\xi_t\|_1^2 \leq d(t) \|\xi_t\|_0^2 + (a(u_h) \nabla \xi_t, \nabla \xi_t) \triangleq \sum_{i=1}^9 A_i. \quad (12)$$

由于 $\xi(X, 0) = 0$, 因此 $\nabla \xi(X, 0) = 0$, 则

$$|A_1 + A_7| \leq C \|\xi\|_1^2 + \frac{k}{8} \|\xi_t\|_1^2 \leq C \int_0^t \|\xi_t\|_1^2 dt + \frac{k}{8} \|\xi_t\|_1^2.$$

对于任意的 $\phi \in W^{1,\infty}(\Omega)$, 在单元 K 上的平均值为 $\bar{\phi}|_K = \frac{1}{K} \int_K \phi dx dy$, 则有

$$|\phi - \bar{\phi}|_K \leq Ch \|\phi\|_{1,\infty,K}$$

结合式(5)和(6), 可得

$$\begin{aligned} |A_2| &= \left| \sum_K ((a(u) - \overline{a(u)})|_K \nabla \eta_t, \nabla \xi_t)_K \right| + \left| \sum_K \overline{a(u)}|_K (\nabla \eta_t, \nabla \xi_t) \right| \\ &\leq Ch^2 \|u_t\|_2 \|\xi_t\|_1 \leq Ch^4 \|u_t\|_2^2 + \frac{k}{8} \|\xi_t\|_1^2. \end{aligned}$$

同理有 $|A_5 + A_6 + A_8| \leq Ch^4 (\|u\|_3^2 + \|u_t\|_3^2) + \frac{k}{8} \|\xi_t\|_1^2$. 由 Sobolev 嵌入定理知 $H^2(\Omega) \hookrightarrow C^0(\bar{\Omega})$, 结合插值定理, 可得

$$\|\nabla R_h u\|_{0,\infty} \leq C \|\nabla R_h u\|_2 \leq \|R_h u - u\|_3 + \|\nabla u\|_2 \leq C \|u\|_3 \leq C, \tag{13}$$

$$\|\nabla R_h u_t\|_{0,\infty} \leq C \|\nabla R_h u_t\|_2 \leq \|R_h u_t - u_t\|_3 + \|\nabla u_t\|_2 \leq C \|u_t\|_3 \leq C. \tag{14}$$

利用式(2)、(6)以及估计(13)、(14), 知

$$\begin{aligned} A_3 + A_4 &\leq C \sum_K (\|\nabla R_h u\|_{0,\infty,K} + \|\nabla R_h u_t\|_{0,\infty,K}) (\|\xi\|_0 + \|\eta\|_0) \|\nabla \xi_t\|_0 \\ &\leq Ch^4 \|u\|_3^2 + C \int_0^t \|\xi_t\|_1^2 dt + \frac{k}{8} \|\xi_t\|_1^2. \end{aligned}$$

由于函数 $f(u)$ 关于 u 满足 Lipschitz 条件, 则

$$A_9 \leq Ch^4 \|u\|_3^2 + C \int_0^t \|\xi_t\|_1^2 dt.$$

结合式(12)和 Gronwall 不等式, 有

$$\|\xi_t\|_1^2 \leq Ch^4 (\|u\|_3^2 + \|u_t\|_3^2). \tag{15}$$

因此

$$\|\xi\|_1^2 \leq \int_0^t \|\xi_t\|_1^2 dt \leq Ch^4 \int_0^t (\|u_t\|_3^2 + \|u\|_3^2) dt. \tag{16}$$

利用式(6)知

$$\|I_h u - u_h\|_1 = \|I_h u - R_h u + R_h u - u_h\|_1 \leq \|I_h u - R_h u\|_1 + \|\xi\|_1 \leq Ch^2. \tag{17}$$

在方程(11)的第 2 个式子中, 令 $w = \theta$, 则有

$$\begin{aligned} (\theta, \theta) &= (a(u_h) \nabla \xi_t, \theta) + (b(u_h) \nabla \xi, \theta) - (r, \theta) + (a(u) \nabla \eta_t, \theta) + (b(u) \nabla \eta, \theta) \\ &\quad + ((a(u) - a(u_h)) \nabla R_h u_t, \theta) + ((b(u) - b(u_h)) \nabla R_h u, \theta) \triangleq \sum_{i=1}^7 B_i. \end{aligned}$$

由 Hölder 不等式和式(2), 导出 $B_3 \leq Ch^4 \|p\|_2^2 + \frac{1}{8} \|\theta\|_0^2$. 类似式(16)的推导过程, 可得

$$\sum_{i=1}^7 B_i \leq Ch^4 [\|u_t\|_3^2 + \|u\|_3^2 + \|p\|_2^2 + \int_0^t (\|u_t\|_3^2 + \|u\|_3^2) dt] + \frac{1}{4} \|\theta\|_0^2,$$

所以

$$\|\theta\|_0^2 \leq Ch^4 [\|u_t\|_3^2 + \|u\|_3^2 + \|p\|_2^2 + \int_0^t (\|u_t\|_3^2 + \|u\|_3^2) dt]. \tag{18}$$

由式(17)、(18)得 $\|\theta\|_0 + \|I_h u - u_h\|_1 \leq Ch^2$. 证毕。

3 线性化全离散格式下的超收敛分析

下面研究方程(1)线性化的全离散格式。该格式的优点是不用在每一时间层都求解非线性方程, 在提升计算速度的同时也不会降低计算精度。设 $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = T$ 为 $[0, T]$ 的等距剖分, $t_n = n\tau$, $n = 0, 1, \dots, N$, $\tau = \frac{T}{N}$. 对函数列 $\{\phi^n\}_{n=0}^N$, 记 $\phi^n = \phi(X, t_n)$, $D_t \phi^n = \frac{1}{\tau} (\phi^n - \phi^{n-1})$ ($n \geq 1$). 讨论线性化格式的 necessary 条件是: 与 t 有关的系数取中点值 $t_{n-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(t_n + t_{n-1})$, 函数用平均 $\bar{\phi}^n = \frac{1}{2}(\phi^n + \phi^{n+1})$, 保证时间精度为二阶。但这种格式

导出的是一个非线性方程组,求解比较麻烦。为了避免这种情况,对不含导数的函数(弱项)采用时间外推算法 $\hat{\phi}^n = \frac{1}{2}(3\phi^{n-1} - \phi^{n-2})$, ($n \geq 2$)。第 $n \geq 2$ 层离散格式可像线性方程那样可以直接求解,而无需迭代。因此,只需要对 $n=1$ 时单独计算(文献[21])即可。

利用平均外推算子,当 $n \geq 2$ 时,定义方程(8)的线性化全离散格式:求 $(U^n, \mathbf{P}^n) : [0, T] \rightarrow V_h^0 \times W_h$, 对任意的 $v \in V_h^0$, $\mathbf{w} \in W_h$, 使得

$$\begin{cases} L_1^n(U^n, v) = d_n(D_t U^n, v) + (\mathbf{P}^n, \nabla v) + e_n(\nabla U^n, v) - (f(\hat{U}^n), v) = 0, \\ L_2^n(\mathbf{P}^n, \mathbf{w}) = (a(\hat{U}^n) \nabla D_t U^n, \mathbf{w}) + (b(\hat{U}^n) \nabla \bar{U}^n, \mathbf{w}) - (\mathbf{P}^n, \mathbf{w}) = 0. \end{cases} \quad (19)$$

当 $n=1$ 时,用预估-校正方法估计 $\{U^1, \mathbf{P}^1\}$ 。记 $U^0 = u_0$, $\mathbf{p}^0 = a(u_0) \nabla u_0^0 + b(u_0) \nabla u_0$, $\mathbf{P}^0 = \Pi_h \mathbf{p}^0$, 这里 u^0 是 $t=0$ 时微分方程(1)的解。对 $v \in V_h^0$, $\mathbf{w} \in W_h$, 首先考虑

$$\begin{cases} d_1\left(\frac{U^{1,0} - U^0}{\tau}, v\right) + \left(\frac{\mathbf{P}^{1,0} + \mathbf{P}^0}{2}, \nabla v\right) + e_1\left(\frac{\nabla U^{1,0} + \nabla U^0}{2}, v\right) = (f(U^0), v), \\ \left(a(U^0) \frac{\nabla U^{1,0} - \nabla U^0}{\tau}, \mathbf{w}\right) + \left(b(U^0) \frac{\nabla U^{1,0} + \nabla U^0}{2}, \mathbf{w}\right) = \left(\frac{\mathbf{P}^{1,0} + \mathbf{P}^0}{2}, \mathbf{w}\right). \end{cases} \quad (20)$$

再考虑

$$\begin{cases} d_1(D_t U^1, v) + (\bar{\mathbf{P}}^0, \nabla v) + e_1(\nabla \bar{U}^0, v) = \left(f\left(\frac{U^{1,0} + U^0}{2}\right), v\right), \\ \left(a\left(\frac{U^{1,0} + U^0}{2}\right) D_t \nabla U^1, \mathbf{w}\right) + \left(b\left(\frac{U^{1,0} + U^0}{2}\right) \nabla \bar{U}^0, \mathbf{w}\right) = (\bar{\mathbf{P}}^0, \mathbf{w}). \end{cases} \quad (21)$$

在下面的分析中,记

$$\begin{aligned} u^1 - U^{1,0} &= (u^1 - R_h u^1) + (R_h u^1 - U^{1,0}) \triangleq \eta^1 + \xi^{1,0}, \\ \mathbf{p}^1 - \mathbf{P}^{1,0} &= (\mathbf{p}^1 - \Pi_h \mathbf{p}^1) + (\Pi_h \mathbf{p}^1 - \mathbf{P}^{1,0}) \triangleq r^1 + \theta^{1,0}, \\ u^i - U^i &= (u^i - R_h u^i) + (R_h u^i - U^i) \triangleq \eta^i + \xi^i, \\ \mathbf{p}^i - \mathbf{P}^i &= (\mathbf{p}^i - \Pi_h \mathbf{p}^i) + (\Pi_h \mathbf{p}^i - \mathbf{P}^i) \triangleq r^i + \theta^i, \quad i=0, 1, \dots, N. \end{aligned}$$

定理 2 设 (u, \mathbf{p}) 和 (U^n, \mathbf{P}^n) 分别是方程(8)和方程(19)–(21)的解, 函数 $u, u_i \in L^\infty(0, T; H^3(\Omega))$, 且函数 $\mathbf{p} \in L^\infty(0, T; (H^2(\Omega))^2)$, 则对任意的 $1 \leq n \leq N$, 有

$$\|I_h u^n - U^n\|_1 + \|\theta^n\|_0 \leq C(h^2 + \tau^2), \quad (22)$$

其中, C 和 u, f 有关, 但不依赖 n, h 和 τ 。

证明 首先证 $n=1$ 的情形。由方程(8)、(20)可得误差方程

$$\begin{cases} d_1\left(\frac{\xi^{1,0}}{\tau}, v\right) + d_1(D_t \eta^1, v) + \left(\frac{\theta^{1,0}}{2}, \nabla v\right) + (\bar{r}^0, \nabla v) + e_1\left(\frac{\nabla \xi^{1,0}}{2}, v\right) + e_1(\nabla \bar{\eta}^0, v) = (S_1 + S_2 + S_3, v) + (S_4, \nabla v), \\ \left(a(U^0) \frac{\nabla \xi^{1,0}}{\tau}, \mathbf{w}\right) = -(a(u^0) D_t \nabla \eta^1, \mathbf{w}) - \left(b(U^0) \frac{\nabla \xi^{1,0}}{2}, \mathbf{w}\right) - ((a(u^0) - a(U^0)) D_t \nabla R_h u^1, \mathbf{w}) \\ - (b(u^0) \nabla \bar{\eta}^0, \mathbf{w}) + (\bar{r}^0, \mathbf{w}) - ((b(u^0) - b(U^0)) \nabla R_h u^0, \mathbf{w}) + \left(\frac{\theta^{1,0}}{2}, \mathbf{w}\right) + (S_4 + S_5 + S_6, \mathbf{w}), \end{cases} \quad (23)$$

其中, $S_1 = f(u^{\frac{1}{2}}) - f(U^0)$, $S_2 = d_1(D_t u^1 - u_t^{\frac{1}{2}})$, $S_3 = e_1(\nabla u^0 - \nabla u^{\frac{1}{2}})$, $S_4 = \bar{\mathbf{p}}^0 - \mathbf{p}^{\frac{1}{2}}$, $S_5 = a(u^0) D_t \nabla u^1 - a(u^{\frac{1}{2}}) \nabla u_t^{\frac{1}{2}}$, $S_6 = b(u^0) \nabla u^0 - b(u^{\frac{1}{2}}) \nabla u^{\frac{1}{2}}$ 。

由泰勒展开可得

$$\|S_2\|_0^2 + \|S_5\|_0^2 + \|S_6\|_0^2 \leq C\tau^4, \quad \|S_1\|_0^2 + \|S_3\|_0^2 + \|S_4\|_0^2 \leq C\tau^3. \quad (24)$$

在方程(23)中取 $v = \frac{\xi^{1,0}}{\tau}$, $\mathbf{w} = \frac{\nabla \xi^{1,0}}{\tau}$, 有

$$\begin{aligned}
 & d_1\left(\frac{\xi^{1,0}}{\tau}, \frac{\xi^{1,0}}{\tau}\right) + \left(a(U^0) \frac{\nabla \xi^{1,0}}{\tau}, \frac{\nabla \xi^{1,0}}{\tau}\right) \\
 = & -\left(a(u^0) D_t \nabla \eta^1, \frac{\nabla \xi^{1,0}}{\tau}\right) - \left(b(U^0) \frac{\nabla \xi^{1,0}}{2}, \frac{\nabla \xi^{1,0}}{\tau}\right) - \left(b(u^0) \nabla \bar{\eta}^0, \frac{\nabla \xi^{1,0}}{\tau}\right) \\
 & - \left((a(u^0) - a(U^0)) D_t \nabla R_h u^1, \frac{\nabla \xi^{1,0}}{\tau}\right) - \left((b(u^0) - b(U^0)) \nabla R_h \bar{u}^0, \frac{\nabla \xi^{1,0}}{\tau}\right) \\
 & - d_1\left(D_t \eta^1, \frac{\xi^{1,0}}{\tau}\right) - e_1\left(\frac{\nabla \xi^{1,0}}{2}, \frac{\xi^{1,0}}{\tau}\right) - e_1\left(\nabla \bar{\eta}^0, \frac{\xi^{1,0}}{\tau}\right) \\
 & + \left(S_1 + S_2 + S_3, \frac{\xi^{1,0}}{\tau}\right) + \left(S_4 + S_5 + S_6, \frac{\nabla \xi^{1,0}}{\tau}\right) \triangleq \sum_{i=1}^{10} D_i,
 \end{aligned}$$

记 $k = \min\{a_0, d_0\}$, 那么

$$k \left\| \frac{\xi^{1,0}}{\tau} \right\|_1^2 \leq d_1 \left(\frac{\xi^{1,0}}{\tau}, \frac{\xi^{1,0}}{\tau} \right) + \left(a(U^0) \frac{\nabla \xi^{1,0}}{\tau}, \frac{\nabla \xi^{1,0}}{\tau} \right) \triangleq \sum_{i=1}^{10} D_i. \tag{25}$$

类似式(13)的推导, 可得

$$\| D_t \nabla R_h u^1 \|_{0,\infty,K^+} + \| \nabla R_h \bar{u}^0 \|_{0,\infty,K} \leq C. \tag{26}$$

利用引理1和式(6)、(24)、(26), 易知

$$\begin{aligned}
 D_1 + D_3 + D_6 + D_8 & \leq Ch^4 (\| D_t u^1 \|_3^2 + \| \bar{u}^0 \|_3^2) + \frac{k}{8} \left\| \frac{\xi^{1,0}}{\tau} \right\|_1^2, \\
 D_2 + D_7 & \leq C \| \xi^{1,0} \|_1^2 + \frac{k}{8} \left\| \frac{\xi^{1,0}}{\tau} \right\|_1^2, \\
 D_4 + D_5 & \leq Ch^4 \| u^0 \|_3^2 + \frac{k}{8} \left\| \frac{\xi^{1,0}}{\tau} \right\|_1^2, \quad D_9 + D_{10} \leq C\tau^2 + \frac{k}{8} \left\| \frac{\xi^{1,0}}{\tau} \right\|_1^2.
 \end{aligned}$$

那么式(25)化为

$$\left\| \frac{\xi^{1,0}}{\tau} \right\|_1^2 \leq Ch^4 + C\tau^2 + C_1 \| \xi^{1,0} \|_1^2,$$

因此, 取 τ 充分小, 使得 $1 - C_1\tau^2 > 0$, 则有

$$\| \xi^{1,0} \|_1^2 \leq Ch^4 + C\tau^4. \tag{27}$$

估计 ξ^1 和 θ^1 . 利用方程(8)和(21), 得误差方程

$$\left\{ \begin{aligned}
 & d_1\left(\frac{\xi^1}{\tau}, v\right) + d_1(D_t \eta^1, v) + \left(\frac{\theta^1}{2}, \nabla v\right) + (\bar{r}^0, \nabla v) + e_1\left(\frac{\nabla \xi^1}{2}, v\right) + e_1(\nabla \bar{\eta}^0, v) \\
 & = (S_7 + S_2 + S_3, v) + (S_4, \nabla v), \\
 & \left(a\left(\frac{U^{1,0} + U^0}{2}\right) \frac{\nabla \xi^1}{\tau}, w \right) = \left(\frac{\theta^1}{2}, w\right) + (\bar{r}^0, w) - \left(b\left(\frac{U^{1,0} + U^0}{2}\right) \frac{\nabla \xi^1}{\tau}, w \right) \\
 & - (b(\bar{u}^1) \nabla \bar{\eta}^0, w) - (a(\bar{u}^1) D_t \nabla \eta^1, w) - \left(\left(a(\bar{u}^1) - a\left(\frac{U^{1,0} + U^0}{2}\right) \right) D_t \nabla R_h u^1, w \right) \\
 & - \left(\left(b(\bar{u}^1) - b\left(\frac{U^{1,0} + U^0}{2}\right) \right) \nabla R_h \bar{u}^0, w \right) + (S_4 + S_8 + S_9, w),
 \end{aligned} \right. \tag{28}$$

其中, $S_7 = f(u^{\frac{1}{2}}) - f\left(\frac{U^0 + U^{1,0}}{2}\right)$, $S_8 = a(\bar{u}^1) D_t \nabla u^1 - a(u^{\frac{1}{2}}) \nabla u^{\frac{1}{2}}$, $S_9 = b(\bar{u}^1) \nabla \bar{u}^1 - b(u^{\frac{1}{2}}) \nabla u^{\frac{1}{2}}$.

由泰勒展开可得

$$\| S_7 \|_0^2 \leq C\tau^3, \quad \| S_8 \|_0^2 + \| S_9 \|_0^2 \leq C\tau^4. \tag{29}$$

在方程(28)中, 令 $v = \frac{\xi^1}{\tau}$, $w = \frac{\nabla \xi^1}{\tau}$, 类似于式(27)的推导, 可得

$$\| \xi^1 \|_1 \leq Ch^2 + C\tau^2. \tag{30}$$

对 $n \geq 2$ 层, 它实际上是求解一个线性问题。对准确解 u^n, \mathbf{p}^n , 有

$$\begin{cases} L_1^n(u^n, v) = d_n(D_t u^n, v) + (\mathbf{p}^n, \nabla v) + e_n(\nabla u^n, v) - (f(\hat{u}^n), v) = 0, \\ L_2^n(\mathbf{p}^n, \mathbf{w}) = (a(\hat{u}^n) \nabla D_t u^n, \mathbf{w}) + (b(\hat{u}^n) \nabla \bar{u}^n, \mathbf{w}) - (\mathbf{p}^n, \mathbf{w}) = 0. \end{cases} \quad (31)$$

因为方程(8)与(31)中都含有已知函数 u , 记

$$R_1^n(u, v) = L_1^n(u^n, v) - L_1(u^n, v) = (f(u^n) - f(\hat{u}^n), v)。$$

用泰勒展开得 $\|f(u^n) - f(\hat{u}^n)\|_0^2 \leq C\tau^3$, 因此 $R_1^n(u, v)$ 为高阶量。记

$$\begin{aligned} R_2^n(\mathbf{p}, \mathbf{w}) &= L_2^n(\mathbf{p}^n, \mathbf{w}) - L_2(\mathbf{p}^n, \mathbf{w}) \\ &= (a(\hat{u}^n) \nabla D_t u^n + b(\hat{u}^n) \nabla \bar{u}^n, \mathbf{w}) - (a(u^n) \nabla u_t^n + b(u^n) \nabla u^n, \mathbf{w}) \\ &= (a(\hat{u}^n) \nabla D_t u^n - a(u^n) \nabla u_t^n + b(\hat{u}^n) \nabla \bar{u}^n - b(u^n) \nabla u_t^n, \mathbf{w}) = (S_n, \mathbf{w}), \end{aligned}$$

由泰勒展开得 $\|S_n\|_0^2 \leq C\tau^4$, 因此 $R_2^n(\mathbf{p}, \mathbf{w})$ 也是高阶量。

由方程(8)与(19)可得

$$0 = L_2(\mathbf{p}^n, \mathbf{w}) - L_2^n(\mathbf{P}^n, \mathbf{w}) = (L_2(\mathbf{p}^n, \mathbf{w}) - L_2^n(\mathbf{P}^n, \mathbf{w})) - R_2^n(\mathbf{p}, \mathbf{w})。 \quad (32)$$

记有限元误差 $e_u^n = (u - U)^n$, $e_p^n = (\mathbf{p} - \mathbf{P})^n$, 用泰勒展开有

$$\begin{aligned} &L_2^n(\mathbf{p}^n, \mathbf{w}) - L_2^n(\mathbf{P}^n, \mathbf{w}) \\ &= (a(\hat{u}^n) \nabla D_t u^n + b(\hat{u}^n) \nabla \bar{u}^n, \mathbf{w}) - (\mathbf{p}^n - \mathbf{P}^n, \mathbf{w}) - (a(\hat{U}^n) \nabla D_t U^n + b(\hat{U}^n) \nabla \bar{U}^n, \mathbf{w}) \\ &= (a(\hat{u}^n) \nabla D_t e_u^n + b(\hat{u}^n) \nabla \bar{e}_u^n, \mathbf{w}) - (e_p^n, \mathbf{w}) + ((a'(\hat{u}^n) \nabla D_t U^n + b'(\hat{u}^n) \nabla \bar{U}^n) \hat{e}_u^n, \mathbf{w}) \\ &\quad - \frac{1}{2} ((a''(\hat{u}^n) \nabla D_t U^n + b''(\hat{u}^n) \nabla \bar{U}^n) |\hat{e}_u^n|^2, \mathbf{w})。 \end{aligned}$$

因此, 引入线性化算子

$$\begin{aligned} A(e_u, e_p, v) &= d_n(D_t e_u^n, v) + (e_p^n, \nabla v) + e_n(\nabla e_u^n, v) - (f'(\hat{u}^n) \hat{e}_u^n, v), \\ B(e_u, e_p, \mathbf{w}) &= (a(\hat{u}^n) \nabla D_t e_u^n + b(\hat{u}^n) \nabla \bar{e}_u^n - e_p^n, \mathbf{w}) + (F^n \hat{e}_u^n, \mathbf{w}), \\ F^n &= a'(\hat{u}^n) \nabla D_t U^n + b'(\hat{u}^n) \nabla \bar{U}^n。 \end{aligned}$$

那么

$$\begin{cases} A(e_u, e_p, v) = R_1^n(u, v) + O(1) \|\hat{e}_u^n\|_{L_4}^2 \|\nabla v\|_{L_2}, \\ B(e_u, e_p, \mathbf{w}) = R_2^n(\mathbf{p}, \mathbf{w}) + O(1) \|\hat{e}_u^n\|_{L_4}^2 \|\mathbf{w}\|_{L_2}, \end{cases} \quad (33)$$

式中 A, B 是带变系数的双线性形式。构造 u, \mathbf{p} 的线性化有限元 U^*, \mathbf{P}^* , 满足

$$A(u - U^*, \mathbf{p} - \mathbf{P}^*, v) = 0, \quad B(u - U^*, \mathbf{p} - \mathbf{P}^*, \mathbf{w}) = 0。 \quad (34)$$

对于线性化问题(34), 类似式(27)、(30)的分析, 有

$$\|u^n - U^{*n}\|_1 + \|\mathbf{p}^n - \mathbf{P}^{*n}\|_0 \leq C(h^2 + \tau^2)。 \quad (35)$$

误差 $E_u = U^n - U^{*n}$, $E_p = \mathbf{P}^n - \mathbf{P}^{*n}$, 满足

$$\begin{cases} A(E_u, E_p, v) = R_1^n(U, v) + O(1) \|\hat{E}_u^n\|_{L_4}^2 \|\nabla v\|_{L_2}, \\ B(E_u, E_p, \mathbf{w}) = R_2^n(\mathbf{P}, \mathbf{w}) + O(1) \|\hat{E}_u^n\|_{L_4}^2 \|\mathbf{w}\|_{L_2}。 \end{cases} \quad (36)$$

为了得到误差 E_u, E_p 的超收敛结果, 首先估计 $\|\hat{E}_u^n\|_{L_4}^2$, 利用逆估计不等式和嵌入定理得

$$\|\hat{E}_u^n\|_{L_4}^2 \leq Ch^{-1} \|\hat{E}_u^n\|_{L_2}^2 \leq Ch^3。$$

因此

$$\|u^n - U^n\|_1 = \|u^n - U^{*n} + U^{*n} - U^n\|_1 \leq \|u^n - U^{*n}\|_1 + \|\hat{E}_u^n\|_1 \leq C(h^2 + \tau^2)。$$

由方程(31)的第 1 个式子易得

$$\|\mathbf{p}^n - \mathbf{P}^n\|_0 \leq C(h^2 + \tau^2)。$$

因此, 对任意的 $1 \leq n \leq N$, 式(22)成立。证毕。

注 若线性化有限元 U^* 有超收敛性, 则它对应的非线性有限元 U 有同样的性质。在线性化的全离散格式中, 对非线性函数使用前 2 层的已知解 U^{n-2}, U^{n-1} 计算本层在中点 $t^{n-\frac{1}{2}}$ 处的值 $\bar{U}^n = \frac{1}{2}(3U^{n-1} - U^{n-2})$, 每

次计算相当于求解一个线性问题,这在极大程度上提高了计算速度,同时也不会降低计算精度。

4 整体超收敛分析

构造插值后处理算子,将相邻的4个单元 $K_i(i=1, \dots, 4)$ 合并成一个新单元 \tilde{K} , 即 $\tilde{K} = \bigcup_i^4 K_i$ (见图1)。定

义 \tilde{K} 上的插值后处理算子 I_{2h}^2 和 Π_{2h}^2 , 满足

$$I_{2h}^2 u|_{\tilde{K}} \in P_2(\tilde{K}), \quad I_{2h}^2 u(Z_i) = u(Z_i), \quad i=2,3,4,5,7,8,$$

$$\Pi_{2h}^2 \mathbf{q}|_{\tilde{K}} = (\Pi_{2h}^2 q_1|_{\tilde{K}}, \Pi_{2h}^2 q_2|_{\tilde{K}}) \in P_1(\tilde{K}) \times P_1(\tilde{K}),$$

$$\int_{l_i} (\Pi_{2h}^2 q_1 - q_1) dy = 0, \quad i=1,4,5,$$

$$\int_{l_i} (\Pi_{2h}^2 q_2 - q_2) dx = 0, \quad i=7,9,11,$$

其中 $P_1(\tilde{K})$ 和 $P_2(\tilde{K})$ 分别是 \tilde{K} 上的一次和二次多项式。

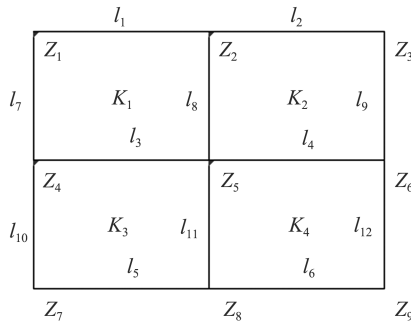


图1 新单元 \tilde{K}

Fig.1 New element \tilde{K}

引理 2^[8] 设函数 $u \in H^3(\Omega)$, $\mathbf{q} = (q_1, q_2) \in (H^2(\Omega))^2$, 则插值后处理算子 I_{2h}^2, Π_{2h}^2 , 满足

$$I_{2h}^2 I_h u = I_{2h}^2 u, \quad \|I_{2h}^2 u - u\|_1 \leq Ch^2 \|u\|_3, \quad \Pi_{2h}^2 \Pi_h \mathbf{q} = \Pi_{2h}^2 \mathbf{q}, \quad \|\Pi_{2h}^2 \mathbf{q} - \mathbf{q}\|_0 \leq Ch^2 \|\mathbf{q}\|_2.$$

利用引理 2, 对于半离散格式, 易得下面的整体超收敛结果。

定理 3 设 (u, \mathbf{p}) 和 (u_h, \mathbf{p}_h) 分别是方程(1)和(9)的解, 函数 $u, u_t \in H^3(\Omega)$, 且 $\mathbf{p}, \mathbf{p}_t \in (H^2(\Omega))^2$, 则

$$\|u - I_{2h}^2 u_h\|_1 \leq Ch^2, \quad \|\mathbf{p} - \Pi_{2h}^2 \mathbf{p}_h\|_0 \leq Ch^2.$$

证明 由于 $u - I_{2h}^2 u_h = u - I_{2h}^2 I_h u + I_{2h}^2 I_h u - I_{2h}^2 u_h$, 则 $\|u - I_{2h}^2 I_h u\|_1 = \|u - I_{2h}^2 u\|_1 \leq Ch^2 \|u\|_3$ 。

结合引理 2 易知

$$\|I_{2h}^2 I_h u - I_{2h}^2 u_h\|_1 \leq Ch^2 \left(\|u\|_3 + \|\mathbf{p}\|_2^2 + \int_0^t (\|\mathbf{p}\|_2^2 + \|\mathbf{p}_t\|_2^2) ds \right)^{\frac{1}{2}}.$$

因此 $\|u - I_{2h}^2 u_h\|_1 \leq Ch^2$, 同理可得 $\|\mathbf{p} - \Pi_{2h}^2 \mathbf{p}_h\|_0 \leq Ch^2$ 。证毕。

对于全离散格式下的有限元, 同样有整体超收敛结果。

定理 4 设 (u, \mathbf{p}) 和 (U_h, \mathbf{P}_h) 分别是方程(8)和方程(19)–(21)的解, 函数 $u, u_t \in L^\infty(0, T; H^3(\Omega))$ 且

$\mathbf{p} \in L^\infty(0, T; (H^2(\Omega))^2)$, 则对任意的 $1 \leq n \leq N$, 有

$$\|u^n - I_{2h}^2 U^n\|_1 \leq C(h^2 + \tau^2), \quad \|\mathbf{p}^n - \Pi_{2h}^2 \mathbf{P}^n\|_0 \leq C(h^2 + \tau^2).$$

5 数值实验

为了简化计算, 在方程(1)中, 取有界区域 $\Omega = (0, 1) \times (1, 0)$, 函数 $a(u) = b(u) = \sin u$, $d(t) = 1$, $f(u) =$

$u+4 \sin ue^t(x+y-x^2-y^2)-2 \cos ue^{2t}[(1-2x)^2(y-y^2)^2+(1-2y)^2(x-x^2)^2]+e^t[(1-2x)(y-y^2)+(1-2y)(x-x^2)]$, $e(t)=(1,1)$, 则方程(1)的真解为 $u=e^t(x-x^2)(y-y^2)$ 。为验证收敛、超收敛结果,取每个方向上都有 $m+1$ 个节点的一致矩形剖分, $\tau=\frac{1}{5m}$ 时, $t=0.25, 0.5, 0.75, 1$ 时的数值结果如表 1—2。可以看出,当 $h \rightarrow 0$ 时, $\|u^n-U^n\|_1$ 和 $\|p^n-P^n\|_0$ 的收敛阶都是 $O(h)$; $\|u^n-I_{2h}^2 U^n\|_1$ 和 $\|p^n-\Pi_{2h}^2 P^n\|_0$ 的收敛阶都是 $O(h^2)$, 这和本文的理论分析是一致的。

表 1 数值实验结果(真解为 u)
Table 1 Numerical results (exact solution u)

| t | $m \times n$ | $\ u^n-U^n\ _1$ | | $\ I_h u^n-U^n\ _1$ | | $\ u^n-I_{2h}^2 U^n\ _1$ | |
|------|--------------|-----------------|---------|---------------------|---------|--------------------------|---------|
| | | 数值 | 收敛阶 | 数值 | 收敛阶 | 数值 | 收敛阶 |
| 0.25 | 4×4 | 0.047 7 | | 0.004 5 | | 0.105 4 | |
| | 8×8 | 0.023 8 | 1.010 5 | 0.001 3 | 1.925 1 | 0.028 4 | 1.896 2 |
| | 16×16 | 0.012 0 | 1.002 9 | 0.000 3 | 1.918 8 | 0.007 4 | 1.977 7 |
| | 32×32 | 0.005 9 | 1.000 7 | 0.000 1 | 1.857 5 | 0.001 7 | 1.994 9 |
| 0.50 | 4×4 | 0.061 9 | | 0.009 2 | | 0.138 9 | |
| | 8×8 | 0.030 9 | 1.008 1 | 0.002 5 | 1.914 9 | 0.037 1 | 1.909 6 |
| | 16×16 | 0.015 5 | 1.002 2 | 0.000 7 | 1.908 6 | 0.009 4 | 1.981 2 |
| | 32×32 | 0.007 7 | 1.000 5 | 0.000 2 | 1.851 5 | 0.002 3 | 1.995 6 |
| 0.75 | 4×4 | 0.079 5 | | 0.014 7 | | 0.180 2 | |
| | 8×8 | 0.039 5 | 1.006 5 | 0.003 9 | 1.904 3 | 0.047 6 | 1.920 2 |
| | 16×16 | 0.019 6 | 1.001 7 | 0.001 1 | 1.897 4 | 0.012 0 | 1.983 8 |
| | 32×32 | 0.009 9 | 1.000 4 | 0.000 3 | 1.823 6 | 0.002 9 | 1.995 9 |
| 1 | 4×4 | 0.101 9 | | 0.021 0 | | 0.232 8 | |
| | 8×8 | 0.050 6 | 1.006 2 | 0.005 6 | 1.892 7 | 0.061 2 | 1.926 5 |
| | 16×16 | 0.025 3 | 1.001 5 | 0.001 5 | 1.884 3 | 0.015 5 | 1.985 5 |
| | 32×32 | 0.012 7 | 1.000 4 | 0.000 4 | 1.803 7 | 0.003 9 | 1.996 0 |

表 2 数值实验结果(中间变量 p)
Table 2 Numerical results (auxiliary variable p)

| t | $m \times n$ | $\ p^n-P^n\ _0$ | | $\ \Pi_h p^n-P^n\ _0$ | | $\ p^n-\Pi_{2h}^2 P^n\ _0$ | |
|------|--------------|-----------------|---------|--------------------------|---------|----------------------------|---------|
| | | 数值 | 收敛阶 | 数值 | 收敛阶 | 数值 | 收敛阶 |
| 0.25 | 4×4 | 0.010 9 | | $4.984 3 \times 10^{-4}$ | | 0.014 7 | |
| | 8×8 | 0.005 7 | 0.979 2 | $0.623 0 \times 10^{-4}$ | 2.106 1 | 0.004 7 | 1.806 8 |
| | 16×16 | 0.002 9 | 0.994 5 | $0.148 7 \times 10^{-4}$ | 2.078 8 | 0.001 2 | 1.957 2 |
| | 32×32 | 0.001 6 | 0.998 5 | $0.107 0 \times 10^{-4}$ | 1.820 6 | 0.000 3 | 1.993 7 |
| 0.5 | 4×4 | 0.015 3 | | $0.686 6 \times 10^{-3}$ | | 0.021 3 | |
| | 8×8 | 0.007 9 | 0.962 9 | $0.161 2 \times 10^{-3}$ | 2.090 3 | 0.006 3 | 1.787 3 |
| | 16×16 | 0.003 9 | 0.989 9 | $0.038 3 \times 10^{-3}$ | 2.072 7 | 0.001 7 | 1.937 6 |
| | 32×32 | 0.002 1 | 0.997 5 | $0.010 0 \times 10^{-3}$ | 1.943 6 | 0.000 4 | 1.988 0 |
| 0.75 | 4×4 | 0.021 6 | | $1.150 6 \times 10^{-3}$ | | 0.029 1 | |
| | 8×8 | 0.011 3 | 0.952 3 | $0.294 7 \times 10^{-3}$ | 2.080 2 | 0.008 9 | 1.717 1 |
| | 16×16 | 0.005 6 | 0.984 9 | $0.070 5 \times 10^{-3}$ | 2.065 2 | 0.002 3 | 1.917 0 |
| | 32×32 | 0.002 9 | 0.996 2 | $0.017 2 \times 10^{-3}$ | 2.021 6 | 0.000 6 | 1.982 2 |
| 1 | 4×4 | 0.031 3 | | $2.028 1 \times 10^{-3}$ | | 0.038 7 | |
| | 8×8 | 0.016 5 | 0.920 2 | $0.480 1 \times 10^{-3}$ | 2.078 2 | 0.013 1 | 1.570 5 |
| | 16×16 | 0.008 5 | 0.979 6 | $0.115 5 \times 10^{-3}$ | 2.055 6 | 0.003 5 | 1.894 9 |
| | 32×32 | 0.004 2 | 0.994 9 | $0.028 2 \times 10^{-3}$ | 2.031 6 | 0.000 9 | 1.976 2 |

参考文献:

[1] 施德明. 非线性湿气迁移方程的初边值问题[J]. 应用数学学报, 1990, 13(1): 31-38.

- SHI Deming. On the initial boundary value problem of nonlinear moisture migration equation [J]. *Acta Mathematicae Applicatae Sinica*, 1990, 13(1):31-38.
- [2] 周家全,许超,裴丽芳,等. 一类非线性 Sobolev-Galpern 型湿气迁移方程的新的质量集中非协调有限元方法[J]. *生物数学学报*, 2013, 28(2):324-330.
- ZHOU Jiaquan, XU Chao, PEI Lifang, et al. The lumped mass NFE method for a kind of nonlinear Sobolev-Galpern type equations of moisture migration on anisotropic meshes[J]. *Jornal of Biomathematics*, 2013, 28(2):324-330.
- [3] 陈宝凤,石玉. 非线性 Sobolev-Galpern 型湿气迁移方程的非协调 Carey 元超收敛分析[J]. *数学的实践与认识*, 2014, 44(18):309-314.
- CHEN Baofeng, SHI Yu. Superconvergence analysis of the nonconforming quasi-Carey finite element for nonlinear Sobolev-Galpern type moisture migration equation[J]. *Mathematics in Practice and Theory*, 2014, 44(18):309-314.
- [4] 罗振东. 混合有限元方法基础及其应用[M]. 北京:科学出版社, 2006:67-196.
- LUO Zhendong. Fundamentals and applications of mixed finite element method[M]. Beijing: Science Press, 2006:67-196.
- [5] 陈绍春,陈红如. 二阶椭圆问题新的混合元格式[J]. *计算数学*, 2010, 32(2):213-218.
- CHEN Shaochun, CHEN Hongru. A new mixed element scheme for second order elliptic problems[J]. *Mathematica Numerica Sinica*, 2010, 32(2):213-218.
- [6] 石东洋,李明浩. 二阶椭圆问题一种新格式的高精度分析[J]. *应用数学学报*, 2014, 37(1):45-58.
- SHI Dongyang, LI Minghao. High accuracy analysis of new schemes for second order elliptic problem [J]. *Mathematicae Applicatae Sinica*, 2014, 37(1):45-58.
- [7] SHI Dongyang, ZHANG Yadong. High accuracy analysis of a new nonconforming mixed finite element scheme for Sobolevequation[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2011, 218(7):3176-3186.
- [8] SHI Dongyang, YAN Fengna, WANG Junjun. Unconditional superconvergence analysis of a new mixed finite element method for nonlinear Sobolev equation[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2016, 274:182-194.
- [9] PANI A. An H^1 -Galerkin mixed finite element methods for parabolic partial differential equations [J]. *Siam Journal On Numerical Analysis*, 1998, 35(2):712-727.
- [10] SHI Dongyang, WANG Junjun. Superconvergence analysis of an H^1 -Galerkin mixed finite element method for Sobolev equations[J]. *Computers & Mathematics with Applications*, 2016(72):1590-1602.
- [11] 谢华朝,李素丽,秦健. 非线性湿气迁移方程 H^1 -Galerkin 混合有限元的超收敛分析[J]. *应用数学学报*, 2019, 42(6):813-829.
- XIE Huazhao, LI Suli, QIN Jian. Superconvergence analysis of a H^1 -Galerkin mixed element finite element method for nonlinear moisture migration equation[J]. *Mathematicae Applicatae Sinica*, 2019, 42(6):813-829.
- [12] EWING R. Time-stepping Galerkin methods for nonlinear Sobolev partial-differential equations [J]. *Siam Journal on Numerical Analysis*, 1978, 15(6):1125-1150.
- [13] GU Haiming. Characteristic finite element methods for nonlinear Sobolev equations [J]. *Applied Mathematics and Computation*, 1999, 102(1):51-62.
- [14] SHI Dongyang, TANG Qili, GONG Wei. A low order characteristic-nonconforming finite element method for nonlinear Sobolev equation with convection-dominated term[J]. *Mathematics and Computers in Simulation*, 2015, 114:25-36.
- [15] BAO Weizhu, CAI Yongyong. Uniform error estimates of finite difference methods for the nonlinear Schrodinger equation with wave operator[J]. *Siam Journal On Numerical Analysis*, 2012, 50(2):492-521.
- [16] LI Buyang, SUN Weiwei. Unconditional convergence and optimal error estimates of a Galerkin-mixed FEM for incompressible miscible flow in porous media[J]. *Siam Journal on Numerical Analysis*, 2013, 51(4):1959-1977.
- [17] SHI Dongyang, WANG Junjun. Unconditional superconvergence analysis of conforming finite element for nonlinear parabolic equation[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2017, 294:216-226.
- [18] 陈传森. 有限元超收敛构造理论[M]. 长沙:湖南科技出版社, 2001:261-307.
- CHEN Chuanmiao. Theory of superconvergence construction for finite elements [M]. Changsha: Hunan Science and Technology Press, 2001:261-307.
- [19] 林群,严宁宁. 高效有限元构造与分析[M]. 保定:河北大学出版社, 1996:92-188.
- LIN Qun, YAN Ningning. Efficient finite element construction and analysis[M]. Baoding: Hebei University Press, 1996:92-188.
- [20] HALE J. Ordinary Differential equations[M]. New York: Willey Inter Science, 1969:36-136.
- [21] THOMEE V. Galerkin finite element methods for parabolic problems[M]. New York: Springer, 2006:76-183.