文章编号:1671-9352(2026)04-0009-04 DOI:10.6040/j.issn.1671-9352.0.2024.104

关于满足条件(PWP_K)的 S-系

乔虎生[1,2],王丽[1*]
(1.西北师范大学数学与统计学院, 甘肃 兰州 730070; 2.甘肃省数学与统计学基础学科研究中心, 甘肃 兰州 730070)

摘要:设 K 是幺半群 S 的理想,研究满足条件(PWP_K)的 S-系的基本性质。建立 S-系的余直积,有向上极限,Rees 短正合序列与条件(PWP_K)的关系,并利用 S-满同态的纯性给出条件(PWP_K)的一个刻画。

关键词:条件(PWP_K);理想;S-系;幺半群
中图分类号:O152 **文献标志码**:A
引用格式:乔虎生,王丽. 关于满足条件(PWP_K)的 S-系[J]. 山东大学学报(理学版),2026,61(4):9-12.

On S-acts satisfying condition (PWP_K)

QIAO Husheng[1,2], WANG Li[1*]
(1. College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou 730070, Gansu, China;
2. Gansu Provincial Research Center for Basic Disciplines of Mathematics and Statistics, Lanzhou 730070, Gansu, China)

Abstract: Let K be an ideal of a monoid S. The basic properties of the S-acts satisfying condition (PWP_K) are investigated. The relations between coproducts, directed colimits, Rees short exact sequences, and condition (PWP_K) are established respectively. A characterization of the condition (PWP_K) is given by using the purity of S-epimorphism.

Key words: condition (PWP_K); ideal; S-act; monoid

0 引言

本文用右 S-系表述,与左 S-系本质上相同,相关结论不再特别说明。

设 S 是幺半群,1 是其单位元,A 是非空集合,若有 $A\times S$ 到 A 的映射 $f:A\times S\to A$, $(a,s)\mapsto as$,满足

$$(as)t=a(st),\quad a1=a,\quad \forall s,t\in S,\quad \forall a\in A,$$

则称(A,f)是右 S-系[1],或称 S 右作用于 A 上。

设 A,B 是右 S-系,称映射 $g:A\to B$ 为从 A 到 B 的右 S-同态,如果满足

$$g(as)=g(a)s,\quad \forall a\in A,\quad \forall s\in S。$$

所有右 S-系及右 S-系之间的同态构成一个范畴,称为右 S-系范畴。在 S-系范畴中,直积和余直积分别是卡氏积和不交并,分别记为$\prod\limits_{j\in J}A_j$和$\coprod\limits_{j\in J}A_j$。

设 ρ 是 S-系 A 上的等价关系,若 ρ 满足

$$(a,b)\in\rho\Rightarrow(as,bs)\in\rho,\quad \forall s\in S,\quad \forall a,b\in A,$$

则称 ρ 为 A 上的同余[1]。在 A 关于同余 ρ 的商集 A/ρ 上定义右 S-作用如下:

$$(a\rho)s=(as)\rho,\quad \forall s\in S,\quad \forall a\in A,$$

则容易验证 A/ρ 关于上述右 S-作用构成一个 S-系,称为 A 关于 ρ 的商系。

收稿日期:2024-04-02; **网络出版时间**:2025-02-28
基金项目:甘肃省科技厅基础研究创新群体项目(23JRRA684)
第一作者:乔虎生(1974—),男,教授,博士,研究方向为半群代数理论. E-mail:gsqiaohsh@163.com
*通信作者:王丽(1997—),女,硕士研究生,研究方向为半群代数理论. E-mail:3276215897@qq.com

设 $B\leqslant A$,如下定义 A 上的关系:

$$a\rho_B b\Leftrightarrow a=b \text{ 或 } a,b\in B。$$

容易验证 ρ_B 是 A 上的同余,称其为由 B 决定的 Rees 同余,简称为 Rees 同余。称商系 A/ρ_B 为 Rees 商。

设 S 是含零元幺半群,设 $f:L\to M$ 和 $g:M\to N$ 都是右 S-同态,令

$$\ker f=\{(l_1,l_2)\in L\times L\mid f(l_1)=f(l_2)\}$$

且 $K_{\mathrm{Im}\,f}=(f(L)\times f(L))\cup 1_M$,其中,$1_M$ 是上的恒等同余,显然 $\ker f$ 和 $K_{\mathrm{Im}\,f}$分别是 L 和 M 的同余,称右 S-系序列

$$\cdots\to L\xrightarrow{f}M\xrightarrow{g}N\to\cdots$$

在 M 处正合,如果 $\ker g=K_{\mathrm{Im}\,f}$。称右 S-系序列

$$0\to L\xrightarrow{f}M\xrightarrow{g}N\to 0 \tag{1}$$

是一个 Rees 短正合序列,如果序列(1)在 L,M 和 N 处都正合。进一步地,称右 S-系序列(1)是右可裂的,如果存在右 S-系同态 $g':N\to M$,使得 $gg'=1_N$,其中 1_N 是 N 上的恒等同余。

称右 S-系 A 满足条件(PWP)[2],如果对任意的 $s\in S$,任意的 $a,a'\in A$,若 $as=a's$,则存在 $a''\in A$, $u,v\in S$,使得 $a=a''u$, $a'=a''v$, $us=vs$。

1 主要结果

受文献[2-3]启发,给出定义 1。

定义 1 设 S 是幺半群,K 是 S 的右理想,称右 S-系 A 满足条件(PWP_K),如果对任意的 $s\in S$,任意的 $a,a'\in A$,若 $as=a's$,则存在 $a''\in A$, $u,v\in K$,使得 $a=a''u$, $a'=a''v$, $us=vs$。

如果将右理想 K 取成 S,那么条件(PWP_K)与条件(PWP)等价。

命题 1 设 K 是 S 的右理想,一元右 S-系 Θ 满足条件(PWP_K)。

证明 设 $\Theta=\{\theta\}$,对任意 $u=v\in K$,显然有 $\theta=\theta u=\theta v$, $us=vs$,故一元右 S-系 Θ 满足条件(PWP_K)。

设 S 为幺半群,I 是 S 的真右理想,x,y,z 是 3 个符号,

$$A(I)=(z,I)\cup\{(x,s)\mid s\in S-I\}\cup\{(y,s)\mid s\in S-I\}。$$

按自然的方式可定义 S 在 $A(I)$上的右作用:

$$(z,t)s=(z,ts),$$

$$(x,t)s=\begin{cases}(x,ts), & ts\in S-I,\\ (z,ts), & ts\in I,\end{cases}$$

$$(y,t)s=\begin{cases}(y,ts), & ts\in S-I,\\ (z,ts), & ts\in I,\end{cases}$$

则 $A(I)$是一个右 S-系[4-5]。

定理 1 设 K 是幺半群 S 的右理想,I 是 S 的真右理想,则 $A(I)$不满足条件(PWP_K)。

证明 对任意的 $i\in I$,有$(x,1)i=(y,1)i$,若$(x,1)=(w,p)u$,w 只能取 x,同理$(y,1)=(w,p)v$,w 只能取 y,故不存在$(w,p)\in A(I)$ $(w\in\{x,y,z\}$, $p\in S)$以及 $u,v\in K$ 使得$(x,1)=(w,p)u$, $(y,1)=(w,p)v$, $ui=vi$。

定义 2[2] 设 $\varphi:B\to A$ 是一个右 S-满同态,称 φ 是拟 2-纯的,如果对任意的 $a,a'\in A$,任意的 $s\in S$,若 $as=a's$,则存在 $b,b'\in B$,使得 $\varphi(b)=a$, $\varphi(b')=a'$且 $bs=b's$。

定理 2 设 K 是幺半群 S 的右理想,$\varphi:B\to A$ 是一个右 S-满同态,且 B 满足条件(PWP_K),则 A 满足条件(PWP_K)当且仅当 φ 是拟 2-纯的。

证明 *必要性*。设 $\varphi:B\to A$ 是一个右 S-满同态,且 A 满足条件(PWP_K),若任意的 $a,a'\in A$,任意的 $s\in S$ 满足 $as=a's$,则由 A 满足条件(PWP_K)知存在 $a''\in A$, $u,v\in K$,使得 $a=a''u$, $a'=a''v$ 且 $us=vs$。又由于 φ 是满同态,因此,存在 $b''\in B$ 使得 $\varphi(b'')=a''$, $a=a''u=\varphi(b''u)$, $a'=a''v=\varphi(b''v)$且 $b''us=b''vs$,取 $b=b''u$, $b'=b''v$,即 $bs=b's$,则 φ 是拟 2-纯的。

充分性。假设右 S-系满同态 $\varphi:B\to A$ 是拟 2-纯的,并且 B 满足条件(PWP_K)。若对任意的 $a,a'\in A$,任意的 $s\in S$,在 A 中有 $as=a's$,则存在 $b,b'\in B$,使得 $\varphi(b)=a$, $\varphi(b')=a'$ 且 $bs=b's$。又因为 B 满足条件(PWP_K),所以存在 $b''\in B$, $u,v\in K$,使得 $b=b''u$, $b'=b''v$ 且 $us=vs$,因此在 A 中可得,$a=\varphi(b)=\varphi(b'')u$, $a'=\varphi(b')=\varphi(b'')v$,即 A 满足条件(PWP_K)。

定理 3　设 K 是幺半群 S 的右理想,$A_j(j\in J)$ 是右 S-系,$A=\coprod_{j\in J}A_j$ 满足条件(PWP_K)当且仅当对任意的 $j\in J$, A_j 满足条件(PWP_K)。

证明　*必要性*。设对任意的 $s\in S$,任意的 $a,a'\in A_j$, $j\in J$,有 $as=a's$。因为 $A_j\subseteq A$, A 满足条件(PWP_K),则存在 $a''\in A$, $u,v\in K$,使得 $a=a''u$, $a'=a''v$, $us=vs$。如果 $a''\in A_k$,且 $k\neq j\in J$,那么由余直积的定义可知 $a\in A_k$,矛盾,故 $a''\in A_j$,因此 $A_j(j\in J)$ 满足(PWP_K)。

充分性。假设在 $A=\coprod_{j\in J}A_j$ 中 $as=a's$, $a,a'\in A$, $s\in S$,由余直积的定义可知存在 $j\in J$,使得 $a,a'\in A_j$。因为 A_j 满足条件(PWP_K),所以存在 $a''\in A_j\subseteq A$, $u,v\in K$,使得 $a=a''u$, $a'=a''v$ 且 $us=vs$。故 A 满足条件(PWP_K)。

引理 1[6]　右 S-系的任意正向系$(A_j,\phi_{j,k})$的有向上极限存在,并且可以表示为$(A/\theta,(\phi_j)_{j\in J})$,其中

(1) $A=\coprod_{j\in J}A_j$;

(2) $a\theta a'(a\in A_j,\ a'\in A_k)$当且仅当 $\phi_{j,l}(a)=\phi_{k,l}(a')$ 在 A_l 中成立,其中 $l\geqslant j,k$;

(3) 对所有的 $j\in J$ 和 $a\in A_j$, $\phi_j(a)=[a]_\theta$。

定理 4　设 K 是幺半群 S 的右理想,则满足条件(PWP_K)的右 S-系关于有向上极限封闭。

证明　设$(A_j,\phi_{j,k})$是以 J 为有向指标集的满足条件(PWP_K)的右 S-系的正向系,其有向上极限为(A,α_j), $j,k\in J$。假设在 A 中有 $as=a's$,其中 $a,a'\in A$, $s\in S$,则存在 $j,k\in J$, $a_j\in A_j$, $a_k\in A_k$,使得 $a=\alpha_j(a_j)$, $a'=\alpha_k(a_k)$,则 $\alpha_j(a_j)s=\alpha_k(a_k)s$。因为 J 是有向指标集,所以由引理 1 知,存在 $l\in J$ 且 $l\geqslant j,k$,使得在 A_l 中有 $\phi_{j,l}(a_j)s=\phi_{k,l}(a_k)s$。又因为 A_l 满足条件(PWP_K),所以存在 $a''\in A_l$, $u,v\in K$,使得 $\phi_{j,l}(a_j)=a''u$, $\phi_{k,l}(a_k)=a''v$, $us=vs$。于是 $a=\alpha_j(a_j)=\alpha_l\phi_{j,l}(a_j)=\alpha_l(a'')u$,同理有 $a'=\alpha_l(a'')v$。又 $\alpha_l(a'')\in A$,所以 A 满足条件(PWP_K)。

定理 5　设 S 是含零元幺半群,K 是 S 的右理想,且右 S-系 Rees 短正合序列

$$0\to L\xrightarrow{f}M\xrightarrow{g}N\to 0 \tag{2}$$

是右可裂的,若 L 和 N 是满足条件(PWP_K),则 M 也满足条件(PWP_K)。

证明　设 L 和 N 是满足条件(PWP_K)的右 S-系,若在 M 中有 $ms=m's$, $m,m'\in M$, $s\in S$,则在 N 中易得 $g(m)s=g(m')s$。因为 N 满足条件(PWP_K),所以存在 $n''\in N$, $u,v\in K$ 使得 $g(m)=n''u$, $g(m')=n''v$ 且 $us=vs$。进一步由 g 的满性知,存在 $m''\in M$,使得 $g(m'')=n''$,从而 $g(m)=g(m''u)$, $g(m')=g(m''v)$,故 $(m,m''u)$,$(m',m''v)\in\ker g=K_{\mathrm{Im}\,f}$。现在分以下 4 种情形讨论。

情形 1　若 $m=m''u$, $m'=m''v$,则 M 也满足条件(PWP_K)。

情形 2　若 $m=m''u$, $(m',m''v)\in\mathrm{Im}\,f\times\mathrm{Im}\,f$,则存在 $l'\in L$,使得 $m'=f(l')$。因为正合序列(2)是右可裂的,所以 $\mathrm{Im}\,f$ 是 M 的直和项,从而使得 $m''\in\mathrm{Im}\,f$,于是存在 $l''\in L$,使得 $m''=f(l'')$。因此,在 M 中有 $f(l'')us=m''us=ms=m's=f(l')s$。又因为 f 是单的,所以在 L 中有 $l''us=l's$。再由 L 满足条件(PWP_K)知,存在 $l\in L$, $t,t'\in K$,使得 $l''u=lt$, $l'=lt'$ 且 $ts=t's$,进而在 M 中得 $m=m''u=f(l'')u=f(l)t$, $m'=f(l')=f(l)t'$,即 M 满足条件(PWP_K)。

情形 3　若$(m,m''u)\in\mathrm{Im}\,f\times\mathrm{Im}\,f$ 且 $m'=m''v$,与情形 2 同理可得 M 满足条件(PWP_K)。

情形 4　若$(m,m''u)$,$(m',m''v)\in\mathrm{Im}\,f\times\mathrm{Im}\,f$,则存在 $l,l'\in L$,使得 $f(l)=m$, $f(l')=m'$,从而在 M 中有 $f(ls)=f(l)s=ms=m's=f(l')s=f(l's)$。由 f 的单性可知,在 L 中有 $ls=l's$,因为 L 满足条件(PWP_K),所以存在 $l''\in L$, $t,t'\in K$,使得 $l=l''t$, $l'=l''t'$ 且 $ts=t's$,因此,在 M 中有 $m=f(l)=f(l'')t$, $m'=f(l')=f(l'')t'$,故 M 满足条件(PWP_K)。

由文献[7-8]可得到定理 6。

定理 6 设 S 是幺半群,K 是 S 的右理想,ρ 是 S 上的右同余,S/ρ 满足条件(PWP_K)当且仅当任意的 $x,y\in S$, $t\in S$,若 $xt\rho yt$,则存在 $u,v\in K$,使得 $ut=vt$,$x\rho u$,$y\rho v$。

证明 必要性。设 $x,y\in S$, $t\in S$,若 $xt\rho yt$,则$[x]_\rho t=[y]_\rho t$,因为 S/ρ 满足条件(PWP_K),则存在 $u',v'\in K$,存在$[z]_\rho\in S/\rho$ 使得 $u't=v't$, $[x]_\rho=[z]_\rho u'=[zu']_\rho$, $[y]_\rho=[z]_\rho v'=[zv']_\rho$, $zu't=zv't$。令 $u=zu'$, $v=zv'$,则有 $ut=vt$,$x\rho u$,$y\rho v$。

充分性。设$[x]_\rho t=[y]_\rho t$,则 $xt\rho yt$,由假设知存在 $u,v\in K$,使得 $ut=vt$,$x\rho u$,$y\rho v$,则$[x]_\rho=[1]_\rho u$, $[y]_\rho=[1]_\rho v$,故 S/ρ 满足条件(PWP_K)。

定理 7 设 K 是幺半群 S 的右理想,下述条件等价:

(1) 所有循环右 S-系满足条件(PWP_K);

(2) 所有单循环右 S-系满足条件(PWP_K);

(3) 对任意的 $x,y\in S$, $t\in S$,存在 $u,v\in K$,使得 $x\rho(xt,yt)u$, $y\rho(xt,yt)v$,且 $ut=vt$。

证明 (1)⇒(2)显然。

(2)⇒(3)。假设任意的 $x,y\in S$, $t\in S$, $S/\rho(xt,yt)$满足条件(PWP_K),因为 $xt\rho(xt,yt)yt$,故存在 $u,v\in K$,使得 $ut=vt$,$x\rho(xt,yt)u$,$y\rho(xt,yt)v$。

(3)⇒(1)。设 ρ 是 S 上的右同余,且 $xt\rho yt$,$x,y\in S$, $t\in S$,由题设知存在 $u,v\in K$,使得 $ut=vt$,$x\rho(xt,yt)u$,$y\rho(xt,yt)v$,因为 $xt\rho yt$,所以 $\rho(xt,yt)\subseteq\rho$,则 $x\rho u$,$y\rho v$,故 S/ρ 满足条件(PWP_K)。

由文献[9],关于条件(PWP_K),有下面的定理 8。

定理 8 设 S 是幺半群,K 是 S 的右理想,若$\prod_{j\in J}A_j$ 满足条件(PWP_K),则对任意 $j\in J$, A_j 满足条件(PWP_K)。

证明 假设$\prod_{j\in J}A_j$ 满足条件(PWP_K),设 $a_js=a'_js$, $a_j,a'_j\in A_j$, $j\in J$, $s\in S$。对每一个 $k\in J$ 且 $k\neq j$,取定元素 $a_k\in A_k$,令

$$b_j=\begin{cases}a_k, & k\neq j,\\ a_j, & k=j,\end{cases}\qquad b'_j=\begin{cases}a_k, & k\neq j,\\ a'_j, & k=j,\end{cases}$$

则在$\prod_{j\in J}A_j$ 中有$(b_j)_{j\in J}s=(b'_j)_{j\in J}s$。根据已知条件,存在$(a''_j)_{j\in J}\in\prod_{j\in J}A_j$, $u,v\in K$ 使得$(b_j)_{j\in J}=(a''_j)_{j\in J}u$, $(b'_j)_{j\in J}=(a''_j)_{j\in J}v$ 且 $us=vs$。因此,有 $a_j=a''_ju$, $a'_j=a''_jv$,即 A_j 满足条件(PWP_K)。

参考文献:

[1] 刘仲奎,乔虎生. 半群的 S-系理论[M]. 北京:科学出版社,2008:1-2.
LIU Zhongkui, QIAO Husheng. The S-act theory of semigroups[M]. Beijing: Science Press, 2008:1-2.

[2] LIANG Xingliang, LUO Yanfeng. On a generalization of condition (PWP)[J]. Bulletin of Iranian Mathematical Society, 2016, 42(5):1057-1076.

[3] 梁星亮,党允,陈学莹. 关于满足条件(P_I)的 S-系[J]. 山东大学学报(理学报),2023,58(8):6-12.
LIANG Xingliang, DANG Yun, CHEN Xueying. On S-acts satisfying condition (P_I)[J]. Journal of Shandong University (Natural Science), 2023, 58(8):6-12.

[4] LIU Zhongkui. A characterization of regular monoids by flatness of left acts[J]. Semigroup Forum, 1993, 46(1):85-89.

[5] BULMAN-FLEMING S. Flat and strongly flat S-systems[J]. Communications in Algebra, 1992, 20(9):2553-2567.

[6] 乔虎生,刘仲奎. 半群引论[M]. 北京:科学出版社,2019:135-136.
QIAO Husheng, LIU Zhongkui. An introduction to semigroups[M]. Beijing: Science Press, 2019:135-136.

[7] LIU Zhongkui. Characterization of monoids by condition (P) of cyclic left acts[J]. Semigroup Forum, 1994, 49(1):31-39.

[8] 雷燕,乔虎生. 关于满足条件(P′)的循环 S-系[J]. 山东大学学报(理学版),2021,56(8):49-52.
LEI Yan, QIAO Husheng. On the cyclic S-acts satisfying condition (P′)[J]. Journal of Shandong University (Natural Science), 2021, 56(8):49-52.

[9] 乔虎生,张雪倩. 关于条件(IE)的研究[J]. 山东大学学报(理学版),2025,60(11):1-5.
QIAO Husheng, ZHANG Xueqian. Some studies on condition (IE)[J]. Journal of Shandong University (Natural Science), 2025, 60(11):1-5.

(编辑:陈丽萍)