山东大学学报(理学版)2026 年 4 月 第 61 卷 第 4 期
Journal of Shandong University(*Natural Science*), Vol.61, No.4, 2026 http://lxbwk.njournal.sdu.edu.cn

文章编号:1671-9352(2026)04-0078-06 DOI:10.6040/j.issn.1671-9352.0.2024.107

涉及重级零点的有理函数值分布

杨拍[1],林虎丽[1],杨锦华[2]
(1.成都信息工程大学应用数学学院, 四川 成都 610225; 2.新疆师范大学数学科学学院, 新疆 乌鲁木齐 830017)

摘要:设 n 为正整数,$f(z)$ 是复平面 $\mathbf{C}$ 内的一个亚纯函数,只有重级零点,如果对任意 $z\in\mathbf{C}$,都有 $f'(z)\neq z^n$ 成立,那么 $f(z)$ 为特定形式的有理函数。

关键词:有理函数;亚纯函数;值分布;重级零点
中图分类号:O174.5 **文献标志码**:A
引用格式:杨拍,林虎丽,杨锦华. 涉及重级零点的有理函数值分布[J]. 山东大学学报(理学版),2026,61(4):78-83.

Value distribution of rational function with multiple zero

YANG Pai[1], LIN Huli[1], YANG Jinhua[2]
(1. College of Applied Mathematics, Chengdu University of Information Technology, Chengdu 610225, Sichuan, China; 2. School of Mathematical Sciences, Xinjiang Normal University, Urumqi 830017, Xinjiang, China)

Abstract: Let $n\geqslant 1$ be an integer, and $f(z)$ be a meromorphic function in complex plane, whose zeros are multiple. If $f'(z)\neq z^n$ for each $z\in\mathbf{C}$, then $f(z)$ must be restricted to specific forms of rational function.

Key words: rational function; meromorphic function; value distribution; multiple zeros

0 引言

亚纯函数值分布理论是亚纯函数理论中具有深刻而完美理论的一个分支。初等代数的一个基本问题是求多项式的零点,19 世纪末,一些理论和实际问题的研究往往需要寻求较为广泛的函数类——整函数或亚纯函数的的根及根的分布等问题,即对于整函数或亚纯函数与任意复数,研究方程在复平面内能否有根以及根的多少与分布等问题,这就是函数值分布论研究的主要内容。近代亚纯函数值分布理论亦称奈望林纳理论,是由芬兰数学家奈望林纳于 20 世纪 20 年代创立[1],他还建立 2 个基本定理且引入新的概念。亚纯函数值分布论取得不断地发展与完善,成为复分析的一个重要分支。至今,亚纯函数值分布论及其应用仍然是学者们关注的研究方向。亚纯函数的值分布理论在复分析中的其他领域也有广泛的应用,比如,亚纯函数的复动力系统、复微分方程、正规族理论以及唯一性理论等等。

下面先给出与本文内容相关的 4 个亚纯函数值分布结果。

定理 A[2] 设 f 是复平面 $\mathbf{C}$ 内一个超越亚纯函数,如果对任意 $z\in\mathbf{C}$,都有 $f(z)\neq 0$ 成立,那么 $f'(z)-1$ 在复平面 $\mathbf{C}$ 内有无穷多个零点。

定理 B[3] 设 f 是复平面 $\mathbf{C}$ 内一个非常数的有穷级亚纯函数,只有重级零点,如果对任意 $z\in\mathbf{C}$,都有 $f'(z)\neq 1$成立,那么 $f(z)=\dfrac{(z-a)^2}{z-b}$,其中 a 和 $b(\neq a)$ 为常数。

定理 C[4] 设 $R(z)(\neq 0)$ 是一个有理函数,f 是复平面 $\mathbf{C}$ 内一个超越亚纯函数,只有重级零点,则

收稿日期:2024-04-02; **网络出版时间**:2025-01-16
基金项目:国家自然科学基金资助项目(12061077;11961068)
第一作者:杨拍(1979—),男,教授,博士,研究方向为单复变函数论. E-mail:yangpai@cuit.edu.cn

$f'(z)-R(z)$在复平面 $\mathbf{C}$ 内有无穷多个零点。

定理 D[5]　设 n 为正整数,$R(z)$为一个有理函数,如果对任意 $z\in\mathbf{C}$,都有 $R'(z)\neq\dfrac{1}{z^n}$成立,那么 $R(z)$是一个常数函数。

本文讨论涉及重级零点的有理函数值分布,得到了如下结果。

定理 1　设 n 为正整数,$R(z)$为一个有理函数,只有重级零点,如果对任意 $z\in\mathbf{C}$,都有 $R'(z)\neq z^n$ 成立,那么 $R(z)$必然为下述形式之一:

(1) $R(z)=\dfrac{(z-c)^2}{2}$, $n=1$;

(2) $R(z)=\dfrac{(z^{n+1}-c)^2}{(n+1)z^{n+1}}$, $n=1,2,3,\cdots$;

(3) $R(z)=\dfrac{\left(z-\dfrac{c}{3}\right)^3}{2(z-c)}$, $n=1$;

(4) $R(z)=\dfrac{\left(z-\dfrac{1+\sqrt{3}}{4}c\right)^2\left(z-\dfrac{1-\sqrt{3}}{4}c\right)^2}{3(z-c)}$, $n=2$,

其中 c 是一个非零常数。

由定理 C 和定理 1 可得下述结果。

推论 1　设 n 为正整数,$f(z)$是复平面 $\mathbf{C}$ 内的一个亚纯函数,只有重级零点,如果对任意 $z\in\mathbf{C}$,都有 $f'(z)\neq z^n$ 成立,那么 $f(z)$必然为下述形式之一:

(1) $f(z)=\dfrac{(z-c)^2}{2}$, $n=1$;

(2) $f(z)=\dfrac{(z^{n+1}-c)^2}{(n+1)z^{n+1}}$, $n=1,2,3,\cdots$;

(3) $f(z)=\dfrac{\left(z-\dfrac{c}{3}\right)^3}{2(z-c)}$, $n=1$;

(4) $f(z)=\dfrac{\left(z-\dfrac{1+\sqrt{3}}{4}c\right)^2\left(z-\dfrac{1-\sqrt{3}}{4}c\right)^2}{3(z-c)}$, $n=2$,

其中 c 是一个非零常数。

1　预备知识

引理 1[3]　设 $R(z)=a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_0+\dfrac{Q(z)}{P(z)}$,其中 $a_0,a_1,\cdots,a_n(\neq0)$是常数,$P(z)$和 $Q(z)$是两个互素的多项式,且 $\deg Q(z)<\deg P(z)$。如果对任意 $z\in\mathbf{C}$,都有 $R'(z)\neq1$ 成立,那么 $R(z)=z+a+\dfrac{b}{(z-c)^m}$,其中 a 和 $b(\neq0)$,c 是常数,m 是一个正整数。

2　定理 1 的证明

显然 $R(z)$不是常数函数。下面分 2 种情形来讨论。

情形 1 $R(z)$为非常数的多项式。

根据定理1条件,多项式 $R'(z)-z^n$ 在复平面内没有零点。由代数学基本定理知,多项式 $R'(z)-z^n$ 为非零常数函数。设 $R'(z)-z^n=\alpha$,其中 $\alpha(\neq 0)$常数,于是

$$\begin{cases} R(z)=\dfrac{z^{n+1}}{n+1}+\alpha z+\beta, \\ R'(z)=z^n+\alpha, \end{cases} \tag{1}$$

其中 β 为常数。设 η 为 $R(z)$的一个零点,显然 $R(\eta)=R'(\eta)=0$,结合式(1)得

$$\begin{cases} \dfrac{\eta^{n+1}}{n+1}+\alpha\eta+\beta=0, \\ \eta^n+\alpha=0。 \end{cases} \tag{2}$$

解方程组(2)得 $\eta=\dfrac{(n+1)\beta}{n\alpha}$,这就意味着 $R(z)$有且只有一个零点,故

$$R(z)=\frac{z^{n+1}}{n+1}+\alpha z+\beta=\frac{(z-\eta)^{n+1}}{n+1}。$$

比较 z^n 的系数,可知 $n=1$。因为 $R'(\eta)=\eta+\alpha=0$,所以 $\eta\neq 0$,因而

$$R(z)=\frac{(z-c)^2}{2},$$

其中 $c(=\eta)$为非零常数。

情形 2 $R(z)$为非多项式的有理函数。

因为对任意 $z\in\mathbf{C}$,都有 $R'(z)\neq z^n$,所以对任意 $z\in\mathbf{C}$,都有$\left(R(z)-\dfrac{z^{n+1}}{n+1}+z\right)'\neq 1$。根据引理1,

$$R(z)=\frac{z^{n+1}}{n+1}+\alpha+\frac{\beta}{(z-\gamma)^m}=\frac{z^{n+1}(z-\gamma)^m+(n+1)\alpha(z-\gamma)^m+(n+1)\beta}{(n+1)(z-\gamma)^m}, \tag{3}$$

其中 $\alpha,\beta(\neq 0)$和 γ 均为常数,m 是一个正整数。令

$$P_1(z):=z^{n+1}(z-\gamma)^m+(n+1)\alpha(z-\gamma)^m+(n+1)\beta。 \tag{4}$$

显然,$P_1(z)$和 $R(z)$有相同的零点(计算重数),特别地,$P_1(z)$只有重级零点。由式(3)得

$$R'(z)=z^n-\frac{m\beta}{(z-\gamma)^{m+1}}=\frac{z^n(z-\gamma)^{m+1}-m\beta}{(z-\gamma)^{m+1}}。 \tag{5}$$

令

$$P_2(z):=z^n(z-\gamma)^{m+1}-m\beta。 \tag{6}$$

显然,$P_2(z)$和 $R'(z)$有相同的零点(计算重数)。

令

$$\begin{aligned} &P_3(z):=(z-\gamma)P_1(z)+(-z)P_2(z), \\ &P_4(z):=\frac{z^n(z-\gamma)}{\beta}P_1(z)+\left[-\frac{z^{n+1}+(n+1)\alpha}{\beta}\right]P_2(z), \end{aligned} \tag{7}$$

简单计算可得

$$\begin{aligned} &P_3(z)=(n+1)\alpha(z-\gamma)^{m+1}+(m+n+1)\beta z-(n+1)\beta\gamma, \\ &P_4(z)=(m+n+1)z^{n+1}-(n+1)\gamma z^n+m(n+1)\alpha。 \end{aligned} \tag{8}$$

由式(4)、(6)和(7)知,$R(z)$的零点必然也是 $P_1(z)$、$P_2(z)$、$P_3(z)$和 $P_4(z)$的零点。

断言 $\alpha\neq 0$。否则,假设 $\alpha=0$。如果 $\lambda=0$,那么 $P_1(z)=z^{m+n+1}+\beta(n+1)$,这与 $P_1(z)$只有重级零点的事实矛盾。因而 $\gamma\neq 0$。显然,$P_1(z)$的零点必然也是 $P_2(z)$和 $P_3(z)$零点。由式(8)知

$$P_3(z)=(m+n+1)\beta z-(n+1)\beta\gamma=(m+n+1)\beta\left(z-\frac{(n+1)\gamma}{(m+n+1)}\right),$$

显然 $P_3(z)$ 有唯一的零点,这意味着 $P_1(z)$ 和 $P_1'(z)$ 均有唯一的零点 $z_0=\dfrac{(n+1)\gamma}{m+n+1}$。由式(4)得

$$P_1'(z)=(m+n+1)z^n(z-\gamma)^{m-1}(z-z_0),$$

显然 $P_1'(z)$ 至少有 2 个不同的零点,矛盾。

情形 2.1　$R(z)$ 至少有一个 $k(\geqslant 3)$ 级零点。

令 z_0 表示 $R(z)$ 的一个 $k(\geqslant 3)$ 级零点。式(5)两边求导得

$$R''(z)=nz^{n-1}+\frac{m(m+1)\beta}{(z-\gamma)^{m+2}}。\tag{9}$$

显然 $R'(z_0)=R''(z_0)=0$。结合式(5)、(9)得,

$$\begin{cases} z_0^n-\dfrac{m\beta}{(z_0-\gamma)^{m+1}}=0, \\ nz_0^{n-1}+\dfrac{m(m+1)\beta}{(z_0-\gamma)^{m+2}}=0, \end{cases}$$

解上述方程组得 $z_0=\dfrac{n\gamma}{m+n+1}$。由 z_0 的求解过程不难看出,$R(z)$ 的 3 级或大于 3 级的零点有且只有一个,即 $z_0=\dfrac{n\gamma}{m+n+1}$。显然,$P_1(z_0)=0$。

断言 $\gamma\neq 0$,进而 $z_0\neq 0$。否则,假设 $\gamma=0$,于是 $z_0=\dfrac{n\gamma}{m+n+1}=0$,由式(4)知

$$P_1(z_0)=0^{n+1}(0-0)^m+(n+1)\alpha(0-0)^m+(n+1)\beta=(n+1)\beta\neq 0,$$

与 $P_1(z_0)=0$ 矛盾。

断言 $k=3$,即 z_0 是 $R(z)$ 的 3 级零点。否则,假设 $k>3$。如果 $n=1$,那么由式(3)知

$$R(z)=\frac{z^2}{2}+\alpha+\frac{\beta}{(z-\gamma)^m},$$

$$R'''(z_0)=-\frac{m(m+1)(m+2)\beta}{(z_0-\gamma)^{m+3}}\neq 0。$$

因而 z_0 是 $R(z)$ 的 3 级零点,矛盾。假设 $n>1$。由式(3)知

$$R'''(z)=n(n-1)z^{n-2}-\frac{m(m+1)(m+2)\beta}{(z-\gamma)^{m+3}}。$$

因为 z_0 是 $R(z)$ 的 $k(>3)$ 级零点,所以 $R''(z_0)=R'''(z_0)=0$。解方程组

$$\begin{cases} R''(z_0)=nz_0^{n-1}+\dfrac{m(m+1)\beta}{(z_0-\gamma)^{m+2}}=0, \\ R'''(z_0)=n(n-1)z_0^{n-2}-\dfrac{m(m+1)(m+2)\beta}{(z_0-\gamma)^{m+3}}=0, \end{cases}$$

得唯一解 $z_0=\dfrac{(n-1)\gamma}{m+n+1}$,这与 $z_0=\dfrac{n\gamma}{m+n+1}$ 矛盾。

综上所述,$R(z)$ 的 3 级或大于 3 级的零点有且只有一个,即 3 级的零点 $z_0=\dfrac{n\gamma}{m+n+1}$。根据定理 1 的条件,如果 $R(z)$ 还有异于 z_0 的其他零点,那么 $R(z)$ 的异于 z_0 的零点必然均为 2 级零点。

构造辅助函数:

$$Q_1(z):=\frac{P_3^2(z)}{P_1(z)}=\frac{[(n+1)\alpha(z-\gamma)^{m+1}+(m+n+1)\beta z-(n+1)\beta\gamma]^2}{z^{n+1}(z-\gamma)^m+(n+1)\alpha(z-\gamma)^m+(n+1)\beta},$$

$$Q_2(z):=\frac{P_4^2(z)}{P_1(z)}=\frac{[(m+n+1)z^{n+1}-(n+1)\gamma z^n+m(n+1)\alpha]^2}{z^{n+1}(z-\gamma)^m+(n+1)\alpha(z-\gamma)^m+(n+1)\beta}。$$

因为 $R(z)$ 和 $P_1(z)$ 具有相同的零点(计算重数),所以 z_0 为 $P_1(z)$ 的 3 级零点。如果 $P_1(z)$ 存在异于 z_0 的零点,那么 $P_1(z)$ 的异于 z_0 的零点必然均为 2 级零点。由式(7)知,z_0 为 $P_3(z)$ 和 $P_4(z)$ 的 2 级或 2 级以上零点,z_0 为 $P_3^2(z)$ 和 $P_4^2(z)$ 的 4 级或 4 级以上零点。如果 z^* 为 $R(z)$ 和 $P_1(z)$ 的异于 z_0 的零点,那么 z^* 为 $R(z)$ 和 $P_1(z)$ 二级零点,z^* 为 $P_3^2(z)$ 和 $P_4^2(z)$ 的二级或二级以上零点。由以上分析不难看出,$Q_1(z)$ 和 $Q_2(z)$ 均为多项式,且 $\deg Q_1(z)\geqslant 1$ 和 $\deg Q_2(z)\geqslant 1$。于是,$2\deg(P_3(z))\geqslant \deg(P_1(z))+1$ 和 $2\deg(P_4(z))\geqslant \deg(P_1(z))+1$,即 $2(m+1)\geqslant(m+n+1)+1$ 和 $2(n+1)\geqslant(m+n+1)+1$,也即 $m=n$。

情形 2.1.1 $m=n=1$。

由式(3)知

$$R(z)=\frac{z^2}{2}+\alpha+\frac{\beta}{z-\gamma}=\frac{z^2(z-\gamma)+2\alpha(z-\gamma)+2\beta}{2(z-\gamma)},$$

显然,$R(z)$ 在复平面内只有一个(三级)零点 $z_0=\frac{n\gamma}{m+n+1}=\frac{\gamma}{3}$,于是 $R(z)=\frac{\left(z-\frac{\gamma}{3}\right)^3}{2(z-\gamma)}$。取 $c=\gamma$,则

$$R(z)=\frac{\left(z-\frac{c}{3}\right)^3}{2(z-c)},\quad n=1。$$

情形 2.1.2 $m=n>1$。

由式(3)知,$R(z)$ 在复平面内有 $m+n+1=2n+1$ 个零点(计算重数),所以 $R(z)$ 在复平面内 2 级零点的个数为 $\frac{2n+1-3}{2}=n-1$。设 $R(z)$ 在复平面内 2 级零点分别为 $z_1,z_2,\cdots,z_{n-1}$。

显然,$z_1,z_2,\cdots,z_{n-1}$ 也均为 $P_3(z)$ 的零点,z_0 为 $P_3(z)$ 的二级或二级以上的零点,而 $\deg P_3(z)=m+1=(n-1)+2$,所以 $P_3(z)$ 只能有 $n-1$ 个单级零点 $z_1,z_2,\cdots,z_{n-1}$ 和 1 个二级零点 z_0。结合式(8)知,

$$P_3(z)=(n+1)\alpha(z-z_0)^2(z-z_1)(z-z_2)\cdots(z-z_{n-1})。$$

同理,$z_1,z_2,\cdots,z_{n-1}$ 均为 $P_4(z)$ 的零点,z_0 为 $P_4(z)$ 的 2 级或 2 级以上的零点,而 $\deg P_4(z)=n+1=(n-1)+2$,所以 $P_4(z)$ 只能有 $n-1$ 个单级零点 $z_1,z_2,\cdots,z_{n-1}$ 和 1 个 2 级零点 z_0。结合式(8)知

$$P_4(z)=(2n+1)(z-z_0)^2(z-z_1)(z-z_2)\cdots(z-z_{n-1})。$$

显然,$P_3(z)$ 和 $P_4(z)$ 具有相同的零点(计算重数),所以 $P_3(z)=\frac{(n+1)\alpha}{2n+1}\cdot P_4(z)$。结合式(8)知

$$(n+1)\alpha(z-\gamma)^{n+1}+(2n+1)\beta z-(n+1)\beta\gamma=\frac{(n+1)\alpha}{2n+1}[(2n+1)z^{n+1}-(n+1)\gamma z^n+n(n+1)\alpha]。$$

上式等号两边 z^n 的系数分别 $-(n+1)^2\alpha\gamma$、$-\frac{(n+1)^2\alpha\gamma}{2n+1}$,显然必须有

$$-(n+1)^2\alpha\gamma=-\frac{(n+1)^2\alpha\gamma}{2n+1},$$

即 $n=0$,矛盾。

情形 2.2 $R(z)$ 的零点都是二级零点。

显然,$\frac{P_3^2(z)}{P_1(z)}$ 和 $\frac{P_4^2(z)}{P_1(z)}$ 都是多项式,于是

$$2\deg(P_3(z))\geqslant\deg(P_1(z))\text{ 和 }2\deg(P_4(z))\geqslant\deg(P_1(z)),$$

化简可得 $m+1\geqslant n\geqslant m-1$。

情形 2.2.1 $n=m+1$。

显然,$n\geqslant 2$,$\frac{P_3^2(z)}{P_1(z)}$ 是常数函数,于是

$$[(n+1)\alpha(z-\gamma)^n+2n\beta z-(n+1)\beta\gamma]^2=(n+1)^2\alpha^2[z^{n+1}(z-\gamma)^{n-1}+(n+1)\alpha(z-\gamma)^{n-1}+(n+1)\beta]。\tag{10}$$

如果 $n\geqslant 3$,比较上式 $(z-\gamma)^{2n-1}$ 的系数和常数项,可得 $\gamma=0$ 和 $\beta=0$,矛盾。因而 $n=2$,式(10)简化为

$$[3\alpha(z-\gamma)^2+4\beta z-3\beta\gamma]^2=9\alpha^2[z^3(z-\gamma)+3\alpha(z-\gamma)+3\beta]。$$

比较上式等号两边每一项的系数,可得 $\alpha=\frac{1}{24}\gamma^3$ 和 $\beta=\frac{3}{64}\gamma^4$。由 $\beta\neq0$,知 $\gamma\neq0$。将 $n=2$, $\alpha=\frac{1}{24}\gamma^3$ 和 $\beta=\frac{3}{64}\gamma^4$ 代入 $R(z)$ 的表达式(3)中,整理可得

$$R(z)=\frac{\left(z-\frac{1+\sqrt{3}}{4}c\right)^2\left(z-\frac{1-\sqrt{3}}{4}c\right)^2}{3(z-c)},$$

其中 $c(=\gamma)$ 是一个非零常数。

情形 2.2.2　$n=m$。

因为 $P_1(z)$ 的零点都是二级零点,所以 $\deg P_1(z)$ 是偶数。然而,由式(4)知,多项式 $P_1(z)$ 的次数 $\deg P_1(z)=m+n+1=2n+1$ 是一个奇数,矛盾。

情形 2.2.3　$n=m-1$。

显然 $n\geqslant1$, $m\geqslant2$, $\frac{P_4^2(z)}{P_1(z)}$ 是常数函数。于是

$$(2mz^m-m\gamma z^{m-1}+m^2\alpha)^2=4m^2[z^m(z-\gamma)^m+m\alpha(z-\gamma)^m+m\beta]。\tag{11}$$

比较式(11)等号两边 z^{2m-1} 的系数,得 $\gamma=0$,式(11)简化为

$$(2mz^m+m^2\alpha)^2=4m^2(z^{2m}+m\alpha z^m+m\beta)。\tag{12}$$

比较式(12)等号两边的常数项,得 $\beta=\frac{m\alpha^2}{4}$。将 $\beta=\frac{m\alpha^2}{4}$、$\gamma=0$ 和 $m=n+1$ 代入式(3)中,得

$$R(z)=\frac{(z^{n+1}+c)^2}{(n+1)z^{n+1}},$$

其中 $c\left(=\frac{n+1}{2}\alpha\right)$ 是一个非零常数。

参考文献:

[1] NEVANLINNA R. Zur Theorie der meromorphen Funktionen[J]. Acta Mathematica, 1925, 46(1/2):1-99.

[2] HAYMAN W K. Picard values of meromorphic functions and their derivatives[J]. Annals of Mathematics, 1959, 70(1):9-42.

[3] WANG Yuefei, FANG Mingliang. Picard values and normal families of meromorphic functions with multiple zeros[J]. Acta Mathematica Sinica, English Series, 1998, 14(1):17-26.

[4] PANG Xuecheng, NEVO S, ZALCMAN L. Derivatives of meromorphic functions with multiple zeros and rational functions[J]. Computational Methods and Function Theory, 2008, 8(2):483-491.

[5] XU Yan. Normal families and exceptional functions[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2007, 329:1343-1354.

(编辑:陈丽萍)