

带泊松跳随机微分方程的组合解法

段颖鹏,胡琳*

(江西理工大学理学院,江西赣州341000)

摘要:针对只含一个随机项(泊松项)的随机微分方程,给出泊松型的伊藤公式,得到只含泊松项的随机微分方程解的存在唯一性条件,证明补偿 θ 法在这类方程上的有界性和收敛性。针对一般的带泊松跳的随机微分方程,建立一种新的组合解法,这种组合解法可以解出一些带泊松跳随机微分方程的解析解和数值解,也可以修正数值解,提高数值解的收敛性。

关键词:随机微分方程;泊松跳;组合解法;数值解

中图分类号:O211.63 **文献标志码:**A

引用格式:段颖鹏,胡琳.带泊松跳随机微分方程的组合解法[J].山东大学学报(理学版),2026,61(4):123-132.

Combination solution method for stochastic differential equations with Poisson jumps

DUAN Yingpeng, HU Lin*

(School of Science, Jiangxi University of Science and Technology, Ganzhou 341000, Jiangxi, China)

Abstract: For stochastic differential equations containing only one random term (Poisson term), the Poisson-type Itô formula is given. The existence and uniqueness conditions for the solution of stochastic differential equations containing only Poisson terms are obtained. The boundedness and convergence of the compensated θ method on such equations are proved. For general stochastic differential equations with Poisson jumps, a new combined solution method is established. This combined solution method can help obtain analytical and numerical solutions for some stochastic differential equations with Poisson jumps, and can also be used to correct numerical solutions and improve the convergence of numerical solutions.

Key words: stochastic differential equation; Poisson jump; combination solution method; numerical solution

0 引言

随机微分方程(stochastic differential equations, SDEs)起源于布朗运动,用于研究随机过程的重要工具^[1]。由于Itô型随机微分方程的适用性和便利性,对于一般的随机过程,人们通常采用Itô型随机微分对随机过程进行定性分析和定量研究^[2-3]。

Itô型随机微分方程的一般形式为

$$\begin{cases} dX_t = f(t, X_t) dt + g(t, X_t) dW_t, \\ X(t=0) = X_0, \end{cases} \quad (1)$$

式中: X_0 是初始位置, $f(t, X_t)$ 是漂移项系数, $g(t, X_t)$ 是扩散项系数, W_t 是标准布朗运动。

Itô型随机微分方程中的随机项 dW_t 实际上对应的是现实生活中的高斯白噪声,后来众多学者又在高斯白噪声的基础上加入泊松白噪声,提出一类带泊松跳的随机微分方程。带泊松跳随机微分方程的一般形式为

$$\begin{cases} dX_t = f(t, X_t) dt + g(t, X_t) dW_t + \sigma(t, X_t) dN_t, \\ X(t=0) = X_0, \end{cases} \quad (2)$$

式中 N_t 是标准泊松运动。

这类新的带泊松跳随机方程在实际应用中更为广泛,已在金融学^[4]、电子工程^[5]、生物学^[6]等多个领域得到应用。在目前的理论架构下,只有极少数的简单的带泊松跳随机微分方程能够得到解析解,因此在带泊松跳随机微分方程的研究领域上,构造行之有效的求解方法具有重要的理论意义和应用价值。

关于带泊松跳随机微分方程的解法参见文献[7-12]。对于方程(1),常见的数值解方法有 Euler-Maruyama^[13]、Milstein^[14]、随机 Runge-Kutta 方法^[15]等,对于带泊松跳的随机微分方程(2),已经建立的数值方法有 Euler-Maruyama^[4]、平衡隐式^[7]、Milstein^[16]、随机 θ 方法^[8]。新建立的组合解法对于一些无显式的带泊松跳随机微分方程能得到比以上数值方法误差更小的数值解乃至部分或全部解析点,因此,这一种新的数值方法解决实际问题有重要意义。

1 只含泊松项的随机微分方程

1.1 只含泊松项的随机微分方程的定义

定义只含泊松项的随机微分方程,其方程形式为

$$\begin{cases} dX_t = f(t, X_t) dt + \sigma(t, X_t) dN_t, \\ X(t=0) = X(0) = X_0. \end{cases} \quad (3)$$

式(3)的积分形式为

$$X_t = X_0 + \int_0^t f dt + \int_0^t \sigma dN_t, \quad (4)$$

则对应一般随机微分方程的伊藤公式,得到如下只含泊松项的随机微分方程中的泊松型伊藤公式。

1.2 泊松型伊藤公式

定理 1 设 X_t 如式(4)所示,设函数 $g(t, x) \in C^2([0, \infty] \times \mathbf{R})$, 令 $Y_t = g(t, X_t)$, 则有

$$dY_t = \frac{\partial g}{\partial t}(t, X_t) dt + \frac{\partial g}{\partial x}(t, X_t) dX_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(dX_t)^2. \quad (5)$$

证明 将 $dX_t = f dt + \sigma dN_t$ 代入式(5), 利用

$$dt dt = dN_t dt = 0, \quad dN_t dN_t = \lambda dt, \quad (6)$$

得

$$g(t, X_t) = g(0, X_0) + \int_0^t \sigma_s \frac{\partial g}{\partial x}(s, X_s) dN_s + \int_0^t \left(\frac{\partial g}{\partial s}(s, X_s) + f_s \frac{\partial g}{\partial x}(s, X_s) + \frac{1}{2} \lambda \sigma_s^2 \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(s, X_s) \right) ds, \quad (7)$$

式中, $f_s = f(s, \omega)$, $\sigma_s = \sigma(s, \omega)$ 。假定 f, σ 为基本函数,由泰勒定理得

$$\begin{aligned} g(t, x_t) &= g(0, x_0) + \sum_j \Delta g(t_j, x_j) = g(0, x_0) + \sum_j \frac{\partial g}{\partial t} \Delta t_j + \sum_j \frac{\partial g}{\partial x} \Delta x_j \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_j \frac{\partial^2 g}{\partial t^2} (\Delta t_j)^2 + \sum_j \frac{\partial^2 g}{\partial t \partial x} (\Delta t_j) (\Delta x_j) + \frac{1}{2} \sum_j \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} (\Delta x_j)^2 + \sum_j R_j, \end{aligned} \quad (8)$$

式中, $R_j = o(|\Delta x_j|^2 + |\Delta t_j|^2)$, $\Delta x_j = x_{j+1} - x_j$, $\Delta t_j = t_{j+1} - t_j$, $\Delta g(t_j, x_j) = g(t_{j+1}, x_{j+1}) - g(t_j, x_j)$ 。则有

$$\begin{cases} \sum_j \frac{\partial g}{\partial t} \Delta t_j = \sum_j \frac{\partial g}{\partial t}(t_j, X_j) \Delta t_j \rightarrow \int_0^t \frac{\partial g}{\partial t}(s, X_s) ds, \\ \sum_j \frac{\partial g}{\partial x} \Delta x_j = \sum_j \frac{\partial g}{\partial x}(t_j, X_j) \Delta x_j \rightarrow \int_0^t \frac{\partial g}{\partial x}(s, X_s) dx_s, \end{cases}$$

且 f, σ 是基本函数,则

$$\sum_j \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} (\Delta x_j)^2 = \sum_j \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} f_j^2 (\Delta t_j)^2 + 2 \sum_j \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} f_j \sigma_j (\Delta t_j) (\Delta N_j) + \sum_j \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} \sigma_j^2 (\Delta N_j)^2. \quad (9)$$

式中, $f_j = f(t_j, \omega)$, $\sigma_j = \sigma(t_j, \omega)$ 。显然,当 $\Delta t_j \rightarrow 0$ 时, $\sum_j \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} f_j^2 (\Delta t_j)^2$ 、 $\sum_j \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} f_j \sigma_j (\Delta t_j) (\Delta N_j)$ 趋于 0。当

$\Delta t_j \rightarrow 0$ 时, $\sum_j \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} \sigma_j^2 (\Delta N_j)^2$ 在 $L^2(P)$ 中趋向于 $\int_0^t \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} \sigma^2 \lambda ds$ 。

设 $X \sim N(\lambda dt, \lambda dt)$, 则 $\sum \Delta^2 N_t = \sum (N_{i+1} - N_i)^2$, 有

$$\begin{aligned} E\left(\sum \Delta^2 N_t\right) &= E\left(\sum_{i=1}^{\infty} X_i^2\right) = (n-1)E(N_{i+1} - N_i)^2 \\ &= (n-1)[\sigma^2(N_{i+1} - N_i) + E^2(N_{i+1} - N_i)] \\ &= (n-1)[\lambda \Delta t_i + (\lambda \Delta t)^2] \\ &= (n-1)\left(\lambda \frac{T}{n} + \lambda^2 \frac{T^2}{n^2}\right) = \lambda T = \lambda \sum \Delta t, \end{aligned} \tag{10}$$

故定理 1 得证。

1.3 解的存在性和唯一性

引理 1 (Gronwall 引理)^[17] 设 ϕ 和 f 是 $[0, +\infty)$ 上的 Borel 非负函数, 满足 $\phi(t) \leq C + \int_0^t f(s)\Delta(s)ds$, $t \geq 0$, 其中 $C \geq 0$ 为常数, 则有 $\phi(t) \leq C \exp\left[\int_0^t f(s)ds\right]$, $t \geq 0$ 。

定理 2 对于式(3)所示的只含泊松项的随机微分方程, 如果漂移系数 f 和扩散系数 σ 满足:

- (1) Lipschitz 连续 $|f(t, x) - f(t, y)| + |\sigma(t, x) - \sigma(t, y)| \leq C|x - y|$;
- (2) 线性增长 $|f(t, x)| + |\sigma(t, x)| \leq C(1 + |x|)$,

则式(3)存在唯一的解 X_t , 且 X_t 关于 t 连续。

证明 设 X_t, \widetilde{X}_t 均为式(3)的解, 满足初值条件 $X_t = Z, \widetilde{X}_t = \widetilde{Z}$, 令 $\begin{cases} \alpha_t = f(t, X_t) - f(t, \widetilde{X}_t), \\ \beta_t = \sigma(t, X_t) - \sigma(t, \widetilde{X}_t), \end{cases}$ 得到

$$\begin{aligned} E|X_t - \widetilde{X}_t|^2 &= E\left(Z - \widetilde{Z} + \int_0^t \alpha_s ds + \int_0^t \beta_s dN_t\right)^2 \\ &\leq 3E(Z - \widetilde{Z})^2 + 3E\left(\int_0^t \alpha_s ds\right)^2 + 3E\left(\int_0^t \beta_s dN_t\right)^2 \\ &\leq 3E(Z - \widetilde{Z})^2 + 3tE\left(\int_0^t \alpha_s^2 ds\right) + 3(\lambda + \lambda^2 t)E\left(\int_0^t \beta_s^2 ds\right) \\ &\leq 3E(Z - \widetilde{Z})^2 + (3t + 3\lambda + 3\lambda^2 t)c^2 \int_0^t E|X_s - \widetilde{X}_s|^2 ds. \end{aligned} \tag{11}$$

注 1 $\widetilde{N}(t) := N(t) - \lambda t$, 则有

$$\begin{aligned} E\left(\int_0^t \beta_s dN_t\right)^2 &= E\left(\int_0^t \beta_s d\widetilde{N}_t + \int_0^t \lambda \beta_s ds\right)^2 \\ &= E\left(\int_0^t \beta_s d\widetilde{N}_t\right)^2 + E\left(\int_0^t \lambda \beta_s ds\right)^2 + 2E\left(\int_0^t \beta_s d\widetilde{N}_t\right) * E\left(\int_0^t \lambda \beta_s ds\right) \\ &\leq \int_0^t \lambda \beta_s^2 ds + \int_0^t \lambda^2 t \beta_s^2 ds + 0 \leq (\lambda + \lambda^2 t) \int_0^t \beta_s^2 ds. \end{aligned} \tag{12}$$

由 Gronwall 引理可得

$$E|X_t - \widetilde{X}_t|^2 \leq 3E(Z - \widetilde{Z})^2 \exp[3(t + \lambda + \lambda^2 t)c^2 t]. \tag{13}$$

若 $Z = \widetilde{Z}$, 则对所有 $t \geq 0$, $E|X_t - \widetilde{X}_t|^2 = 0$, 从而 $P(\forall t, X_t = \widetilde{X}_t) = 1$ 。

定理 2 的唯一性证明完毕。

令 $Y_t^{(0)} = X_0$, 且定义

$$Y_t^{(k+1)} = X_0 + \int_0^t f(S, Y_s^{(k)}) ds + \int_0^t \sigma(S, Y_s^{(k)}) dN_t, \quad k \geq 0, \tag{14}$$

则可由 $P(\forall t, X_t = \widetilde{X}_t) = 1$, 得

$$E|Y_t^{(k+1)} - Y_t^{(k)}|^2 \leq 3(t+\lambda+\lambda^2 t)c^2 \int_0^t E|Y_s^{(k)} - Y_s^{(k-1)}|^2 ds, \quad k \geq 1. \quad (15)$$

令 $k=0$, 则根据式(14), 有

$$\begin{aligned} E|Y_t^{(1)} - Y_t^{(0)}|^2 &= E \left| \int_0^t f(s, Y_s^{(0)}) ds + \int_0^t \sigma(s, Y_s^{(0)}) dN_s \right|^2 \\ &\leq 3E \left[\int_0^t f(s, Y_s^{(0)}) ds \right]^2 + 3E \left[\int_0^t \sigma(s, Y_s^{(0)}) dN_s \right]^2 \\ &\leq 3tE \left[\int_0^t f^2(s, Y_s^{(0)}) ds \right] + 3(\lambda + \lambda^2 t)E \left[\int_0^t \sigma^2(s, Y_s^{(0)}) \right] dt \\ &\leq (3t + 3\lambda + 3\lambda^2 t) C^2 t EX_0^2 \\ &\leq At, \end{aligned} \quad (16)$$

式中的 A 是仅依赖于 C, t 和 EX_0^2 的常数, 因此

$$\begin{aligned} E|Y_t^{(2)} - Y_t^{(1)}|^2 &\leq A \int_0^t E|Y_s^{(1)} - Y_s^{(0)}|^2 ds \leq A \int_0^t A_s ds = \frac{(At)^2}{2}, \\ E|Y_t^{(3)} - Y_t^{(2)}|^2 &\leq A \int_0^t E|Y_s^{(2)} - Y_s^{(1)}|^2 ds \leq A \int_0^t \frac{(As)^2}{2} ds = \frac{(At)^3}{6} = \frac{(At)^3}{3!}, \\ E|Y_t^{(4)} - Y_t^{(3)}|^2 &\leq A \int_0^t E|Y_s^{(3)} - Y_s^{(2)}|^2 ds \leq A \int_0^t \frac{(As)^3}{3!} ds = \frac{(At)^4}{24} = \frac{(At)^4}{4!}. \end{aligned} \quad (17)$$

类似地, 可得 $E|Y_t^{(k+1)} - Y_t^{(k)}|^2 \leq \frac{(At)^{(k+1)}}{(k+1)!}$, $k \geq 0$, 其中

$$\begin{aligned} \sup_{0 \leq s \leq t} |Y_s^{(k+1)} - Y_s^{(k)}| &\leq \sup_{0 \leq s \leq t} \int_0^s |f(r, Y_r^{(k)}) - f(r, Y_r^{(k-1)})| dr \\ &\leq \sup_{0 \leq s \leq t} \left| \int_0^s [\sigma(r, Y_r^{(k)}) - \sigma(r, Y_r^{(k-1)})] dN_r \right|. \end{aligned} \quad (18)$$

因此

$$\begin{aligned} P \left[\sup_{0 \leq s \leq t} |Y_s^{(k+1)} - Y_s^{(k)}| \geq 2^{-k} \right] &\leq P \left[\sup_{0 \leq s \leq t} \int_0^s |f(r, Y_r^{(k)}) - f(r, Y_r^{(k-1)})| dr \geq 2^{-k-1} \right] \\ &+ P \left[\sup_{0 \leq s \leq t} \left| \int_0^s [\sigma(r, Y_r^{(k)}) - \sigma(r, Y_r^{(k-1)})] dN_r \right| \geq 2^{-k-1} \right] \\ &\leq 4^{k+1} E \left| \int_0^t (f(r, Y_r^{(k)}) - f(r, Y_r^{(k-1)})) dr \right|^2 + 4^{k+1} E \left| \int_0^t (\sigma(r, Y_r^{(k)}) - \sigma(r, Y_r^{(k-1)})) dN_r \right|^2 \\ &\leq 4^{k+1} t E \int_0^t |f(r, Y_r^{(k)}) - f(r, Y_r^{(k-1)})|^2 dr + 4^{k+1} \int_0^t |(\sigma(r, Y_r^{(k)}) - \sigma(r, Y_r^{(k-1)}))|^2 (\lambda + \lambda^2 t) dr \\ &\leq 4^{k+1} c^2 (t + \lambda + \lambda^2 t) \int_0^t E|Y_r^{(k)} - Y_r^{(k-1)}|^2 dr \\ &\leq 4^{k+1} c^2 ((t + \lambda + \lambda^2 t)) \int_0^t \frac{(Ar)^k}{k!} dr \\ &\leq 4^{k+1} c^2 ((t + \lambda + \lambda^2 t)) \frac{A^k t^{k+1}}{(k+1)!}, \end{aligned} \quad (19)$$

所以有

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} P \left[\sup_{0 \leq s \leq t} |Y_s^{(k+1)} - Y_s^{(k)}| \geq 2^{-k} \right] &\leq \sum_{k=1}^{\infty} 4^{k+1} c^2 (t + \lambda + \lambda^2 t) \frac{A^k t^{k+1}}{(k+1)!} \\ &= \frac{c^2 (t + \lambda t)}{A} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(4At)^{(k+1)}}{(k+1)!} = \frac{c^2 (t + \lambda + \lambda^2 t) e^{4At}}{A} < \infty. \end{aligned} \quad (20)$$

由 Borel-Cantelli 引理可知, $P \left[\sup_{0 \leq s \leq t} |Y_s^{(k+1)} - Y_s^{(k)}| \geq 2^{-k}, \text{ i.o.} \right] = 0$. 从而对 ω , 有

$$Y_t^{(n)}(\omega) = Y_t^{(0)}(\omega) + \sum_{k=0}^{n-1} (Y_t^{(k+1)}(\omega) - Y_t^{(k)}(\omega)) \quad (21)$$

收敛。

记 X_t 是 Y_t^n 的极限, 根据 Y_t^n 关于 t 的连续性可知 X_t 的连续性。再根据 f 和 σ 的连续性可知

$$f(s, Y_s^{(n)}) \rightarrow f(s, X_s), \quad \sigma(s, Y_s^{(n)}) \rightarrow \sigma(s, X_s), \quad n \rightarrow \infty,$$

因此有

$$\int_0^t f(s, Y_s^{(n)}) ds \rightarrow \int_0^t f(s, X_s) ds,$$

$$\int_0^t \sigma(s, Y_s^{(n)}) dW_s \rightarrow \int_0^t \sigma(s, X_s) dN_s,$$

所以 X_t 满足随机微分方程。以下证明定理 2 的存在性。

由于只含泊松跳的随机微分方程是一般带跳随机微分方程的特殊情况,这一部分的证明推导也可沿用 Platen E 的证明思路^[18]。

2 只含泊松项的随机微分方程的数值解法

2.1 数值方法-随机 θ 法及补偿的随机 θ 法

将方程(3)写成

$$\begin{cases} dX(t) = f(X(t^-)) dt + \sigma(X(t^-)) dN_t, & t > 0, \\ X(0^-) = X_0. \end{cases} \tag{22}$$

式中, $X(t^-) := \lim_{s \rightarrow t^-} X(s)$, 并假定 N_t 是一个 Poisson 随机变量, 强度 $\lambda > 0$ 。此外, 假定 $E|X_0|^2 < \infty$, 且 X_0 独立于 Poisson 变量 N_t , 则在满足全局 Lipschitz 条件(1)和线性增长条件(2)下, 方程(22)存在唯一解, 且 $\sup_{0 \leq t \leq T} E|X(t)|^2 < \infty$ 。全局 Lipschitz 条件和线性增长条件为:

(1) 全局 Lipschitz 条件。对任意 $x, y \in \mathbf{R}^d$, 存在与 x, y 无关的正常数 L , 使得

$$|f(x) - f(y)|^2 \vee |\sigma(x) - \sigma(y)|^2 \leq L|x - y|^2.$$

(2) 线性增长条件。对任意 $x \in \mathbf{R}^d$, 存在与 x 无关的正常数 K , 使得 $|f(x)|^2 \vee |\sigma(x)|^2 \leq K(1 + |x|^2)$ 。

随机 θ 方法为

$$Y_{n+1} = Y_n + (1 - \theta)hf(Y_n) + \theta hf(Y_{n+1}) + \sigma(Y_n)\Delta N_n. \tag{23}$$

方程(22)写成如下的等价方程:

$$dX(t) = f_\lambda(X(t^-))dt + \sigma(X(t^-))d\tilde{N}(t), \quad t > 0, \tag{24}$$

式中 $f_\lambda(x) := f(x) + \lambda\sigma(x)$ 。注意到补偿 poisson 过程 $\tilde{N}_t := N_t - \lambda t$ 是一个鞅, 且满足性质 $E(\tilde{N}_{t+s} - \tilde{N}_t) = 0$, $E|\tilde{N}_{t+s} - \tilde{N}_t|^2 = \lambda s$, $t, s \geq 0$ 。新的漂移系数 f_λ 仍满足全局 Lipschitz 连续条件和线性增长条件, 并且常数 $L_\lambda = (\lambda + 1)^2 L$, $K_\lambda = (\lambda + 1)^2 K$ 。

补偿的随机 θ 方法为

$$Y_{n+1} = Y_n + (1 - \theta)hf_\lambda(Y_n) + \theta hf_\lambda(Y_{n+1}) + \sigma(Y_n)\Delta \tilde{N}_n. \tag{25}$$

2.2 补偿随机 θ 方法的收敛性

将时间离散数值解析延拓成连续时间逼近解。对于 $t \in [t_n, t_{n+1}]$, 定义补偿的随机 θ 方法的连续延拓

$$\bar{Y}(t) := Y_n + (1 - \theta)(t - t_n)f_\lambda(Y_n) + \theta(t - t_n)f_\lambda(Y_{n+1}) + \sigma(Y_n)\Delta \tilde{N}_n(t). \tag{26}$$

记 $\Delta \tilde{N}_n(t) = \tilde{N}_t - \tilde{N}_{t_n}$, 将式(26)写成积分形式为

$$\bar{Y}(t) = Y_0 + \int_0^t (1 - \theta)f_\lambda(Y(s)) + \theta f_\lambda(Y(s+h)) ds + \int_0^t \sigma(Y(s)) d\tilde{N}_s. \tag{27}$$

式中 $Y(s) := \sum_0^\infty 1_{|t_n \leq t < t_{n+1}} Y_n$, 并且 $\bar{Y}(t_n)$ 在网格点上和离散数值解 Y_n 是一致的, 即 $\bar{Y}(t_n) = Y_n$, $n = 0, 1, \dots, N$ 。

定理 3 假定线性增长条件(2)成立, 且 $h < h_0 < 1/(K_\lambda + 1)$, 则式(25)的数值解的二阶矩是有界的且

$$\sup_{0 \leq nh \leq T} E|Y_n|^2 \leq C_1(1 + E|X_0|^2).$$

证明 由式(25)得

$$|Y_{n+1} - \theta hf_\lambda(Y_{n+1})|^2 = |Y_n + (1 - \theta)hf_\lambda(Y_n) + \sigma(Y_n)\Delta \tilde{N}_n|^2. \tag{28}$$

式(28)中取期望且使用 $\Delta \tilde{N}_n$ 的鞅性,得

$$E|Y_{n+1}|^2 \leq 2\theta h E\langle Y_{n+1}, f_\lambda(Y_{n+1}) \rangle + E|Y_n|^2 + h^2(1-\theta)^2 E|f_\lambda(Y_n)|^2 + h\lambda E|\sigma(Y_n)|^2 + 2(1-\theta)h E\langle Y_n, f_\lambda(Y_n) \rangle. \quad (29)$$

由线性增长条件和 Cauchy-Schwarz 不等式,得

$$E\langle Y_n, f_\lambda(Y_n) \rangle \leq E|Y_n| |f_\lambda(Y_n)| \leq \frac{1}{2} E|Y_n|^2 + \frac{1}{2} E|f_\lambda(Y_n)|^2 \leq \frac{1}{2}(1+K_\lambda) E|Y_n|^2 + \frac{1}{2} K_\lambda. \quad (30)$$

同理有 $E\langle Y_{n+1}, f_\lambda(Y_{n+1}) \rangle \leq \frac{1}{2}(1+K_\lambda) E|Y_{n+1}|^2 + \frac{1}{2} K_\lambda$.

将 $E\langle Y_n, f_\lambda(Y_n) \rangle$ 和 $E\langle Y_{n+1}, f_\lambda(Y_{n+1}) \rangle$ 的估计式代入式(29),利用线性增长条件,当 $h < h_0 < 1$ 时,有

$$(1-h-hK_\lambda) E|Y_{n+1}|^2 \leq (1+h^2K_\lambda+h\lambda K+hK_\lambda) E|Y_n|^2 + \theta h K_\lambda + h^2(1-\theta)^2 K_\lambda + h\lambda K + (1-\theta)hK_\lambda \leq (1+2hK_\lambda+h\lambda K+h) E|Y_n|^2 + 2hK_\lambda + h\lambda K. \quad (31)$$

因此,选择合适的常数,由递推式(31)可得数值解的矩有界性。

递推证明。已知 $(1-h-hK_\lambda) E|Y_{n+1}|^2 \leq (1+2hK_\lambda+h\lambda K+h) E|Y_n|^2 + 2hK_\lambda + h\lambda K$, 则 $E|Y_{n+1}|^2 \leq (1+\mu_1 h) E|Y_n|^2 + \mu_2 h$, 其中

$$\begin{cases} \mu_1 = \frac{3K_\lambda + \lambda K + 2}{1-h-hK_\lambda}, \\ \mu_2 = \frac{2K_\lambda + \lambda K}{1-h-hK_\lambda}. \end{cases}$$

从而

$$\begin{aligned} E|Y_n|^2 &\leq (1+\mu_1 h) E|Y_{n-1}|^2 + \mu_2 h, \\ E|Y_{n-1}|^2 &\leq (1+\mu_1 h) E|Y_{n-2}|^2 + \mu_2 h, \\ &\vdots \\ E|Y_1|^2 &\leq (1+\mu_1 h) E|X_0|^2 + \mu_2 h, \end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned} E|Y_n|^2 &\leq (1+\mu_1 h)^2 E|Y_{n-2}|^2 + (1+\mu_1 h)\mu_2 h + \mu_2 h, \\ E|Y_n|^2 &\leq (1+\mu_1 h)^3 E|Y_{n-3}|^2 + (1+\mu_1 h)^2 \mu_2 h + (1+\mu_1 h)\mu_2 h + \mu_2 h, \\ &\vdots \\ E|Y_n|^2 &\leq (1+\mu_1 h)^n E|X_0|^2 + \mu_2 h [(1+\mu_1 h)^{n-1} + (1+\mu_1 h)^{n-2} + \cdots + (1+\mu_1 h) + 1]. \end{aligned}$$

由于 $h = \frac{T}{n}$, $n \rightarrow +\infty$, 则

$$E|Y_n|^2 \leq (1+\mu_1 h)^{\frac{T}{h}} E|X_0|^2 + \frac{(1+\mu_1 h)^n - 1}{\mu_1 h} \mu_2 h = e^{\mu_1 T} E|X_0|^2 + \frac{\mu_2}{\mu_1} (e^{\mu_1 T} - 1). \quad (32)$$

矩有界性得证。

定理 4 假设定理 3 中的线性增长条件成立,则存在与 h 无关的常数 C_2 使得,当 $s \in [t_n, t_{n+1})$ 时,

$$E|\bar{Y}(s) - Y(s)|^2 \vee E|\bar{Y}(s) - Y(s+h)|^2 \leq C_2(1+E|X_0|^2)h. \quad (33)$$

证明 对 $s \in [t_n, t_{n+1})$, 由 $\bar{Y}(s)$ 和 $Y(s)$ 的定义知

$$\bar{Y}(s) - Y(s) = (1-\theta)(s-t_n)f_\lambda(Y_n) + \theta(s-t_n)f_\lambda(Y_{n+1}) + \sigma(Y_n)\Delta\tilde{N}_n(s).$$

运用基本不等式和 $\Delta\tilde{N}_n$ 的鞅性,得

$$E|\bar{Y}(s) - Y(s)|^2 \leq h^2(1-\theta)E|f_\lambda(Y_n)|^2 + 3h^2\theta E|f_\lambda(Y_{n+1})|^2 + 3h\lambda E|\sigma(Y_n)|^2. \quad (34)$$

结合定理 3,由式(34)推得式(33)的 $E|\bar{Y}(s) - Y(s)|^2 \leq C_2(1+E|X_0|^2)h$ 部分。由式(33)得

$$\begin{aligned} \bar{Y}(s) - Y(s+h) &= Y_n + (1-\theta)(s-t_n)f_\lambda(Y_n) + \theta(s-t_n)f_\lambda(Y_{n+1}) + \sigma(Y_n)\Delta\tilde{N}_n(s) - Y_{n+1} \\ &= (1-\theta)(s-t_{n+1})f_\lambda(Y_n) + \theta(s-t_{n+1})f_\lambda(Y_{n+1}) + \sigma(Y_n)(\tilde{N}_s - \tilde{N}_{t_{n+1}}). \end{aligned} \quad (35)$$

类似前面的证明方法,得式(33)中 $E|\bar{Y}(s) - Y(s+h)|^2 \leq C_2(1+E|X_0|^2)h$ 部分。

定理 5 设函数 $f: \mathbf{R}^d \rightarrow \mathbf{R}^d$, $\sigma: \mathbf{R}^d \rightarrow \mathbf{R}^d$ 满足全局定理 2 中的条件, 则式 (26) 均方收敛于方程 (3) 的解析解, 即 $E \sup_{0 \leq t \leq T} |\bar{Y}_{(t)} - X_{(t)}|^2 \leq C(1+E|X_0|^2)h$, $h \rightarrow 0$, 其中 C 是与 h 无关的常数.

证明 由式 (24)、(27), 可得

$$\begin{aligned}
 & E \left[\sup_{0 \leq s \leq t} |\bar{Y}(s) - X(s)|^2 \right] \\
 &= E \left[\sup_{0 \leq s \leq t} \left| \int_0^s (1-\theta) [f_\lambda(Y(r)) - f_\lambda(X(r^-))] + \theta [f_\lambda(Y(r+h)) - f_\lambda(X(r^-))] dr + \int_0^s [\sigma(Y(r)) - \sigma(X(r^-))] d\tilde{N}_r \right|^2 \right] \\
 &\leq 3tE \int_0^t |(1-\theta) [f_\lambda(Y(r)) - f_\lambda(X(r^-))] + \theta [f_\lambda(Y(r+h)) - f_\lambda(X(r^-))]|^2 dr + 3E \left[\sup_{0 \leq s \leq t} M(s) \right] \\
 &\leq 3t(1-\theta) \int_0^t E|f_\lambda(Y(s)) - f_\lambda(X(s^-))|^2 ds + 3t\theta \int_0^t E|f_\lambda(Y(s+h)) - f_\lambda(X(s^-))|^2 ds + 3E \left[\sup_{0 \leq s \leq t} M(s) \right]. \tag{36}
 \end{aligned}$$

这里用了 Hölder 不等式和基本不等式

$$|\theta x + (1-\theta)y|^2 \leq \theta|x|^2 + (1-\theta)|y|^2, \tag{37}$$

且记 $M(s) = \left| \int_0^s [\sigma(Y(r)) - \sigma(X(r^-))] d\tilde{N}_r \right|^2$. 由 Doob 下鞅不等式和等距公式知

$$E \left[\sup_{0 \leq s \leq t} M(s) \right] \leq 4EM(t) = 4\lambda \int_0^t E|\sigma(Y(s)) - \sigma(X(s^-))|^2 ds. \tag{38}$$

将式 (38) 代入式 (36) 且运用线性增长条件, 得

$$\begin{aligned}
 & E \left[\sup_{0 \leq s \leq t} |\bar{Y}(s) - X(s)|^2 \right] \\
 &\leq 6T(1-\theta)L_\lambda \int_0^t [E|Y(s) - \bar{Y}(s)|^2 + E|\bar{Y}(s) - X(s^-)|^2] ds \\
 &\quad + 6T\theta L_\lambda \int_0^t [E|Y(s+h) - \bar{Y}(s)|^2 + E|\bar{Y}(s) - X(s^-)|^2] ds \\
 &\quad + 24L\lambda \int_0^t [E|Y(s) - \bar{Y}(s)|^2 + E|\bar{Y}(s) - X(s^-)|^2] ds. \tag{39}
 \end{aligned}$$

应用定理 4, 得

$$\begin{aligned}
 E \left[\sup_{0 \leq s \leq t} |\bar{Y}(s) - X(s)|^2 \right] &\leq (6TL_\lambda + 24L\lambda) \int_0^t E \left[\sup_{0 \leq r \leq s} |\bar{Y}(r) - X(r^-)|^2 \right] ds \\
 &\quad + (6T^2L_\lambda + 24TL\lambda) C_2(1+E|X_0|^2)h. \tag{40}
 \end{aligned}$$

最后, 应用连续的 Gronwall 不等式, 则随机 θ 方法的收敛性得证. 此时若令 $\theta = 0$, 则得到方程 (3) 的显式欧拉数值格式, 令 $\theta = 1$ 则得到方程 (3) 的隐式欧拉解法.

3 带泊松跳随机微分方程的组合解法及实例验证

考虑带泊松跳的随机微分方程 (2). 将方程 (2) 拆分成 2 个方程:

$$\begin{cases} \mu_1 dX_t = \mu_2 f(t, X_t) dt + g(t, X_t) dW_t, \\ X(t=0) = X_0, \end{cases} \tag{41}$$

$$\begin{cases} (1-\mu_1) dX_t = (1-\mu_2) f(t, X_t) dt + \sigma(t, X_t) dN_t, \\ X(t=0) = X_0, \end{cases} \tag{42}$$

式中, μ_1, μ_2 是任意常数或变量, 方程 (41) 是一般随机微分方程, 方程 (42) 是只含泊松项的随机微分方程.

若方程 (41) 的解析解为 $X_{t,w} = \alpha(\mu_1, \mu_2)$, 方程 (42) 的解析解为 $X_{t,N} = \beta(\mu_1, \mu_2)$, 结合方程组 $X_{t,w}$ 和 $X_{t,N}$, 得出公共解 $\mu_1 = \varphi(X), \mu_2 = \psi(X)$, 则 $\alpha(\varphi(X), \psi(X)) = \beta(\varphi(X), \psi(X))$ 一定是方程 (2) 解析解曲线上的部分或全部点. 并且, 由于公共解点是方程 (2) 的解析解曲线上确定的点, 所以能利用公共解点判断数值方法

得到的公共解点附近点的偏离程度。若公共解点到数值解曲线的距离过大,则表明所用数值方法在公共解点附近关于解析解的逼近效果不佳,反之则效果良好,与此同时,可以判断出整个数值方法的收敛性是否良好,并用公共解析解点代替对应数值方法上的数值解点,以此代入迭代公式中求出公共解点以后的数值解,还可以往前反推出之前的数值解。这个过程是利用解析解点对数值解修正的一个较直接和简单的利用方式。

进一步地,若想得到方程(2)的数值解,则利用任意一般随机微分方程的数值解法,如 Euler-Maruyama^[13]、Milstein 等方法^[14]解出方程(41)的数值解,记为 X_w ,在本文的基础上利用只含泊松项的随机微分方程的数值解法如随机 θ 法得到方程(42)的数值解,记为 X_N ,则 $X = X_w \cap X_N$ 看作方程(2)的数值解曲线上的点。由于数值方法得到的是逼近解析解的数值,这里取 $x_w \in X_w, x_N \in X_N$,若 $|x_w - x_N|$ 足够小,则 $x_w = x_N$ 。

例 1 考虑如下带泊松跳的随机微分方程

$$\begin{cases} dX_t = aX^2(t^-)dt + bX^2(t^-)dW_t + cX(t^-)[1 - X(t^-)]dN_t, \\ X(0) = 1, \end{cases} \quad (43)$$

其中, $t > 0, a, b, c \in R$ 。方程(43)没有显式解,但利用方程(41)、(42),令 $\mu_1 = X(t^-), \mu_2 = 1$,得

$$\begin{cases} X(t^-)dX_t = aX^2(t^-)dt + bX^2(t^-)dW_t, & t > 0, a, b, c \in R, \\ X(0) = 1, \end{cases} \quad (44)$$

$$\begin{cases} (1 - X(t^-))dX_t = cX(t^-)[1 - X(t^-)]dN_t, & t > 0, a, b, c \in R, \\ X(0) = 1. \end{cases} \quad (45)$$

方程(44)有显式解

$$X_w = X(0)e^{(a - \frac{1}{2}b^2)t + bW_t},$$

方程(45)有显式解

$$X_N = X(0)(1 + c)^{N_t}.$$

令 $X = X_w \cap X_N, X$ 代入方程(43),得 X 是方程(43)的解析解曲线上的点。同样能利用 X 判断方程(43)数值解曲线上 X 附近点的偏离程度。理论上令 μ_1 取其它值则得到方程(43)的解析解曲线上的其它点。

对于数值解,假定使用 Euler 法,步长取 h ,则在 X 点对应数值解的误差为 $o(\Delta t^{1/2})$,此时用解析解 X 代替数值解,则在点 X 及其足够小的邻域内,数值解误差依概率 1 收敛到 0。进一步把 X 代入数据值迭代公式,以此求出其他数值解,则达到了解析解对数值解的修正目的。

不失一般性,假设步长是 h ,初始位置在 $t = 0$ 处,并且在新的组合方法下,方程(2)在 $t = 3h$ 处得到了解析解 X 。图 1 比较了在 Euler 法下和在新的组合方法下得到的数值解的均方误差,均方误差的单位为步长 h ,当 $t = 3h$ 时,利用新的组合方法,解析解点代替数值点,并重新代入迭代公式,此时可以发现数值解的误差累积效应从 0 重新开始。

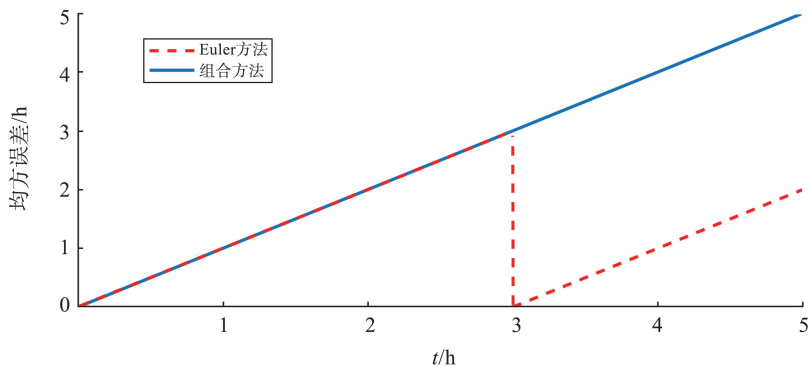


图 1 Euler 方法和组合方法的均方误差比较

Fig.1 Comparison of mean square errors between Euler method and combined method

例 2 考虑如下带泊松跳的标量线性随机微分方程:

$$\begin{cases} dX_t = aX(t^-)dt + bX(t^-)dW_t + cX(t^-)dN_t, & t > 0, a, b, c \in R, \\ X(0) = 1. \end{cases} \quad (46)$$

方程(46)有显式解,但这里只讨论方程(46)的数值解法。利用方程(41)、(42),令 $\mu_1 = \theta, \mu_2 = 1$,得

$$\begin{cases} \mu_1 dX_t = aX(t^-)dt + bX(t^-)dW_t, & t > 0, a, b, c \in R, \\ X(0) = 1, \end{cases} \quad (47)$$

$$\begin{cases} (1-\mu_1) dX_t = cX(t^-)dN_t, & t > 0, a, b, c \in R, \\ X(0) = 1. \end{cases} \quad (48)$$

方程(47)的显式解为 $X_w = X(0)e^{[\frac{a}{\mu_1} - \frac{1}{2}(\frac{b}{\mu_1})^2]t + \frac{b}{\mu_1}W_t}$, 方程(48)的显式解为 $X_N = X(0)\left(1 + \frac{c}{1-\mu_1}\right)^{N_t}$ 。

方程(47)、(48)的显式解是关于 θ 的函数,由此断定,在求原方程数值解的过程中,当 θ 取值为与 t 无关的常数时,得到方程(47)、(48)公共数值解曲线上的点,且求各自数值解的过程中,数值解格式基本不变,由此减少了计算量。

固定 θ , 利用一般随机微分方程上的 Euler-Maruyama 方法对方程(47)求数值解,再利用只含泊松项的随机微分方程上的补偿随机 θ 法对方程(48)求数值解。在同一个带泊松跳随机微分方程中, Euler-Maruyama、补偿随机 θ 方法组合使用。同样,在同一个带泊松跳随机微分方程中,任意 2 种数值方法能组合使用。

在上述例子中,不同 μ_1 对应方程(46)数值解曲线上的点 X 。由于 μ_1 取值的任意性,即 $\mu_1 \in (-\infty, +\infty)$, 得到在方程(46)数值曲线上的无数个点。例 2 证明了组合法可以得出数值解的部分或全部。

4 补偿随机 θ 方法的收敛性数值实验

对方程(3), 选择上文中的对只含泊松项的随机微分方程的补偿随机 θ 法, 给出 3 组参数:

参数 I: $f=2, \sigma=-0.5, \theta=0, \lambda=2,$

参数 II: $f=2, \sigma=0.5, \theta=0.5, \lambda=2。$

参数 III: $f=2, \sigma=-0.5, \theta=1, \lambda=2。$

图 2 是 3 个参数下的数值模拟结果。采用补偿随机 θ 方法求方程(3)的数值解,并且选择 1 000 个样本轨道的平均值来模拟方程(3)数值解的期望。为了验证只含泊松项的随机微分方程上补偿随机 θ 方法的收敛性,选择 3 组参数下的方程(3)和 4 种不同的步长, $h_1 = \Delta s, h_2 = 2\Delta s, h_3 = 4\Delta s, h_4 = 8\Delta s$, 这里的 $\Delta s = 2^{-10}$ 。令 $r=0, 1, 2, 3$, 步长 h_r 对应的均方误差为 ε^r , 利用 1 000 个样本轨道模拟 4 种步长的均方误差, 均方误差在 $T=1$ 时, 有

$$\varepsilon^r \cong \frac{1}{1\,000} \sum_{j=1}^{1\,000} |x_{r,T(\omega_j)} - Y_{r,q(\omega_j)}|^2。$$

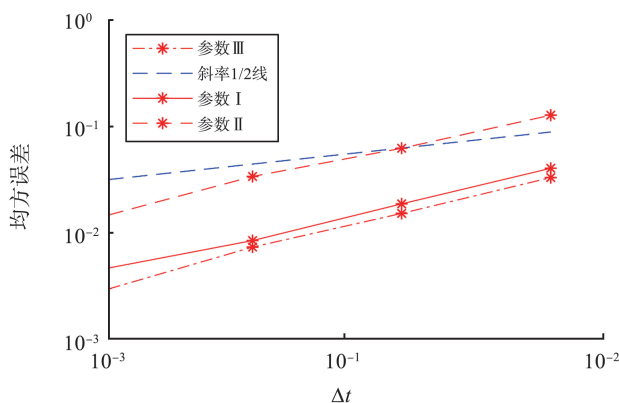


图 2 均方误差随时间差 Δt 增长的趋势

Fig.2 The trend of mean square error growing with time difference Δt

图 2 为 4 个时间步长对应的 4 个平均误差, 分别用不同线段连接。图 2 中的一条斜率为 1/2 的虚线作为参考线。这几条线的斜率基本一致, 表明在只含泊松项的随机微分方程上的随机 θ 方法是收敛的, 并且收敛阶是 1/2。

5 结语

为求解一般的带泊松跳随机微分方程,本文提出了一种新的数值解法。这种新的数值解法能缩小一般的带泊松跳随机微分方程的数值解与解析解之间的误差。数值实验表明,本文中的新数值解法在减小数值解的误差、加快数值解收敛性方面成效显著。

参考文献:

- [1] PADGETT W J, TSOKOS C P. The origins and applications of stochastic integral equations[J]. *International Journal of Systems Science*, 1971, 2(2):135-148.
- [2] ITÔ K. Stochastic integral[J]. *Proceedings of the Imperial Academy*, 1944, 20(8):519-524.
- [3] ITÔ K. On stochastic differential equations[M]. New York: American Mathematical Society, 1951:289-302.
- [4] KOU S G. A jump-diffusion model for option pricing[J]. *Management science*, 2002, 48(8):1086-1101.
- [5] SOBCZYK K. Stochastic differential equations;with applications to physics and engineering[M]. Berlin: Springer, 2013:15-35.
- [6] SITU R. Theory of stochastic differential equations with jumps and applications;mathematical and analytical techniques with applications to engineering[M]. New York: Springer, 2005:552-563.
- [7] HIGHAM D J, KLOEDEN P E. Numerical methods for nonlinear stochastic differential equations with jumps[J]. *Numerische Mathematik*, 2005, 101(1):101-119.
- [8] HIGHAM D J, KLOEDEN P E. Convergence and stability of implicit methods for jump-diffusion systems[J]. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 2006, 3(2):125-140.
- [9] RONGHUA L, HONGBING M, YONGHONG D. Convergence of numerical solutions to stochastic delay differential equations with jumps[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2006, 172(1):584-602.
- [10] CHALMERS G D, HIGHAM D J. Asymptotic stability of a jump-diffusion equation and its numerical approximation[J]. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 2009, 31(2):1141-1155.
- [11] WEI M. Convergence of numerical solutions for variable delay differential equations driven by Poisson random jump measure [J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2009, 212(2):409-417.
- [12] LI Qiyong, GAN Siqing. Almost sure exponential stability of numerical solutions for stochastic delay differential equations with jumps[J]. *Journal of Applied Mathematics and Computing*, 2011, 37(1):541-557.
- [13] MARUYAMA G. Continuous Markov processes and stochastic equations[J]. *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, 1955, 4:48-90.
- [14] MILSTEIN G. Approximate integration of stochastic differential equations[J]. *Theory of Probability & Its Applications*, 1975, 19(3):557-562.
- [15] RÜEMELIN W. Numerical treatment of stochastic differential equations[J]. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 1982, 19(3):604-613.
- [16] HU Lin, GAN Siqing. Numerical analysis of the balanced implicit methods for stochastic pantograph equations with jumps[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2013, 223:281-297.
- [17] SCHEUTZOW M. A stochastic Gronwall lemma[J]. *Infinite Dimensional Analysis, Quantum Probability and Related Topics*, 2013, 16(2):1350019.
- [18] PLATEN E, BRUTI-LIBERATI N. Numerical solution of stochastic differential equations with jumps in finance[M]. Berlin: Springer, 2010:11-15.

(编辑:陈丽萍)