山东大学学报(理学版)2024 年 1 月 第 59 卷 第 1 期
Journal of Shandong University(Natural Science), Vol.59, No.1, 2024

E-mail:xblxb@ sdu.edu.cn
http://lxbwk.njournal.sdu.edu.cn
Tel:+86-531-88366917

文章编号:1671-9352(2024)01-0011-06　　DOI:10.6040/j.issn.1671-9352.0.2023.148

连续时间框架下带名义利率零下限约束的最优货币政策

刘浩东,张驰
(中国海洋大学经济学院, 山东 青岛 266100)

摘要:利用正倒向随机微分方程,建立连续时间框架下的新凯恩斯模型,并将最优货币政策问题转化为带控制约束的随机最优控制问题。结合最大值原理,得到最优货币政策的必要条件,并刻画最优货币政策的特征。
关键词:倒向随机微分方程;随机最优控制;货币政策
中图分类号:O231.3　　**文献标志码**:A
引用格式:刘浩东,张驰.连续时间框架下带名义利率零下限约束的最优货币政策[J].山东大学学报(理学版),2024,59(1):11-16.

Optimal monetary policy with a zero lower bound on the nominal interest rate under a continuous-time framework

LIU Haodong, ZHANG Chi
(School of Economics, Ocean University of China, Qingdao 266100, Shandong, China)

Abstract: In this paper, we give the continuous time version of the New Keynesian model, which is a backward stochastic differential system and translate the optimal monetary policy problem into a stochastic optimal control problem under control constraints. By using the maximum principle for the control system, we obtain the necessary condition for the optimal monetary policy. Also we give the expression of the optimal monetary policy.
Key words: backward stochastic differential equation; stochastic optimal control; monetary policy

0　引言

货币政策选择问题指通过调整合适的名义利率以实现特定的经济目标,长期以来受到政策制定者们和学者们的广泛关注,并产生了大量的研究成果。在新凯恩斯模型框架下,通过选择合适的政策目标函数,可以将最优货币政策问题转化为最优控制问题。关于离散时间框架下新凯恩斯模型的构建,可以参考 Woodford 等[1]和 Galí[2]的研究,进一步地,Clarida 等[3]研究了离散时间框架下基于新凯恩斯模型的最优货币政策,其研究工作中的模型为

$$\text{目标函数}\quad \min \frac{1}{2}E_t\left\{\sum_{i=0}^{\infty}\beta^i\left[\alpha x_{t+i}^2+\pi_{t+i}^2\right]\right\}$$

$$\text{约束条件}\quad \begin{cases}\pi_t=\lambda x_t+\beta E_t\pi_{t+1}+u_t,\\ x_t=-\varphi\left[i_t-E_t\pi_{t+1}\right]+E_t x_{t+1}+g_t,\\ u_t=\theta_u u_{t-1}+\hat{u}_t,\\ g_t=\theta_g g_{t-1}+\hat{g}_t。\end{cases}$$

在文献[3]的研究中,并未对名义利率这一控制变量设置约束条件,即研究最优货币政策时没有考虑名义利率取 0 这一下限值的情形,然而,在现实中,过去 20 年日本不断实施低利率甚至零利率等激进的货币政策,

收稿日期:2023-04-12; **网络出版时间**:2023-08-28 12:57:38
网络出版地址:https://link.cnki.net/urlid/37.1389.N.20230825.1243.002
基金项目:国家自然科学基金资助项目(12201593)
第一作者简介:刘浩东(1988—),男,讲师,硕士生导师,博士,研究方向为随机控制. E-mail:liuhaodong@ ouc.edu.cn

而美国在新冠肺炎疫情流行期间也采取了接近零利率的超低利率量化宽松政策。当名义利率达到零下限值时,将出现流动性陷阱,因此,研究处于流动性陷阱中的最优货币政策具有重要的意义。Adam 和Billi[4]研究了在离散时间情形下名义利率带零下界约束的完全承诺规则下的最优货币政策,文献[5-6]也在离散时间框架下对最优货币政策问题进行了深入研究。而与离散时间模型相比,连续时间框架下的建模更便于计算分析,对此 Werning[7]研究了连续时间情形下名义利率为 0 时流动性陷阱中的最优货币政策,但采用的是非随机的确定性模型。目前对于连续时间随机情形下名义利率带零下限约束的完全承诺最优货币政策研究仍然较为欠缺。

由于状态变量的当前值依赖于未来的取值,因此我们利用倒向随机微分方程(backward stochastic differential equation, BSDE)来给出了新凯恩斯模型的连续时间刻画,并将最优货币政策问题转化为无穷时间倒向随机微分方程系统的最优控制问题。本文利用无穷时间下的最大值原理求解该问题,并给出了最优解要满足的必要条件。无穷时间倒向随机微分方程控制系统的求解是非常困难的,文献[8−10]研究了有限时间下正倒向随机系统的最优控制问题;关于无穷时间,Peng 和 Shi[11]得到正倒向随机微分方程解的存在唯一性结果;Hu 等[12-13]研究了无穷时间下的随机线性二次最优控制问题;Agram 和 Øksendal[14]研究了无穷时间下正倒向随机微分方程系统的最优控制问题,但其未对控制变量取值施加约束。本文将最大值原理拓展应用至这一类无穷时间带控制约束的倒向方程最优控制问题,本文分 3 步来研究该问题:(1)证明构建的货币政策模型中无穷时间倒向随机微分方程解的存在性,通过给出一个可许对,证明可许控制集是非空的,否则控制问题就是不适定的;(2)得到了该控制问题在无穷时间范围内最优解的相应伴随方程和哈密顿量的必要条件;(3)结合必要条件,给出了最优名义利率取值不为 0 时的表达式。

1 模型构建

在本章中,我们构造了一个关于最优货币政策问题的连续时间正倒向随机控制系统。基于 Clarida 等[3]提出的离散时间新凯恩斯模型,本文用无穷时间倒向随机微分方程来描述通货膨胀率 π 和产出缺口 x 的动态变化。

设$(\Omega,\mathscr{F},(\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0},P)$为一完备的概率空间,在其上定义 1 维标准布朗运动 $W(\cdot)$,假设信息流 $\mathscr{F}_t=\sigma\{\boldsymbol{N},\sigma\{W_s;0\leqslant s\leqslant t\}\}$,其中 $\boldsymbol{N}$ 表示 P 零测集全体。在新凯恩斯模型框架中,由于 π 和 x 的前视性,其当前取值依赖于对未来的预期值,因此用倒向随机差分方程来刻画其发展变化。根据倒向随机差分方程与倒向随机微分方程的关系,给出了连续时间下该控制系统的表示形式。

描述通货膨胀率 π 的菲利普斯曲线为

$$-\mathrm{d}\pi(t)=\left[\left(1-\frac{1}{\beta}\right)\pi(t)+\frac{\lambda}{\beta}x(t)+\frac{1}{\beta}u(t)\right]\mathrm{d}t-M(t)\,\mathrm{d}W(t),\tag{1}$$

$(\pi(t),M(t))$为式(1)BSDE 的解。方程中 $\beta\in(0,1)$是折现系数;$\lambda>0$ 为通货膨胀率对产出缺口反应的敏感程度;$u(t)$为供给冲击,其满足正向随机微分方程

$$\mathrm{d}u(t)=(\theta_u-1)u(t)\,\mathrm{d}t+\sigma_u\mathrm{d}W(t),$$

其中 $0\leqslant\theta_u<1$。

产出缺口 x 指实际产出与生产资源充分利用下的潜在产出之间的对数差,描述其变化的欧拉方程①为

$$-\mathrm{d}x(t)=\left(\frac{\varphi}{\beta}\pi(t)-\frac{\varphi\lambda}{\beta}x(t)-\varphi i(t)-\frac{\varphi}{\beta}u(t)+g(t)\right)\mathrm{d}t-N(t)\,\mathrm{d}W(t),\tag{2}$$

$(x(t),N(t))$为式(2)BSDE 的解。方程中 $\varphi>0$ 指消费的跨期替代弹性[15];而名义利率 $i(t)$是货币政策的控制变量;$g(t)$是对自然利率的利率冲击,其满足正向随机微分方程

$$\mathrm{d}g(t)=(\theta_g-1)g(t)\,\mathrm{d}t+\sigma_g\mathrm{d}W(t),$$

其中 $0\leqslant\theta_g<1$。

---

① 在根据差分方程得到对应的微分方程时,需要利用菲利普斯曲线中的关系,把离散时间欧拉方程中的 $E_t\pi_{t+1}$用 π_t 和 x_t 来表达。

记 $\rho=\dfrac{1}{\beta}-1$, $\kappa=\dfrac{\lambda}{\beta}$, $\mu=\theta_u-1$, $\nu=\theta_g-1$,可以得到连续时间下新凯恩斯模型的状态方程:

$$\begin{cases} \mathrm{d}u(t)=\mu u(t)\mathrm{d}t+\sigma_u\mathrm{d}W(t), \\ \mathrm{d}g(t)=\nu g(t)\mathrm{d}t+\sigma_g\mathrm{d}W(t), \\ -\mathrm{d}\pi(t)=[-\rho\pi(t)+\kappa x(t)+(1+\rho)u(t)]\mathrm{d}t-M(t)\mathrm{d}W(t), \\ -\mathrm{d}x(t)=[\varphi(1+\rho)\pi(t)-\varphi\kappa x(t)-\varphi i(t)-\varphi(1+\rho)u(t)+g(t)]\mathrm{d}t-N(t)\mathrm{d}W(t), \\ \lim\limits_{T\to\infty}E_t\mathrm{e}^{-\rho(T-t)}\pi(T)=0, \\ \lim\limits_{T\to\infty}E_t\mathrm{e}^{-\varphi\kappa(T-t)}x(T)=0, \\ u(0)=u_0, \\ g(0)=g_0,\ \forall 0\leqslant t\leqslant T<\infty。 \end{cases} \tag{3}$$

其中 $\rho,\kappa,\varphi>0$, $-1\leqslant\mu$, $\upsilon<0$ 均为常数;u_0 和 g_0 是初始冲击。π 和 x 的终端条件意味着当时间充分长时,折现后的通货膨胀率和产出缺口将趋于 0。

在现实情况中,名义利率几乎不会低于 0,因此对名义利率施加下界为 0 的约束

$$i(t)\geqslant 0。\tag{4}$$

对于目标函数,中央银行总是在产出目标和通货膨胀目标之间寻求平衡,这里使用平方形式的社会福利损失函数

$$\frac{1}{2}E\left[\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\rho t}[\alpha\pi(t)^2+x(t)^2]\mathrm{d}t\right]$$

来刻画其目标,由于 $\rho=\dfrac{1}{\beta}-1$,考虑一阶近似,因此 $\mathrm{e}^{-\rho t}=\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}^{\rho}}\right)^t=\left(\dfrac{1}{1+\rho}\right)^t=\beta^t$,这与离散情形下的模型是一致的。参数 α 刻画了通胀目标相对于产出目标的重要程度,其取值的大小代表了中央银行的政策侧重点和意图。

本文的主要目的是研究连续时间随机情形下的中央银行最优货币政策问题。中央银行常用的货币政策工具是对名义利率 $i(t)$ 的调整,因此将名义利率 $i(t)$ 设为控制变量,使社会福利损失函数最小化。定义容许控制集为 $\mathscr{A}(i)\triangleq\{(i(t))_{0\leqslant t<\infty}$ 为 $\mathscr{F}_t$-可测过程:$(\pi(t),x(t),i(t))$ 满足正倒向随机微分方程(forward backward stochastic differential equation, FBSDE)式(3),$i(t)\geqslant 0$, $E\left[\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\rho t}[\alpha\pi(t)^2+x(t)^2]\mathrm{d}t\right]<\infty\}$,则中央银行的递归最优控制问题为

$$\min_{i(t)\in\mathscr{A}(i)}\frac{1}{2}E\left[\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\rho t}[\alpha\pi(t)^2+x(t)^2]\mathrm{d}t\right]。\tag{5}$$

方程(3)是一个无穷时间正倒向随机微分方程,表明 π 和 x 这 2 个经济变量的取值不仅依赖于当前的货币政策,还依赖于对未来货币政策的预期。对于这类基于预期的情形,央行当前对未来货币政策承诺的可信度至关重要。当考虑这类完全承诺型的货币政策时,央行实际上要给出未来所有时间的名义利率,它也将坚定地执行这一政策承诺,因此,在模型中考虑的最优货币政策是在完全承诺背景下的,即政策工具选择是在当前为将来的任意时间给出一条完整的名义利率变化路径,而这与相机抉择的货币政策不同,相机抉择的货币政策指中央银行只考虑当前的名义利率取值,而未来的名义利率值则通过在未来时点重新求解优化问题来计算新的最优名义利率值。可以看出,相机抉择的货币政策存在时间不一致的问题,而如何建立相机抉择的货币政策模型,是今后需要解决的问题。在求解模型前首先说明容许控制集不是空集,为此给出一个可行控制 $i(t)$,并说明其对应的 $(\pi(t),x(t),i(t))_{0\leqslant t<\infty}\in\mathscr{A}(\pi,x,i)$。

取 $i(t)\equiv 0$, $\pi(t)=ax(t)+bu(t)+cg(t)$,其中

$$a=(2\varphi(1+\rho))^{-1}[-(\rho-\varphi\kappa)+\sqrt{(\rho-\varphi\kappa)^2+4\varphi(1+\rho)\kappa}]>0$$

为以下二次方程的正解

$$\varphi(1+\rho)a^2+(\rho-\varphi\kappa)a-\kappa=0。$$

b 为以下线性方程的解

$$-\rho b+1+\rho=a\varphi(1+\rho)b-a\varphi(1+\rho)-b\mu。$$

c 为以下线性方程的解

$$-\rho c=a\varphi(1+\rho)c+a-c\nu。$$

进一步取 x 为以下随机微分方程从 0 至无穷时刻的解：

$$\begin{cases}\mathrm{d}x(t)=-\{[\varphi(1+\rho)a-\varphi\kappa]x(t)+[\varphi(1+\rho)b-\varphi(1+\rho)]u(t)+[\varphi(1+\rho)c+1]g(t)\}\mathrm{d}t,\\ x(0)=0。\end{cases}$$

另外,取 $M(t)=b\sigma_u+c\sigma_g$, $N(t)\equiv 0$, 则构建的组合$(\pi(t),M(t),x(t),N(t))$满足式(3)。同时,因为 $E\left[\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\rho t}u(t)^2\mathrm{d}t\right]<\infty$, $E\left[\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\rho t}g(t)^2\mathrm{d}t\right]<\infty$,容易验证$E\left[\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\rho t}x(t)^2\mathrm{d}t\right]$以及$E\left[\int_0^\infty \mathrm{e}^{\rho t}\pi(t)^2\mathrm{d}t\right]<\infty$,从而得到了一个可行解$(\pi(t),x(t),i(t))_{0\leqslant t<\infty}\in\mathscr{A}(\pi,x,i)$。

2 最优货币政策

通过上述模型,将最优货币政策问题转化成了一个无穷时间正倒向随机微分系统最优控制问题。由于控制变量存在下限约束,即 $i(t)\geqslant 0$,因此采用无穷时间随机最大值原理来解决该问题。接下来,将给出该问题的最大值原理,并进一步刻画最优货币政策的表达形式。

该最优控制问题的状态变量为$(u(t),g(t),\pi(t),x(t))$,控制变量为 $i(t)$,对应的 Hamiltonian 函数 H：$([0,+\infty)\times\mathbf{R}\times\mathbf{R}\times\mathbf{R}\times\mathbf{R}\times[0,+\infty)\times\mathbf{R}\times\mathbf{R}\times\mathbf{R}^{1\times m}\times\mathbf{R}^{1\times m}\times\mathbf{R}\times\mathbf{R})\to\mathbf{R}$ 如下：

$$\begin{aligned}&H(t,u,g,\pi,x,i,p_u,p_g,k_u,k_g,q_\pi,q_x)\\ &=p_u\mu u+p_g\nu g+k_u\sigma+k_g\delta+\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\rho t}(\alpha\pi_t^2+x_t^2)\\ &\quad+q_\pi[\rho\pi-\kappa x-(1+\rho)u]+q_x[-\varphi(1+\rho)\pi+\varphi\kappa x+\varphi i+\varphi(1+\rho)u+g],\end{aligned}\tag{6}$$

其中$(p_u(\cdot),p_g(\cdot),k_u(\cdot),k_g(\cdot),q_\pi(\cdot),q_x(\cdot))$是一阶伴随变量,满足 FBSDE：

$$\begin{cases}-\mathrm{d}p_u(t)=[\mu p_u(t)-(1+\rho)q_\pi(t)+\varphi(1+\rho)q_x(t)]\mathrm{d}t-k_u(t)\mathrm{d}W(t),\\ -\mathrm{d}p_g(t)=[\nu p_g(t)-q_x(t)]\mathrm{d}t-k_g(t)\mathrm{d}W(t),\\ -\mathrm{d}q_\pi(t)=[\rho q_\pi(t)-\varphi(1+\rho)q_x(t)+\alpha\mathrm{e}^{-\rho t}\pi(t)]\mathrm{d}t,\\ -\mathrm{d}q_x(t)=[-\kappa q_\pi(t)+\varphi\kappa q_x(t)+\mathrm{e}^{-\rho t}x(t)]\mathrm{d}t,\\ p_u(T)=p_g(T)=0,\\ q_\pi(0)=q_x(0)=0。\end{cases}\tag{7}$$

可以看到,关于变量(q_π, q_x)的随机微分方程(实际上,随机微分方程退化为常微分方程)与变量(p_u,p_g,k_u,k_g)无关。不论如何选取 BSDE 的终端时刻 T,在给定$(\pi(t),x(t))$值的条件下,都可以独立地求解该常微分方程并得到解(q_π,q_x)。

$$\begin{cases}\mathrm{d}\begin{pmatrix}q_\pi(t)\\ q_x(t)\end{pmatrix}=\left[\begin{pmatrix}-\rho & \varphi(1+\rho)\\ \kappa & -\varphi\kappa\end{pmatrix}\begin{pmatrix}q_\pi(t)\\ q_x(t)\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\alpha\mathrm{e}^{-\rho t}\pi(t)\\ \mathrm{e}^{-\rho t}x(t)\end{pmatrix}\right]\mathrm{d}t,\\ \begin{pmatrix}q_\pi(0)\\ q_x(0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}。\end{cases}$$

首先给出最优货币政策 $i(t)$要满足的必要条件。

引理 1 若$(\pi^*(t),x^*(t),i^*(t))$为该控制问题的最优三元组,$(q_\pi(t), q_x(t))$为方程(7)中常微分方程的解,那么如下关系成立：

$$\begin{cases}i^*(t)q_x(t)=0,\\ q_x(t)\geqslant 0,\end{cases}$$

对于 $\forall t\in[0,\infty)$, P-a.s.,

证明 选取任意终端时刻 $T\geqslant 0$,考虑以下截断控制问题：

$$\min_{i(t)\geqslant 0}\frac{1}{2}E\left(\int_0^T\mathrm{e}^{-\rho t}[\alpha\pi(t)^2+x(t)^2]\mathrm{d}t\right),\tag{8}$$

约束条件为

$$\begin{cases}\mathrm{d}u(t)=\mu u(t)\mathrm{d}t+\sigma_u \mathrm{d}W(t),\\ \mathrm{d}g(t)=\nu g(t)\mathrm{d}t+\sigma_g \mathrm{d}W(t),\\ u(0)=u_0,\\ g(0)=g_0,\\ -\mathrm{d}\pi(t)=[-\rho\pi(t)+\kappa x(t)+(1+\rho)u(t)]\mathrm{d}t-M(t)\mathrm{d}W(t),\\ -\mathrm{d}x(t)=[\varphi(1+\rho)\pi(t)-\varphi\kappa x(t)-\varphi i(t)-\varphi(1+\rho)u(t)+g(t)]\mathrm{d}t-N(t)\mathrm{d}W(t),\\ \pi(T)=\pi^*(T),\\ x(T)=x^*(T)。\end{cases}$$

容易验证原控制问题(5)的最优解 $(\pi^*(t),x^*(t),i^*(t))_{0\leqslant t\leqslant T}$是该截断控制问题的最优解。根据文献[16,定理 4.4] 可以得到

$$H_i(t,\pi^*(t),x^*(t),i^*(t),p_u(t;T),p_g(t;T),k_u(t,T),k_g(t,T),q_\pi(t,T),q_x(t,T))\times(i-i^*(t))\geqslant 0,$$
$$\forall\, i\geqslant 0,t\in[0,T],\ P\text{-a.s.},$$

其中$(p_u(t),p_g(t;T),k_u(t,T),k_g(t,T),q_\pi(t,T),q_x(t,T))$是方程(7)在时间区间$[0,T]$上的解。结合式(6),可得

$$\varphi q_x(t;T)(i-i^*(t))\geqslant 0,\quad \forall\, i\geqslant 0,\quad t\in[0,T],\ P\text{-a.s.}。$$

由于 $\varphi>0$ 及 $i\geqslant 0$ 取值的任意性,因此有

$$\begin{cases}i^*(t)q_x(t;T)=0,\\ q_x(t;T)\geqslant 0。\end{cases}$$

对于$\forall\, t\in[0,T]$, P-a.s.。

由于 BSDE 终端条件中出现的终端时刻 T 与变量 q_x 无关,因此在$[0,T]$上 $q_x(\cdot)=q_x(\cdot;T)$。由 $T\geqslant 0$ 的任意性,可得

$$\begin{cases}i^*(t)q_x(t)=0,\\ q_x(t)\geqslant 0,\end{cases}$$
$$\forall\, t\in[0,\infty),\ P\text{-a.s.}。$$

接下来给出关于最优策略 $i^*(t)$的刻画。

定理 1　在任何时刻 t,$i^*(t)$或者为 0,或者具有表达式 $i^*(t)=I(\pi^*(t),x^*(t),u(t),g(t))$,其中 $I(\pi,x,u,g)=\left(1+\rho-\dfrac{\alpha\kappa}{\varphi}\right)\pi-\kappa x-(1+\rho)u+\dfrac{1}{\varphi}g$,如果 $I(\pi^*(t),x^*(t),u(t),g(t))<0$,则 $i^*(t)=0$,即最优名义利率达到了零下界。

证明　只需要证明 $i^*(t)>0$ 的情形。不失一般性,假设 $i^*(t_0)>0$, P-a.s.,由上面引理结果可知 $q_x(t_0)=0$。定义停时 $\tau(\omega)=\inf\limits_t(t\geqslant t_0,q_x(t)>0)$,那么对于 $t\in[t_0,\tau(\omega))$, $q_x(t)\equiv 0$, P-a.s.。根据方程(7)中 $q_x(t)$的表达式,有

$$-\kappa q_\pi(t)+\mathrm{e}^{-\rho t}x(t)=0。$$

根据式(3)可得

$$\begin{aligned}-\mathrm{d}q_\pi(t)&=\frac{\rho}{\kappa}\mathrm{e}^{-\rho t}x(t)\mathrm{d}t-\frac{1}{\kappa}\mathrm{e}^{-\rho t}\mathrm{d}x(t)\\ &=\frac{\rho}{\kappa}\mathrm{e}^{-\rho t}x(t)\mathrm{d}t+\frac{1}{\kappa}\mathrm{e}^{-\rho t}[\varphi(1+\rho)\pi t)-\varphi\kappa x(t)-\varphi i(t)-\varphi(1+\rho)u(t)+g(t)]\mathrm{d}t\\ &\quad-\frac{1}{\kappa}\mathrm{e}^{-\rho t}N(t)\mathrm{d}W(t)。\end{aligned}$$

根据式(7)可得

$$-\mathrm{d}q_\pi(t)=\left[\frac{\rho}{\kappa}\mathrm{e}^{-\rho t}x(t)+\alpha\mathrm{e}^{-\rho t}\pi(t)\right]\mathrm{d}t。$$

比较2个表达式中的对应项可知

$$\begin{cases} i^*(t)=\left(1+\rho-\dfrac{\alpha\kappa}{\varphi}\right)\pi^*(t)-\kappa x^*(t)-(1+\rho)u(t)+\dfrac{1}{\varphi}g(t), \\ N(t)=0, \end{cases} \tag{9}$$

对于 $t\in[t_0,\tau(\omega))$，P-a.s.。定理得证。

上述结果表明：一方面，当最优名义利率不为0时，最优名义利率应为 $I(\pi,x,u,g)=(1+\rho-\frac{\alpha\kappa}{\varphi})\pi-\kappa x-(1+\rho)u+\frac{1}{\varphi}g$；另一方面，最优名义利率不为0，则 $I(\pi^*(t),x^*(t),u(t),g(t))$ 一定大于0。另外，可以看到，如果最优名义利率不为0，则它是当前产出缺口 $x^*(t)$ 和产出冲击 $u(t)$ 的单调减函数，是利率冲击 $g(t)$ 的单调增函数，而 $i^*(t)$ 与 $\pi^*(t)$ 之间的单调性取决于参数 $\alpha,\kappa,\rho,\varphi$ 之间的关系。

参考文献：

[1] WOODFORD M, WALSH C E. Interest and prices: foundations of a theory of monetary policy[J]. Macroeconomic Dynamics, 2005, 9(3):462-468.

[2] GALÍ J. Monetary policy, inflation, and the business cycle: an introduction to the new Keynesian framework[M]. Princeton: Princeton University Press, 2008.

[3] CLARIDA R, GALÍ J, GERTLER M. The science of monetary policy: a new Keynesian perspective[J]. Journal of Economic Literature, 1999, 37(4):1661-1707.

[4] ADAM K, BILLI R M. Optimal monetary policy under commitment with a zero bound on nominal interest rates[J]. Journal of Money, Credit and Banking, 2006:1877-1905.

[5] GABAIX X. A behavioral new Keynesian model[J]. American Economic Review, 2020, 110(8):2271-2327.

[6] SCHMIDT S. Optimal monetary and fiscal policy with a zero bound on nominal interest rates[J]. Journal of Money, Credit and Banking, 2013, 45(7):1335-1350.

[7] WERNING I. Managing a liquidity trap:monetary and fiscal policy[R]. [S.l.]: National Bureau of Economic Research, 2011.

[8] HU Mingshang, JI Shaolin, XU Rundong. A local stochastic maximum principle for forward-backward stochastic control systems with quadratic generators[J]. SIAM Journal on Control and Optimization, 2022, 60(3):1791-1818.

[9] HU Mingshang, JI Shaolin, XUE Xiaole. A global stochastic maximum principle for fully coupled forward-backward stochastic systems[J]. SIAM Journal on Control and Optimization, 2018, 56(6):4309-4335.

[10] HUANG Jianhui, WANG Shujun, WU Zhen. Backward-forward linear-quadratic mean-field games with major and minor agents[J]. Probability, Uncertainty and Quantitative Risk, 2016, 1:8.

[11] PENG Shige, SHI Yufeng. Infinite horizon forward-backward stochastic differential equations[J]. Stochastic Processes and Their Applications, 2000, 85(1):75-92.

[12] HU Ying, SHI Xiaomin, XU Zuoquan. Constrained stochastic LQ control on infinite time horizon with regime switching[J]. ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations, 2022, 28:5.

[13] HU Ying, TANG Shanjian. Mixed deterministic and random optimal control of linear stochastic systems with quadratic costs[J]. Probability, Uncertainty and Quantitative Risk, 2019, 4:1.

[14] AGRAM N, ØKSENDAL B. Infinite horizon optimal control of forward-backward stochastic differential equations with delay[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2014, 259:336-349.

[15] WOODFORD M. Control of the public debt: a requirement for price stability? [C]//The Debt Burden and its Consequences for Monetary Policy: Proceedings of a Conference Held by the International Economic Association at the Deutsche Bundesbank, London: Palgrave Macmillan UK, 1998:117-158.

[16] PENG S G. Backward stochastic differential equations and applications to optimal control[J]. Applied Mathematics and Optimization, 1993, 27(2):125-144.

（编辑：李艺）